

Cours de mathématiques de MPSI (2013-2014)

Stéphane Flon

Table des matières

partie A. Premier semestre	7
Chapitre I. Logique	9
1. Quelques notions de logique	9
2. Quelques principes de démonstration	20
3. Feuille de TD 1 : Logique	24
Chapitre II. Ensembles, relations binaires, applications	27
1. Notions ensemblistes	27
2. Relations binaires	31
3. Généralités sur les applications	37
4. Familles	43
5. Nombres entiers naturels	45
6. Feuille de TD 2 : Ensembles, relations binaires, applications	50
Chapitre III. Nombres complexes	55
1. Le corps des nombres complexes	56
2. L'exponentielle complexe	61
3. Nombres complexes et géométrie	66
4. Équations polynomiales complexes	68
5. Fonctions trigonométriques	72
6. Une construction de \mathbb{C}	76
7. Questionnaire 1 : Complexes	80
8. Feuille de TD 3 : Nombres complexes	81
Chapitre IV. Techniques fondamentales en algèbre et analyse	85
1. Calculs algébriques	85
2. Notions fondamentales d'analyse	91
3. Exponentielles, logarithmes, puissances	100
4. Calcul pratique de primitives	106
5. Fonctions hyperboliques	108
6. Fonctions circulaires réciproques	110
7. Complément sur le calcul de primitives	113
8. Feuille de TD 4 : Techniques fondamentales en algèbre et analyse	115
Chapitre V. Structures algébriques	121
1. Groupes	121
2. Anneaux	130
3. Corps	136
4. Questionnaire 2 : Structures algébriques	138
5. Feuille de TD 5 : Structures algébriques	139
Chapitre VI. Équations différentielles	145
1. Introduction aux équations différentielles linéaires	145
2. Fonction exponentielle complexe	146
3. Équations linéaires du premier ordre	148
4. Équations linéaires du second ordre	153
5. Problème de raccord pour l'ordre 1 (hors-programme)	159
6. Questionnaire 3 : Équations différentielles	160
7. Feuille de TD 6 : Équations différentielles	161

Chapitre VII. Arithmétique	165
1. Divisibilité dans l'anneau des entiers relatifs	165
2. Plus grand diviseur commun	168
3. Plus petit commun multiple	170
4. Nombres premiers	171
5. Questionnaire 4 : Arithmétique	174
6. Feuille de TD 7 : Arithmétique	175
Chapitre VIII. Nombres réels, suites numériques	179
1. Le corps des nombres réels	179
2. Suites de nombres réels : premières définitions	183
3. Limite d'une suite de nombres réels	185
4. Limites et ordre	187
5. Opérations algébriques sur les limites	189
6. Suites extraites	191
7. Suites monotones. Théorèmes des segments emboîtés et de Bolzano-Weierstrass.	192
8. Relations de comparaison	196
9. Brève extension aux suites complexes	200
10. Questionnaire 5 : Suites	203
11. Feuille de TD 8 : Nombres réels, suites numériques	204
Chapitre IX. Espaces vectoriels	211
1. Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels	212
2. Familles finies de vecteurs	217
3. Applications linéaires	221
4. Questionnaire 6 : Espaces vectoriels	232
5. Feuille de TD 9 : Espaces vectoriels	233
Chapitre X. Fonctions numériques	239
1. Préliminaires topologiques	240
2. Premières définitions	241
3. Étude locale d'une fonction	246
4. Limite et ordre	250
5. Opérations algébriques sur les limites	252
6. Limites et monotonie	254
7. Caractérisation séquentielle de la continuité	255
8. Fonctions continues sur un intervalle	256
9. Uniforme continuité	261
10. Fonctions à valeurs complexes	263
11. Questionnaire 7 : Fonctions	266
12. Feuille de TD 10 : Fonctions numériques	267
Chapitre XI. Dénombrément	271
1. Ensembles finis	271
2. Dénombrément	276
3. Feuille de TD 11 : Dénombrément	283
Chapitre XII. Dérivation	287
1. Dérivée en un point, fonction dérivée	287
2. Dérivabilité sur un intervalle	293
3. Dérivées successives	302
4. Brève extension aux valeurs complexes	305
5. Questionnaire 8 : Dérivation	308
6. Feuille de TD 12 : Dérivation	309
Chapitre XIII. Dimension finie	313
1. Dimension d'un espace vectoriel	313
2. Dimension d'un sous-espace vectoriel	318
3. Rang d'une famille finie de vecteurs	320
4. Applications linéaires et dimension finie	321
5. Questionnaire 9 : Dimension finie	328

6. Feuille de TD 13 : Dimension finie	329
Chapitre XIV. Suites récurrentes	333
1. Introduction	333
2. Quelques exemples classiques	334
3. Étude générale	338
4. Application à l'approximation	343
5. Questionnaire 10 : Suites récurrentes	346
6. Feuille de TD 14 : Suites récurrentes	347
Chapitre XV. Polynômes	349
1. Polynômes à une indéterminée	349
2. Fonctions polynomiales	357
3. Polynômes scindés, fonctions symétriques élémentaires des racines	363
4. Arithmétique de l'anneau des polynômes	365
5. Polynômes irréductibles, décomposition	368
6. Feuille de TD 15 : Polynômes	372
Chapitre XVI. Analyse asymptotique	377
1. Relations de comparaison pour les fonctions	377
2. Développements limités	382
3. Applications des développements limités	388
4. Feuille de TD 16 : Analyse asymptotique	392
Chapitre XVII. Fractions rationnelles	395
1. Corps des fractions rationnelles	395
2. Fonctions rationnelles	399
3. Étude locale d'une fraction rationnelle	401
4. Compléments	405
5. Feuille de TD 17 : Fractions rationnelles	407
partie B. Second semestre	409
Chapitre XVIII. Matrices	411
1. Définitions. Matrices particulières	412
2. Matrice d'une famille finie de vecteurs, d'une application linéaire	413
3. Opérations sur les matrices	415
4. Matrice de changement de base	420
5. Matrices équivalentes, matrices semblables	422
6. Rang d'une matrice	424
7. Trace d'une matrice carrée	426
8. Opérations élémentaires	427
9. Matrices par blocs	430
10. Systèmes	431
11. Questionnaire 11 : Matrices	434
12. Feuille de TD 18 : Matrices	435
Chapitre XIX. Probabilités sur un univers fini	441
1. Expérience aléatoire et univers	441
2. Espaces probabilisés finis	442
3. Probabilités conditionnelles	444
4. Événements indépendants	446
5. Questionnaire 12 : Probabilités sur un univers fini	448
6. Feuille de TD 19 : Probabilités sur un univers fini	449
Chapitre XX. Intégration	453
1. Intégrale d'une fonction continue par morceaux	454
2. Propriétés de l'intégrale	462
3. Calcul approché d'une intégrale	468
4. Extension de la définition d'une intégrale	472
5. Feuille de TD 20 : Intégration	476

Chapitre XXI. Primitives et formules de Taylor	481
1. Primitives et intégrales d'une fonction continue	481
2. Méthodes de calcul de primitives	483
3. Primitives des fonctions usuelles	486
4. Techniques de calcul de primitives	486
5. Formules de Taylor	489
6. Feuille de TD 21 : Primitives et formules de Taylor	493
Chapitre XXII. Déterminant	497
1. Groupe symétrique	497
2. Applications multilinéaires	502
3. Déterminant de n vecteurs dans une base	506
4. Déterminant d'un endomorphisme	508
5. Déterminant d'une matrice carrée	510
6. Calcul et utilité d'un déterminant	512
7. Applications de la notion de déterminant	514
8. Feuille de TD 22 : Déterminant	517
Chapitre XXIII. Séries numériques	523
1. Généralités	524
2. Séries à termes positifs	526
3. Comparaison série-intégrale dans le cas monotone	527
4. Séries absolument convergentes	530
5. Représentation décimale des réels	532
6. Compléments (hors programme)	533
7. Feuille de TD 23 : Séries numériques	536
Chapitre XXIV. Variables aléatoires	541
1. Variables aléatoires	541
2. Lois usuelles	542
3. Couples de variables aléatoires	544
4. Variables aléatoires indépendantes	544
5. Espérance	546
6. Variance, écart type et covariance	549
7. Feuille de TD 24 : Variables aléatoires	553
Chapitre XXV. Espaces euclidiens	559
1. Produit scalaire	559
2. Orthogonalité	562
3. Automorphismes orthogonaux	573
4. Automorphismes orthogonaux du plan	578
5. Notion d'espace affine : distinguer point et vecteur	581
6. Sous-espaces affines	583
7. Hyperplans affines d'un espace euclidien	585
8. Feuille de TD 25 : Espaces euclidiens	587

Première partie

Premier semestre

CHAPITRE I

Logique

Sommaire

1. Quelques notions de logique	9
1.1. Assertions	9
1.2. Les connecteurs logiques	10
1.3. Les quantificateurs	16
1.4. Savoir écrire la négation d'une assertion	19
2. Quelques principes de démonstration	20
2.1. La démonstration par l'absurde	20
2.2. Montrer une implication	20
2.3. Montrer qu'une implication est fausse	21
2.4. Montrer une équivalence	21
2.5. Montrer un résultat universel	22
2.6. Montrer un résultat existentiel	22
2.7. Montrer un résultat d'unicité	23
2.8. Montrer un résultat d'existence et d'unicité	23
3. Feuille de TD 1 : Logique	24
3.1. Logique	24
3.2. Principes de démonstration	25

1. QUELQUES NOTIONS DE LOGIQUE

Il ne s'agit pas ici de faire un véritable cours de logique, mais de comprendre les mécanismes de raisonnement autorisés tout au cours de l'année. Cette brève introduction utilisera un certain formalisme (connecteurs logiques, quantificateurs), qu'il est bon de connaître pour sa culture générale, mais qu'il n'est pas toujours impératif d'employer dans ses copies, loin de là même. En fait, leur utilisation est plus subtile qu'il n'y paraît, et je préciserai quelques précautions d'emploi à connaître.

Il est recommandé de revenir sur ce chapitre tout au long de l'année si des fautes de logique subsistent dans vos copies. Bien qu'il ne puisse faire l'objet d'une évaluation directe, il est d'une importance cruciale pour la suite de l'année.

1.1. ASSERTIONS

Commençons par une définition informelle :

Définition (Assertion)

Une *assertion* (ou *proposition* ou *formule*) mathématique est une phrase (un ensemble de symboles syntaxiquement correct) à laquelle on peut assigner une valeur de vérité (dire que la phrase est vraie ou fausse a un sens).

1.a

Une assertion peut être fausse

Cette définition, bien que floue, montre que l'on accorde une importance toute relative à la valeur de vérité d'une assertion. Ce qui compte, c'est que lui en attribuer une ait un sens. Par convention, on attribue la valeur 0 à une assertion fausse, 1 à une assertion vraie. Soit par exemple x un réel, la phrase « $(x = 2) \Rightarrow (x = 4)$ » est une assertion fausse, ou encore de valeur 0. Une majeure partie de votre travail consiste à prouver –ou démontrer– une assertion, *i.e.* montrer qu'elle est vraie.

1.1

Une assertion doit donc respecter une certaine syntaxe, que nous présenterons sur quelques exemples. On peut généralement énoncer une assertion dans deux registres différents : le français, qui est préférable, et le registre formel.

Outre les chiffres arabes, les lettres des alphabets latin et grec (qu'il faut absolument connaître), les symboles plus usités sont :

- les connecteurs logiques : \vee (*disjonction*, se lit « ou »), \wedge (*conjonction*, se lit « et »), \neg (*négation*, se lit « non »), \Rightarrow (*implication*), \Leftrightarrow (*équivalence*);
- les quantificateurs logiques : \forall (« quel que soit »), \exists (« il existe »), $\exists!$ (« il existe un/une unique »);
- les parenthèses et symboles apparentés;
- les symboles ensemblistes \in (« appartient à ») et \notin (« n'appartient pas à »), \subset (« est inclus dans ») et $\not\subset$ (« n'est pas inclus dans »), \cap (« intersection »), \cup (« union »), la différence ensembliste \setminus ;
- les ensembles de nombres $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$;
- les lois (addition, multiplication, etc.) ou relations ($=, <, \leq$, etc.) dont ces ensembles sont munis.

Exemple (Reformulation d'une assertion)

En arithmétique, la phrase « Tout multiple entier naturel de 4 est pair. » est une assertion, que l'on peut prouver facilement, et reformuler ainsi :

- « Tout multiple entier naturel de 4 est multiple de 2. »
- $\forall n \in \mathbb{N}, (4|n) \Rightarrow (2|n)$.
- $4\mathbb{N} \subset 2\mathbb{N}$.

i

1.2. LES CONNECTEURS LOGIQUES

1.2.1. *Définitions.* Dans la suite, les lettres A, B, \dots désignent des *variables propositionnelles*, c'est-à-dire des assertions qui prennent librement les valeurs 0 et 1 (signifiant respectivement « faux » et « vrai »). Elles nous permettent de donner les *tables de vérité* des connecteurs logiques et, partant, de définir ces derniers.

Définition (Connecteurs logiques)

A	$\neg A$
0	1
1	0

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1

1.b

Exemple (Construction de nouvelles assertions)

Les connecteurs logiques, les variables propositionnelles et les parenthèses permettent de construire de nouvelles assertions. Par exemple, la phrase « $(A \vee B) \wedge C$ » est une assertion dont la valeur de vérité dépend de celles des variables A , B et C . Le tableau de vérité de cette assertion est

A	B	C	$(A \vee B) \wedge C$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

ii

Exercice (Construire une table de vérité)

Donner le tableau de vérité de $(\neg A) \vee B$. Qu'observez-vous ?

1

Mise en garde sur les connecteurs logiques

L'emploi de ces symboles n'a rien d'obligatoire, et est même *déconseillé*, tant ils sont souvent très mal employés, *surtout le symbole d'implication*. D'une manière générale, il vaut mieux éviter le formalisme radical, plutôt indigeste à lire : n'oubliez pas que vous vous adressez à un humain !

1.2

1.2.2. Assertions logiquement équivalentes.

Définition (Assertions logiquement équivalentes)

Deux assertions p et q ayant les mêmes tables de vérité (et les mêmes variables propositionnelles) sont dites *logiquement équivalentes*. On note alors ce fait $p \equiv q$.

1.c

Exemple (Loi du tiers-exclu)

Les assertions A et $\neg(\neg A)$ sont logiquement équivalentes. Cette propriété est appelée *loi du tiers-exclu*.

iii

Exercice (Assertions logiquement équivalentes)

Montrer que les assertions $(A \vee B) \wedge C$ et $(A \wedge C) \vee (B \wedge C)$ sont également logiquement équivalentes. On dit qu'il y a *distributivité* du « et logique » par rapport au « ou logique ». Y a-t-il distributivité du « ou logique » par rapport au « et logique » ?

2

Assertions logiquement équivalentes

Concrètement, des assertions logiquement équivalentes peuvent se substituer l'une à l'autre, elle ne diffèrent que par la forme (la *syntaxe*) et non la signification (la *sémantique*). Cela permet parfois d'effectuer des simplifications ou des manipulations algébriques sur une assertion donnée. Par exemple, on pourra simplifier $\neg(\neg A)$ en A sans crainte dans une assertion.

1.3

Importance du parenthésage

J'ai spontanément ajouté des parenthèses dans certaines assertions, telles que $(A \vee B) \wedge C$. La raison en est simple : l'écriture sans parenthèses $A \vee B \wedge C$ est ambiguë, car elle peut tout aussi bien signifier $(A \vee B) \wedge C$ que $A \vee (B \wedge C)$. Cette ambiguïté serait supportable si ces deux assertions étaient logiquement équivalentes, mais il est facile de constater qu'elles ne le sont pas, comme on peut le constater en considérant le cas suivant :

1.4

1.2.3. *Le symbole d'équivalence.* C'est peut-être le symbole le plus simple : il exprime l'équivalence logique entre deux assertions. L'expression « $p \Leftrightarrow q$ est vraie » signifie que p et q sont logiquement équivalentes. L'assertion $(\neg(\neg A)) \Leftrightarrow A$ est donc toujours vraie, peu importe la valeur de vérité de A (on dit que cette assertion est une *tautologie*). Nous ne donnerons pas toutes les tautologies classiques, de peur de lasser le lecteur, mais nous en verrons certaines en TD, voir l'exercice 4.

Équivalence et reformulation

Cette notion d'équivalence est bien sûr liée à celle de reformulation, puisque, lorsque B est une reformulation de A , l'assertion $A \Leftrightarrow B$ est vraie. Cependant, la notion de reformulation n'a pas la précision et l'universalité de l'équivalence. Considérons par exemple les deux assertions $p : e^{i\pi} = -1$ et $q : \text{« la fonction cube est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ »}$. Ces deux assertions sont vraies : en examinant le tableau de vérité du symbole d'équivalence, on peut donc affirmer que : $p \Leftrightarrow q$ (ou que $p \Leftrightarrow q$ est vraie). Pourtant, il ne viendrait pas à l'idée de prétendre que p soit une reformulation de q . Nous touchons là un point important, que nous reverrons dans le cas du symbole d'implication, voir la remarque 1.12

1.5

1.2.4. *Le symbole de négation.*

Définition (Assertion contraire)

L'assertion $\neg A$ s'appelle l'*assertion contraire* ou *négation* de A

1.d

Sur l'assertion contraire

$\neg A$ s'appelle assertion contraire de A , mais elle n'en est ni l'assertion opposée, ni l'assertion inverse. En fait, ces adjectifs seront bien employés plus tard, mais ne s'appliqueront pas à des assertions, et auront un sens tout à fait différent.

Soit par exemple un réel x . L'assertion $x = 2$ a pour contraire^a $x \neq 2$, ou, puisque x est supposé réel, $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. L'assertion $x = -2$ n'est absolument pas le contraire de $x = 2$.

De même, et c'est un peu plus subtil, si f est une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , le contraire de l'assertion « f est croissante » n'est absolument pas « f est décroissante » mais « f n'est pas croissante ». D'ailleurs, une fonction peut très bien être à la fois croissante et décroissante.

Nous verrons également en topologie qu'être fermé n'est pas le contraire d'être ouvert, qu'un ensemble peut très bien être ouvert et fermé, ou n'être ni l'un ni l'autre.

De nombreuses erreurs de rédaction proviennent de ce genre de confusions.

^a. son assertion contraire est $\neg(x = 2)$ au sens strict, mais on s'est permis de la reformuler.

1.6

1.2.5. *La conjonction et la disjonction.* Le symbole de conjonction « \wedge » ne pose pas de problème, puisqu'il a le même sens que dans le langage courant. Intéressons-nous plutôt au symbole de disjonction :

Ou logique et ou usuel

En français courant, l'emploi de la disjonction « ou » indique implicitement une incompatibilité. Si par exemple au restaurant on vous demande « Fromage ou dessert ? », vous devrez choisir entre fromage et dessert, excluant ainsi l'autre possibilité : vous ne pourrez pas prendre des deux. En mathématiques et en logique en revanche, l'assertion $A \vee B$ est vraie si A et B le sont toutes les deux : on dit que le « ou logique » est *inclusif* (et le « ou usuel » est généralement *exclusif*). Si on veut utiliser « ou » au sens commun en mathématiques^a, il faudra le préciser expressément, ou alors employer la construction « Soit ..., soit ... ».

On peut comprendre ce parti-pris inclusif en observant que les symboles « \vee » et « \wedge » sont *duaux par négation* en certain sens, voir 1.21 et les lois de Morgan. Nous comprendrons mieux ce parti-pris du ou inclusif en 1.6 et 1.10.

^a. c'est peu fréquent

1.7

Exercice (Construction du XOR)

Proposer une assertion, construite avec les connecteurs logiques cités, dépendant de A et B , dont le tableau de vérité est celui du ou exclusif XOR.

3

Exercice (Le ou logique à partir de la négation et de la conjonction)

Trouver une assertion logiquement équivalente à $A \vee B$ en utilisant seulement les symboles A , B , \wedge , \neg et les parenthèses.

4

1.2.6. *L'implication.* C'est de loin le symbole le moins bien employé.

Tableau de vérité de l'implication

Essayons de comprendre comment le tableau de vérité de l'implication est construit : l'implication $A \Rightarrow B$ se lit « si A , alors B », soit encore, « si A est vraie, alors B l'est également ». Nous déduisons de cette implication une information sur B dans le seul cas où A est vraie, cette information étant que B est également vraie. Nous n'avons aucune information sur B lorsque A est fausse. Ceci explique que, lorsque A est fausse, tout soit possible pour B : B peut être vraie comme fausse, nous devons accepter que $A \Rightarrow B$ soit vraie dès que A est fausse !

Prenons un exemple concret. Soit x un réel. L'assertion « Si $x \geq 3$, alors $x \geq 0$ » est clairement vraie : pour $x = 1$ (resp. $x = -1$) en particulier, cela illustre le fait que le faux entraîne le vrai (resp. le faux).

1.8

Reformulations de l'implication

Pour exprimer une implication $A \Rightarrow B$, on dit indifféremment (outre « Si A , alors B ») que

- A implique (ou entraîne) B ;
- B est une *condition nécessaire* de A ;
- A est une *condition suffisante* de B ;
- Pour que B soit vraie, il suffit que A le soit ;
- Pour que A soit vraie, il faut que B le soit.

À l'exercice 4, nous avons vu également une reformulation formelle de $A \Rightarrow B$, à savoir $(\neg A) \vee B$. Il faut aussi savoir que l'implication $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$, appelée *contraposée* (ou *contraposition*) de $A \Rightarrow B$, est logiquement équivalente à cette dernière.

1.9

Définition (Réciproque d'une implication)

L'*implication réciproque* de $A \Rightarrow B$ est $B \Rightarrow A$.

1.e

Exercice (Implication, réciproque, équivalence)

Donner les tableaux de vérité de $A \Rightarrow B$, de $B \Rightarrow A$, de $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ et de $A \Leftrightarrow B$. Que remarquez-vous ?

5

Implication et réciproque

Attention ! Il ne faut surtout pas confondre une implication et sa réciproque ^a : elles ne sont pas du tout logiquement équivalentes. Proposez des valeurs de vérité pour A et B pour lesquelles $A \Rightarrow B$ est fausse, et $B \Rightarrow A$ est vraie.

1.10

^a. ni d'ailleurs contraposée et réciproque.

Exemple (Implication à sens unique)

Soit x un réel. Notons A l'assertion $x = 1$, B l'assertion $x > 0$. Nous ne pouvons pas déterminer si A et B sont vraies ou fausses (puisque x n'est pas suffisamment précisé), mais nous pouvons affirmer que A entraîne B , ou encore que A est une condition suffisante pour que B soit vraie. Cependant, la réciproque est fautive, car si par exemple $x = 2$, B est vraie sans que A le soit.

Voici d'autres exemples d'implications à « sens unique » :

- Étant donné un réel x , $(x = 2) \Rightarrow (x^2 = 4)$ ^a;
- $(A \wedge B) \Rightarrow (A \vee B)$;

^a. si x est plus précisément supposé réel positif, alors on a l'équivalence.

iv

Exercice (Implications à sens unique)

Trouver des exemples d'implications à sens unique.

6

Reformulations de l'équivalence

D'après ce qui précède, pour exprimer une équivalence $A \Leftrightarrow B$, on dit indifféremment que

- B est vraie si et seulement si A l'est ;
- B est une condition nécessaire et suffisante de A ;
- Pour que A soit vraie, il faut et il suffit que B le soit.

1.11

Implication et causalité

De même que l'on ne peut pas confondre l'équivalence logique « \Leftrightarrow » et la reformulation (voir 1.5), il convient de distinguer entre l'implication « \Rightarrow » et la *causalité*. Soit x un réel. Si pour l'implication $(x = 2) \Rightarrow (x^2 = 4)$ (clairement vérifiée), on peut affirmer que $x = 2$ est cause de ce que $x^2 = 4$, ou que $x^2 = 4$ est conséquence de ce que $x = 2$, on n'emploierait pas ces expressions pour l'implication $(x = 2) \Rightarrow (\sin^2 + \cos^2 = 1)$, qui est pourtant également vérifiée.

N'oubliez pas que la rédaction mathématique consiste en grande partie à faire comprendre le cheminement de votre pensée au lecteur. À ce titre, les phrases exprimant la causalité valent bien mieux qu'une suite d'implications logiques.

1.12

Causalité et reformulation

Bien entendu, il ne faut pas confondre implication et équivalence. Dans le même ordre d'idée, vous ne devez pas confondre la causalité et la reformulation : la seconde garantit la *conservation de l'information*, tandis que la première peut ^a induire une *perte d'information*. Considérons par exemple un entier naturel n . Si par exemple $n = 5$, alors il existe des entiers tous deux non nuls p et q tels que

$$n^2 = p^2 + q^2$$

(les choix $p = 3$ et $q = 4$ conviennent en effet).

En termes formels, on a donc :

$$(n = 5) \Rightarrow (\exists(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2, n^2 = p^2 + q^2).$$

Savoir que $n = 5$ fournit une information intéressante (le carré de n est somme de deux carrés d'entiers tous deux non nuls). Cependant, le fait de savoir qu'il existe de tels entiers ne permet pas d'affirmer que $n = 5$, puisque par exemple 13 vérifie aussi cette propriété ($13^2 = 12^2 + 5^2$).

Il est très important en mathématiques de prendre conscience de ces pertes ou conservations de l'information. La phase de résolution d'un exercice s'en retrouve facilitée.

^a. il se peut qu'après examen, l'implication soit une équivalence.

1.13

Implication et donc

Dans de nombreuses copies, on trouve souvent le symbole \Rightarrow employé dans le sens de « donc ». C'est une grave erreur. Tout d'abord, « donc » exprime une causalité, et non seulement une implication au sens logique : vous ne diriez pas « $x = 3$ donc la fonction cosinus est dérivable sur \mathbb{R} ». Toutefois, là n'est pas l'essentiel.

La grande différence entre les phrases « Si A , alors B » et « A , donc B » provient du fait que dans le premier cas, vous ne savez absolument pas si A (ou B) est vraie, vous savez seulement que si d'aventure A l'est (ce qui n'est pas garanti), alors B l'est également. Dans la phrase « A , donc B » en revanche, vous exprimez d'abord que A est vrai (c'est établi), et vous en déduisez que B l'est également.

1.14

1.3. LES QUANTIFICATEURS

L'emploi des quantificateurs est relativement délicat. Il est toutefois essentiel de les avoir rencontrés avant de passer les concours, notamment pour la concision qu'ils peuvent apporter. De plus, ils donnent un moyen mécanique d'écrire la négation d'une assertion (voir la méthode 1.21).

1.3.1. *Symbole universel*. Le quantificateur logique \forall se lit « pour tout », ou « quel que soit », $\forall n$ signifie que l'on considère tous les n satisfaisant les conditions demandées. Il permet de créer une conjonction d'un nombre arbitraire d'assertions.

Exemple (Lecture du symbole universel)

L'expression « $\forall n \in \mathbb{N}$ » indique que l'on considère tous les éléments de \mathbb{N} , ou encore que n désigne un entier naturel quelconque : aucune information –autre que son appartenance à \mathbb{N} – n'est connue sur n . L'assertion (clairement vraie)

$$\forall n \in \mathbb{N}, (4|n) \Rightarrow (2|n),$$

se lit d'abord « Pour tout entier naturel n , si 4 divise n , alors 2 divise n », puis par exemple « Tout entier naturel n divisible par 4 est divisible par 2 ». En fait, on se rend compte qu'il n'est pas nécessaire de nommer l'entier naturel dont on parle, de sorte qu'une reformulation possible de l'assertion initiale est « Tout entier naturel multiple de 4 est pair », ce qui est quand même beaucoup plus fluide. Il vous faudra apprendre à passer ainsi du registre formel au registre français, notamment en colles.

v

Symbole universel et conjonction

En définitive, le symbole universel permet d'exprimer une conjonction d'assertions. Par exemple l'assertion

$$\forall n \in \mathbb{N}, n = (\sqrt{n})^2,$$

signifie que l'assertion $n = (\sqrt{n})^2$ est vraie pour tout entier naturel n : pour 0, pour 1, pour 2, etc.

1.15

Symbole universel et implication

Revenons à l'assertion

$$\forall n \in \mathbb{N}, (4|n) \Rightarrow (2|n),$$

qui est comme on l'a indiqué clairement vraie. D'après la remarque précédente, cela signifie qu'une conjonction d'implications est vraie, *i.e.* que chacune d'entre elles l'est : l'assertion $(4|n) \Rightarrow (2|n)$ est vraie pour $n = 0$, $n = 1$, etc.

En particulier, voyons ce que cela donne lorsque n vaut 1 puis 2 :

- Si 1 est divisible par 4, alors 1 est pair ;
- Si 2 est divisible par 4, alors 2 est pair.

En admettant ces assertions, on comprend pourquoi le faux entraîne le faux, et le faux entraîne le vrai.

1.16

1.3.2. *Symbole existentiel.* Le quantificateur logique \exists se lit « il existe », et « $\exists x$, blabla » annonce l'existence d'au moins un x (peut-être plusieurs) tel que « blabla ».

Exemple (Utilisation du symbole existentiel)

L'assertion « $\exists x \in \mathbb{R}, x > 0$ » se lit « Il existe (au moins) un réel qui soit strictement positif » : elle est vraie.

vi

L'expression $\exists!$ impose de plus l'unicité, et $\exists!x$ annonce l'existence et l'unicité d'un x : par exemple, $\exists!x \in \mathbb{R}, x > 0$ est fausse, car il existe plusieurs réels strictement positifs.

Symbole d'existence et d'unicité

L'expression « $\exists!$ » ne sera pour ainsi dire jamais employée en cours d'année. Cependant, l'ajout de l'unicité à une existence déjà établie sera très importante dans la construction du cours et dans les exercices, car un résultat d'existence *et* d'unicité permet la *définition* d'un objet mathématique.

1.17

Exemple (Utilisation d'un résultat d'existence et d'unicité)

Cherchons à définir la fonction cosinus en supposant la fonction sinus déjà construite : la fonction cosinus est

- (1) la dérivée de la fonction sinus ;
- (2) une primitive de l'opposée de la fonction sinus ;
- (3) une fonction solution de l'équation fonctionnelle $f^2 + \sin^2 = 1$ d'inconnue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$;
- (4) la fonction $\sin \circ t$, où t est l'application envoyant tout réel x sur $x + \frac{\pi}{2}$.

Parmi ces propriétés de la fonction cosinus, quelles sont celles qui permettent de définir la fonction cosinus ? Toutes celles qui comprennent en elles, outre un résultat d'existence, un résultat d'unicité, c'est-à-dire la première et la dernière. La fonction cosinus n'est pas l'unique primitive de la fonction $-\sin$, et elle n'est pas non plus l'unique solution de l'équation fonctionnelle mentionnée. D'ailleurs, cette unicité (ou son absence) se traduit grammaticalement : j'ai employé tantôt l'article *défini* « la » (résultat d'unicité), tantôt l'article indéfini « une » (pas d'unicité *a priori*).

vii

Importance de l'unicité

Un résultat d'existence et d'unicité permet d'introduire une définition, c'est entendu. En quoi l'unicité, si elle venait à manquer, nous gênerait-elle ? Tout simplement, nous ne saurions pas précisément de quoi nous parlerions. Par exemple, il existe au moins un réel strictement positif : soit x un tel réel. Que dire de l'assertion $x = 5$? Pas grand chose, puisqu'elle peut très bien être vraie comme fausse ...

1.18

Existence et unicité

L'existence (resp. l'unicité) d'un élément x d'un ensemble Ω vérifiant la proposition $\mathcal{R}(x)$ affirme qu'il existe au moins (resp. au plus) un tel élément. Une affirmation d'existence et d'unicité affirme donc qu'il existe un et un seul tel élément.

1.19

Importance du sens de lecture

Bien sûr, une assertion se lit de gauche à droite. Que se passe-t-il si on change perturbe l'ordre d'apparition des quantificateurs? Cela peut radicalement changer le sens et la valeur de vérité de l'assertion. Par exemple, l'assertion

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y < x$$

est vraie, mais

$$\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y < x$$

est fausse : dans le premier cas, on affirme l'existence, pour tout réel x *préalablement fixé*, d'un réel y (dépendant *a priori* de x) qui lui soit strictement inférieur. Dans le second, on affirme l'existence d'un réel y , *que l'on peut se donner indépendamment de x* , strictement inférieur à tout réel x . Il faut donc exclure la permutation des quantificateurs \exists et \forall . En revanche, deux quantificateurs de même type et consécutifs peuvent s'échanger librement : les assertions $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \geq 0$ et $\forall y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \geq 0$ sont rigoureusement équivalentes, et peuvent d'ailleurs se reformuler sous la forme $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \geq 0$, ou encore ^a, $\forall x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \geq 0$

a. certains n'acceptent pas cette syntaxe un peu relâchée.

1.20

1.4. SAVOIR ÉCRIRE LA NÉGATION D'UNE ASSERTION

Pour écrire la négation d'une assertion formelle p , il suffit d'écrire $\neg p$. Certes, mais encore? Comment nier efficacement une assertion formelle? Les règles à suivre sont très simples :

Méthode (Écriture formelle d'une négation)

- (1) On ne change rien à l'ordre des symboles ;
- (2) $(\neg(\forall x \in \Omega, A(x))) \equiv (\exists x \in \Omega, \neg A(x))$;
- (3) $(\neg(\exists x \in \Omega, A(x))) \equiv (\forall x \in \Omega, \neg A(x))$;
- (4) $(\neg(A \wedge B)) \equiv ((\neg A) \vee (\neg B))$;
- (5) $(\neg(A \vee B)) \equiv ((\neg A) \wedge (\neg B))$.

1.21

Exemple (Négation d'une assertion formelle)

Soit x un nombre réel. Le contraire de l'assertion $-2 \leq x < 3$ est $((x < -2) \vee (3 \leq x))$.

viii

Exemple (Négation d'une implication)

La négation formelle de l'implication $p \Rightarrow q$ peut s'écrire $p \wedge (\neg q)$, ce qui peut se lire « p et *pourtant* non q ».

ix

Exercice (Négation d'une assertion formelle)

Quel est le contraire de $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{Z}, y \leq x < y + 1$?

7

Négation d'un résultat d'existence et d'unicité

La négation d'un résultat d'existence et d'unicité est relativement compliquée. Elle s'écrit en exprimant le fait que l'existence *ou* l'unicité tombe en défaut.

1.22

Exercice (Négation d'un résultat d'existence et d'unicité)

Quel est le contraire de $\forall x \in \mathbb{R}, \exists! y \in \mathbb{Z}, y \leq x < y + 1$?

8

2. QUELQUES PRINCIPES DE DÉMONSTRATION

2.1. LA DÉMONSTRATION PAR L'ABSURDE

La démonstration par l'absurde, consiste, pour prouver une assertion p , à montrer que supposer $\neg p$ conduit à une contradiction, *i.e.* à montrer que $\neg p$ est fautive : d'après le principe du tiers-exclu, p est vraie. Il est donc important de savoir nier une assertion donnée, voir 1.21.

Exercice (Une preuve historique par l'absurde)

Voir l'exercice de TD 7.

9

2.2. MONTRER UNE IMPLICATION

Voici diverses pistes pour démontrer une implication $p \Rightarrow q$:

- (1) Démonstration directe : « Supposons p ... Ainsi, q est vérifiée » ;
- (2) Démonstration par contraposition : « Supposons $\neg q$... Ainsi, $\neg p$ est vérifiée » ;
- (3) Démonstration par l'absurde : « Supposons p et (pourtant) $\neg q$... Ceci est absurde, on a donc bien $p \Rightarrow q$ ».

Ne pas partir de ce que l'on veut montrer

Attention ! Lorsque vous voulez démontrer l'implication $p \Rightarrow q$, vous pouvez supposer p , supposer $\neg q$, voire supposer ces deux assertions, mais ne supposez jamais q , que vous devez montrer sachant p . Cette erreur est incompréhensible et pourtant fréquente.

2.1

Chaîne d'implications

Comment remplacer les pointillés ? On effectue une suite de conclusions successives, en partant par exemple de p pour arriver à la conclusion q . De manière sous-jacente, la règle de logique employée est celle du *syllogisme*.

2.2

Implication et absurde

Pourquoi aimez-vous les démonstrations par l'absurde ? Tout simplement parce que vos hypothèses de départ sont plus fortes (vous supposez p et $\neg q$) que dans les autres types de démonstrations. Cependant, la démonstration par l'absurde n'est pas un passage obligé, et vous pouvez vous entraîner à ne pas l'employer pour rendre votre rédaction plus élégante.

2.3

2.3. MONTRER QU'UNE IMPLICATION EST FAUSSE

Comme nous l'avons vu précédemment, pour montrer qu'une implication $A \Rightarrow B$ est fautive, on montre que A est vraie et B pourtant fautive.

Rupture de chaîne d'implications

Attention ! Supposons que vous ayez montré, dans un certain contexte (par exemple x réel) une implication $A \Rightarrow B$ à partir d'une suite d'implications $A \Rightarrow A_1$, $A_1 \Rightarrow A_2$, ..., $A_n \Rightarrow B$. Supposons maintenant que le contexte change (par exemple que x soit désormais complexe), et que l'une des implications de la chaîne tombe en défaut. Que peut-on en déduire sur l'implication de départ $A \Rightarrow B$: rigoureusement rien ! En effet, le raisonnement que vous avez tenu dans le cas réel n'est plus valide dans le cas complexe, mais rien ne dit qu'il n'existe pas de raisonnement alternatif permettant néanmoins de contourner l'obstacle. On peut comparer une suite d'implications à un chemin ^a : si le chemin que vous aviez trouvé pour aller de A à B est maintenant obstrué, rien ne dit qu'il n'en existe pas un autre. Trouvez un exemple d'implication valable dans un contexte réel, puis dans un contexte x complexe, mais en utilisant d'arguments différents.

2.4

^a. à sens unique, on ne peut pas « remonter le courant »

Invalidité de preuve

On peut résumer et étendre la remarque précédente sous la morale suivante : « une invalidité de preuve n'est pas une preuve d'invalidité ».

2.5

2.4. MONTRER UNE ÉQUIVALENCE

Méthode (Montrer une équivalence)

Pour montrer une équivalence, on peut :

- procéder par double implication : on montre une implication et sa réciproque ;
- procéder en raisonnant par équivalences.

2.6

Rupture de chaîne d'équivalences

On peut comparer une suite d'équivalences comme un chemin que l'on parcourt librement, dans un sens comme dans l'autre. Comme pour une chaîne d'implications, une rupture de chaîne de plusieurs équivalences ne permet pas de dire que l'équivalence initiale tombe en défaut. Cependant, et c'est un peu subtil, dans le cas où une équivalence et une seule est fautive, on peut affirmer que l'équivalence initiale est fautive.

2.7

Démonstration d'équivalence entre plusieurs assertions

Si vous voulez montrer l'équivalence entre plusieurs assertions, mettons entre les trois assertions A, B, C pour fixer les idées, vous pouvez procéder par implications cycliques, par exemple en prouvant les trois implications $A \Rightarrow B, B \Rightarrow C, C \Rightarrow A$.

2.8

Négation d'une équivalence

Montrer qu'une équivalence est fautive revient à montrer que l'une (au moins) des deux implications qui la forment tombe en défaut. Il se peut fort bien que l'une des implications soit vraie.

2.9

2.5. MONTRER UN RÉSULTAT UNIVERSEL

Méthode (Montrer un résultat universel)

Pour montrer un résultat universel du type $\forall x \in \Omega, \mathcal{R}(x)$, on procède

- Par sens direct : « Soit x un élément (quelconque) de Ω . On a donc bla bla bla ... L'élément x de Ω , (arbitrairement choisi), vérifie donc $\mathcal{R}(x)$ ». Il faut bien comprendre que x désigne un élément « générique » de Ω , il n'est pas question d'en choisir un en particulier.
- Par l'absurde : « Supposons l'existence d'un élément x de Ω tel que $\neg(\mathcal{R}(x))$. On a alors ... Ceci est absurde : tout élément x de Ω vérifie $\mathcal{R}(x)$ ».

2.10

2.6. MONTRER UN RÉSULTAT EXISTENTIEL

Pour montrer un résultat existentiel $\exists x \in \Omega, \mathcal{R}(x)$, on procède le plus souvent en exhibant un élément pertinent de Ω : « L'élément $x_0 = \dots$ de Ω vérifie $\mathcal{R}(x)$ ». On a ici déterminé explicitement un x_0 convenable. On dit que cette preuve d'existence est *constructive*.

Résultat d'existence implicite

Il arrive parfois qu'on montre un résultat d'existence sans expliciter un élément convenable, mais en utilisant un argument transversal. Nous verrons de nombreux résultats dans le cours affirmant une existence de manière non constructive (théorèmes des valeurs intermédiaires, de la base incomplète, de Bolzano-Weierstrass, etc.). On peut en voir un exemple (un peu anecdotique) dans l'exercice 9

2.11

Négation d'un résultat universel

Pour montrer qu'un résultat universel $\forall x \in \Omega, \mathcal{R}(x)$ tombe en défaut, nous exhiberons donc souvent un contre-exemple $x_0 \in \Omega$ (tel que $\neg(\mathcal{R}(x_0))$).

2.12

2.7. MONTRER UN RÉSULTAT D'UNICITÉ

Outre des arguments beaucoup trop sophistiqués pour nous pour l'instant, un résultat d'unicité « il existe au plus un $x \in \Omega$ tel que $\mathcal{R}(x)$ » se montre souvent de la manière suivante : « Soit x et x' , éléments de Ω , tels que $\mathcal{R}(x)$ et $\mathcal{R}(x')$. On a alors ... Finalement, $x = x'$. », qui admet la variante (par l'absurde) : « Soit x et x' deux éléments *distincts* de Ω , tels que $\mathcal{R}(x)$ et $\mathcal{R}(x')$. On a alors ... Ceci est absurde. »

2.8. MONTRER UN RÉSULTAT D'EXISTENCE ET D'UNICITÉ

Pour montrer l'existence et l'unicité, on peut raisonner par équivalence pour trouver un unique x_0 convenable, ou prouver séparément existence et unicité. Dans ce dernier cas, on peut commencer par étudier l'unicité : en travaillant sur les contraintes imposées à un tel x , on peut arriver à un unique candidat convenable et explicite x_0 . La phase d'existence s'en trouve grandement simplifiée, puisqu'il suffit alors de vérifier que ce candidat x_0 (explicite) vérifie bien les contraintes imposées. On dit que l'on a effectué un *raisonnement par analyse-synthèse*.

Importance de la synthèse

Attention ! La phase de synthèse, bien que souvent facile, est essentielle dans ce type de raisonnement. En effet, un résultat d'unicité n'impose aucunement l'existence. Prenons un exemple très simple : cherchons les réels x tels que $((x = 2) \wedge (x < 0))$. Dans une première phase d'analyse, on suppose disposer d'au moins un x convenable, et on trouve une seule valeur possible pour x (ici, la valeur 2) : on peut dire qu'il y a unicité, ou « unicité en cas d'existence ». Dans la phase de synthèse, on teste le candidat trouvé : dans cet exemple, 2 ne vérifie pas l'assertion de départ. **C'est pourquoi, même quand la synthèse est évidente, on prendra garde à bien la faire figurer dans sa rédaction.**

2.13

Généralisation du raisonnement par analyse-synthèse

On peut généraliser le raisonnement par analyse-synthèse de la manière suivante : on cherche à décrire l'ensemble $\{x \in \Omega, \mathcal{R}(x)\}$. Dans une phase d'analyse, on commence par prendre un tel x , puis à cerner, à force de déductions, la ou les valeurs possibles de x . Dans la phase de synthèse, on vérifie quelles valeurs, parmi celles imposées par la phase d'analyse, vérifient bien $\mathcal{R}(x)$.

2.14

Exercice (Raisonnement par analyse synthèse)

Résoudre le système d'inconnue complexe $x : (x^2 + x + 1 = 0) \wedge (x^2 + 2x + 2 = 0)$.
Même question avec le système $(x^2 - 2x = 0) \wedge (x^2 + 2x - 8 = 0)$.

10

3. FEUILLE DE TD 1 : LOGIQUE

3.1. LOGIQUE

Exercice 1 (Valeur de vérité)

0

Donner, lorsque cela est possible, la valeur de vérité des assertions suivantes :

- (1) $(4 = 2 + 2) \wedge (4 = 2 + 1)$;
- (2) $(4 = 2 + 2) \vee (4 = 2 + 1)$;
- (3) $(4 = 2 + 2) \vee (4 = 3 + 1)$;
- (4) $(4 = 2 + 2) \Rightarrow (4 = 2 + 1)$;
- (5) $(4 = 2 + 1) \Rightarrow (4 = 3 + 1)$;
- (6) $(4 = 2 + 1) \Rightarrow (4 = 1 + 1)$;
- (7) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 0$;
- (8) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \exists z \in \mathbb{R}, ((x < z < y) \vee (y < z < x))$;
- (9) $\forall x \in \mathbb{R}, ((x^2 \geq 1) \Rightarrow (x \geq 1))$;
- (10) La fonction inverse de \mathbb{R}^* dans \mathbb{R}^* est décroissante.

Exercice 2 (Reformulations formelles et négations)

0

Soit f une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Écrire dans le langage formel (le cas échéant), puis donner la négation (améliorée) de chacune des assertions suivantes

- (1) f est croissante ;
- (2) f est strictement monotone ;
- (3) f s'annule au moins une fois ;
- (4) f s'annule au moins deux fois ;
- (5) f est constante ;
- (6) f est minorée ;
- (7) $\forall M \in \mathbb{R}, \exists t_0 \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, ((t \geq t_0) \Rightarrow (f(t) \geq M))$.

Exercice 3 (Nier l'injectivité)

0

1 Soient R et S des assertions. Donner la négation de $R \Rightarrow S$, sans symbole d'implication.

2 Soit $f : E \rightarrow E'$ une application (E et E' étant deux ensembles non vides). L'injectivité de f peut s'exprimer ainsi :

$$\forall x, x' \in E, (f(x) = f(x')) \Rightarrow (x = x'),$$

Exprimer la non injectivité.

Exercice 4 (Quelques tautologies célèbres (et utiles))

0

Montrer que les assertions suivantes sont des tautologies :

- (1) $(\neg(\neg A)) \Leftrightarrow A$ (*principe du tiers-exclu*)
- (2) $(A \wedge A) \Leftrightarrow A$ (*idempotence de la conjonction*)
- (3) $(A \vee A) \Leftrightarrow A$ (*idempotence de la disjonction*)
- (4) $(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)$ (*commutativité de la conjonction*)
- (5) $(A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A)$ (*commutativité de la disjonction*)
- (6) $(A \wedge (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \wedge C)$ (*associativité de la conjonction*)
- (7) $(A \vee (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \vee C)$ (*associativité de la disjonction*)
- (8) $(\neg(A \vee B)) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$, $(\neg(A \wedge B)) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$ (*lois de Morgan*)
- (9) $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$ (*règle du modus ponens*)
- (10) $((A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C)))$ (*distributivité de la conjonction par rapport à la disjonction*)
- (11) $((A \vee (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C)))$ (*distributivité de la disjonction par rapport à la conjonction*)
- (12) $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ (*sylogisme*)
- (13) $((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \vee B) \Rightarrow C)$ (*disjonction des cas*)
- (14) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\neg A) \vee B) \Leftrightarrow ((\neg B) \Rightarrow (\neg A)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \Leftrightarrow A) \Leftrightarrow ((A \vee B) \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (\neg(A \wedge (\neg B)))$
- (15) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (((\neg A) \vee B) \wedge ((\neg B) \vee A)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee ((\neg A) \wedge (\neg B)))$

Exercice 5 (Tous non nuls et non tous nuls)

2

Soient x_1, \dots, x_n des nombres réels, où $n \geq 2$. Traduire en langage formel les deux assertions suivantes : « Les nombres x_1, \dots, x_n sont non tous nuls », « Les nombres x_1, \dots, x_n sont tous non nuls ».

Dans le cas où $n = 2$, trouver des formules mathématiques (sans connecteurs) équivalentes à ces assertions. Trouver de telles formules si x_1 et x_2 sont supposés complexes.

Exercice 6 (Valeur de vérité et négation)

3

Donner la valeur de vérité et la négation des assertions suivantes :

- (a) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$; (b) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y > 0$;
 (c) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$; (d) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y^2 > x$.

3.2. PRINCIPES DE DÉMONSTRATION

Exercice 7 (Irrationalité de $\sqrt{2}$)

1

Montrer l'irrationalité de $\sqrt{2}$. On pourra raisonner par l'absurde, en supposant pouvoir écrire $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, où p et q sont des entiers premiers entre eux (q non nul).

Exercice 8 (Raisonnement par analyse-synthèse)

2

En effectuant un raisonnement par analyse-synthèse, résoudre les systèmes d'inconnues réelles x, y, z :

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 2z = -1 \\ 2x + y + 3z = -3 \\ 2x - 3y + z = -3 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 2z = -1 \\ 2x + y + 3z = -3 \\ 3x - y + 4z = -2 \end{cases}$$

Exercice 9 (Exemple astucieux de disjonction des cas)

2 et 5

En utilisant l'éventuel caractère rationnel du nombre réel $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, montrer qu'il existe un nombre irrationnel x tel que $x^{\sqrt{2}}$ soit rationnel.

Ensembles, relations binaires, applications

Sommaire

1. Notions ensemblistes	27
1.1. Ensembles, éléments, parties	27
1.2. Création d'ensembles à partir de deux ensembles	29
2. Relations binaires	31
2.1. Premières définitions	31
2.2. Relations d'ordre	34
3. Généralités sur les applications	37
3.1. Applications : définition et premiers exemples	37
3.2. Composition des applications	38
3.3. Injectivité, surjectivité	39
3.4. Image directe d'une partie	40
3.5. Image réciproque d'une partie	41
3.6. Ordre et applications	42
4. Familles	43
5. Nombres entiers naturels	45
5.1. Propriétés fondamentales	45
5.2. Raisonnement par récurrence	47
5.3. Suite définie par une récurrence et une condition initiale	49
6. Feuille de TD 2 : Ensembles, relations binaires, applications	50
6.1. Ensembles	50
6.2. Relations binaires	50
6.3. Généralités sur les applications	51
6.4. Raisonnement par récurrence	53

1. NOTIONS ENSEMBLISTES

1.1. ENSEMBLES, ÉLÉMENTS, PARTIES

Nous considérons la notion d'ensemble comme *première*, c'est-à-dire que l'on ne va pas chercher à la définir. Un ensemble est une collection d'objets, qui sont appelés *éléments* de l'ensemble. Si un objet x est un élément d'un ensemble X , on dit que x *appartient* à X , ou que X *possède* (ou *comprend*, ou, mais c'est une mauvaise habitude, *contient*) x , et on note : $x \in X$.

Si x n'appartient pas à X , on note : $x \notin X$.

Nous dirons que deux ensembles X et X' sont *égaux*, et on notera $X = X'$, s'ils ont les mêmes éléments, *i.e.*

$$(\forall x \in X, x \in X') \wedge (\forall x' \in X', x' \in X).$$

Dans le cas contraire, X et X' seront dits *distincts*, et on notera $X \neq X'$.

Étant donné un ensemble X , on peut choisir une sous-collection de ses éléments, ce qui donne un *sous-ensemble* X' de X (on dit aussi *partie* de X). On dit que X' est *inclus dans* X (ou encore que X *contient* X'), et on note : $X' \subset X$.

Dans le cas où une partie Y de X est distincte de X , on dit que Y est une *partie stricte* de X , et on note : $Y \subsetneq X$.

Ainsi, étant donné deux ensembles X et X' , X' est inclus dans X si et seulement si tout élément de X' est élément de X , soit encore :

$$\forall x \in X', x \in X.$$

Si un ensemble X' n'est pas inclus dans un autre X , on note : $X' \not\subset X$.

L'ensemble correspondant à une collection vide, *i.e.* sans élément, est appelé *ensemble vide*, et est noté \emptyset . L'ensemble vide est donc inclus dans n'importe quel ensemble, et cette propriété le caractérise.

Un ensemble constitué d'un seul élément (resp. d'exactly deux éléments) est appelé *singleton* (resp. *paire*).

Ensemble en extension, ensemble en compréhension

On peut décrire un ensemble en *extension*, c'est-à-dire en énumérant ses différents éléments, comme $\{0, 1, -1\}$, qui est également égal à $\{-1, 0, 1\}$ ou à $\{-1, 0, 1, 1, 0, 0, -1, 1\}$, ou en *compréhension*, *i.e.* par une propriété qui caractérise ses éléments. Par exemple, l'ensemble précédent peut aussi s'écrire $\{x \in \mathbb{R}, x^3 = x\}$.

1.1

L'inclusion est une relation d'ordre

Soit X, Y, Z trois ensembles quelconques. Nous avons les propriétés suivantes :

1.2

Élément ou partie

Attention, il ne faut pas confondre l'élément x de X et le sous-ensemble $\{x\}$ de X : la différence se lit déjà dans la formalisation de leur relation à X : « $x \in X$ », mais « $\{x\} \subset X$ ». Elle s'entend aussi dans le registre français : x appartient à X tandis que $\{x\}$ est inclus dans X , X comprend x , X contient $\{x\}$.

1.3

Notation (Ensemble des parties d'un ensemble)

On note $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X .

1.a

Ensemble des parties d'un ensemble

L'ensemble X est maintenant *élément* de l'ensemble $\mathcal{P}(X)$: $X \in \mathcal{P}(X)$. De même, $\emptyset \in \mathcal{P}(X)$.

1.4

Exercice (Parties d'un ensemble)

Décrire en extension $\mathcal{P}(\{0\})$, $\mathcal{P}(\{0, 1\})$.

1

Définition (Ensembles disjoints)

Deux ensembles A et B sont dits *disjoints* s'ils n'ont aucun élément en commun.

1.b

Ensembles disjoints, ensembles distincts

Deux ensembles distincts ne sont pas nécessairement disjoints :

Deux ensembles disjoints sont-ils toujours distincts ?

1.5

1.2. CRÉATION D'ENSEMBLES À PARTIR DE DEUX ENSEMBLES

On se donne deux sous-ensembles A et B d'un ensemble X .

Définition (Union)

On note $A \cup B$ et appelle *union* de A et de B l'ensemble :

$$\{x \in X, ((x \in A) \vee (x \in B))\}.$$

1.c

Ou logique et union

Surtout, ne pas oublier que le « ou logique » (noté \vee) est inclusif en mathématiques. Par exemple, $A \cup A = A$.

1.6

Définition (Intersection)

On note $A \cap B$ et on appelle *intersection* de A et de B l'ensemble :

$$\{x \in X, ((x \in A) \wedge (x \in B))\}.$$

1.d

Union disjointe

Ainsi, deux ensembles A et B sont disjoints si et seulement si $A \cap B = \emptyset$. Si tel est le cas, on dit que $A \cup B$ est la *réunion disjointe* de A et B , et on note cet ensemble $A \sqcup B$.

1.7

Définition (Complémentaire d'une partie dans un ensemble)

On note par $\complement_X A$ (ou \bar{A}), et on appelle *complémentaire* de A dans X l'ensemble :

$$\{x \in X, (x \notin A)\}.$$

1.e

Complémentaire d'une partie dans un ensemble

La notion de complémentaire fait intervenir deux ensembles : un ensemble X et une de ses parties A . Si vous changez l'ensemble contenant X , vous allez aussi changer le complémentaire. C'est pourquoi la notion \bar{A} ne s'emploie que si l'ensemble X dans lequel on prend le complémentaire a été précisé préalablement.

1.8

Définition (Différence ensembliste)

On note par $B \setminus A$ (ou $B - A$), et on appelle *différence (ensembliste)* de B par A l'ensemble :

$$\{x \in X, ((x \in B) \wedge (x \notin A))\}.$$

1.f

Exercice (Différence ensembliste)

Pour $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{0, 2, 4\}$, donner $A \setminus A$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

2

Différence ensembliste et complémentaire

Ainsi, $\mathcal{C}_X A = X \setminus A$, mais la notion de complémentaire n'a de sens que pour la partie d'un ensemble donné, alors que la différence ensembliste est beaucoup plus souple et générale.

1.9

Connecteurs logiques et opérations ensemblistes

On peut faire une analogie entre les connecteurs logiques et les opérations ensemblistes : préciser à quoi correspondent la réunion, l'intersection, le passage au complémentaire, l'égalité et l'inclusion.

1.10

Cette correspondance permet de passer d'assertions logiques à des relations ensemblistes, et réciproquement. Par exemple, l'associativité de la conjonction correspond à celle de l'intersection : $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

Exercice (Transcription des tautologies en termes ensemblistes)

Transcrire les tautologies de l'exercice 4 du chapitre I en termes ensemblistes.

3

Définition (Produit Cartésien)

On note $A \times B$, et appelle *produit (cartésien)* de A et de B l'ensemble :

$$A \times B := \{(x, y), ((x \in A) \wedge (y \in B))\}.$$

Les éléments d'un tel ensemble produit sont appelés des *couples*.

1.g

Couple et paire

Attention, il ne faut pas confondre un couple et une paire : un couple est un élément d'un ensemble produit comme $A \times B$. Si le couple (x, y) appartient à $A \times B$ (i.e. $x \in A$ et $y \in B$), alors il n'est pas sûr que (y, x) appartienne à $A \times B$, et, quand bien même ce serait le cas, on a $(x, y) \neq (y, x)$ si $y \neq x$. Une paire est un ensemble constitué de deux éléments, la paire comprenant x et y est $\{x, y\}$ (ou $\{y, x\}$, ou $\{y, x, x, y\}$).

Le couple (x, x) de $A \times B$ n'a de sens que pour un élément x de $A \cap B$, tandis qu'il est impossible de parler de la paire $\{x, x\}$ (il s'agit en fait du singleton $\{x\}$).

1.11

Définition (Puissance d'un ensemble)

Comme exemple particulier de produit cartésien, il y a celui d'un ensemble avec lui-même : $A \times A$, que l'on note aussi A^2 . Dans la syntaxe formelle, on accepte les deux tournures suivantes :

$$\begin{aligned} \forall x, y \in A, \dots \\ \forall (x, y) \in A^2, \dots \end{aligned}$$

La première se lit « Pour tous éléments x et y de A, \dots », la seconde se lit « Pour tout couple (x, y) d'éléments de A, \dots ».

1.h

On définit également par récurrence A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $A^1 = A$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $A^{n+1} = A \times A^n$.

On considère n ensembles E_1, E_2, \dots, E_n , où $n \geq 2$. Un élément du produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ correspond à la donnée, pour tout entier k entre 1 et n , et dans cet ordre, d'un élément x_k de l'ensemble E_k , et est appelé un n -uplet. Il est noté (x_1, \dots, x_n) . L'élément x_k est appelé k -ième *composante* (ou projection, ou coordonnée) du n -uplet.

Si $E_1 = \dots = E_n$, on note l'ensemble produit E^n .

Le n -uplet (x_1, \dots, x_n) est ordonné (comme un mot), alors que l'ensemble $\{x_1, \dots, x_n\}$ est « en vrac ».

2. RELATIONS BINAIRES

2.1. PREMIÈRES DÉFINITIONS

Soit E un ensemble.

Définition (Relation binaire)

On appelle *relation (binaire)* toute partie \mathcal{R} du produit cartésien $E^2 = E \times E$. Pour tout couple (x, y) d'éléments de E , on dit que x est en relation avec y , et on note $x\mathcal{R}y$, lorsque $(x, y) \in \mathcal{R}$.

2.a

La symétrie ne va pas de soi

Si x est en relation avec y , y n'est pas nécessairement en relation avec x

2.1

Deux éléments ne sont pas forcément en relation

Il se peut que deux éléments de E ne soient pas en relation (ni dans un sens, ni dans l'autre). Il se peut même qu'un élément ne soit pas en relation avec lui-même.

2.2

Exemple (Relations)

Voici quelques relations très classiques :

- Si $\mathcal{R} = E \times E$, la relation binaire obtenue est dite *universelle* (deux éléments quelconques de E sont en relation).
- Relation d'égalité $=$.
- Relation d'inclusion sur $\mathcal{P}(E)$.
- Relation \leq sur \mathbb{R} .
- Relation de divisibilité dans \mathbb{N} ou dans \mathbb{Z} :
- Relation de congruence modulo un entier naturel non nul a dans \mathbb{Z} :

i

Définition (Propriétés d'une relation)

Une relation binaire \mathcal{R} sur E est dite *réflexive* si chaque élément de E est en relation avec lui-même, *symétrique* si

$$\forall x, y \in E, \quad x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$$

transitive si

$$\forall x, y, z \in E, \quad ((x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z)) \Rightarrow x\mathcal{R}z$$

antisymétrique si

$$\forall x, y \in E, \quad (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$$

2.b

Réécriture de l'antisymétrie

La relation \mathcal{R} est antisymétrique si et seulement si, pour tout $(x, y) \in E^2$:

$$((x\mathcal{R}y) \wedge (x \neq y)) \Rightarrow (\neg(y\mathcal{R}x)).$$

2.3

Éléments en relation

Si \mathcal{R} est symétrique, on peut dire sans ambiguïté que x et y sont ou ne sont pas en relation.

Si \mathcal{R} n'est pas symétrique, on convient le plus souvent que x et y sont en relation si $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$.

Trouvez une relation non symétrique classique pour laquelle on emploie ce vocabulaire :

2.4

Symétrie et antisymétrie

Il existe des relations non symétriques et non antisymétriques, et la relation d'égalité est à la fois symétrique et antisymétrique. Est-ce la seule ?

2.5

Définition (Relation d'équivalence)

Une relation est dite d'*équivalence* lorsqu'elle est réflexive, symétrique, transitive.

2.c

Exemple (de relations d'équivalence)

C'est le cas

- de la relation de congruence modulo $n \in \mathbb{Z}$ dans \mathbb{Z} :
- de la relation de congruence modulo $a \in \mathbb{R}$ dans \mathbb{R} :
- du parallélisme de deux droites.

ii

Exercice (Relation d'équivalence ou pas)

Soit $f, g : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$. On pose $f\mathcal{R}g$ si et seulement si $f(0) = g(0)$ ou $f(1) = g(1)$. Est-ce une relation d'équivalence sur l'ensemble des applications de $\{0, 1\}$ dans $\{0, 1\}$?

4

Définition (Classe d'équivalence)

Soit \mathcal{R} une relation d'équivalence sur un ensemble E . La *classe d'équivalence* d'un élément x de E (pour la relation \mathcal{R}) est l'ensemble des éléments équivalents à x .

2.d

Relation d'équivalence

Une relation d'équivalence permet de regrouper les éléments équivalents en classes d'équivalence, formant ainsi une *partition* de E .

2.6

2.2. RELATIONS D'ORDRE

Il s'agit d'un cas particulier important de relation binaire.

Définition (Relation d'ordre)

Une *relation d'ordre* est une relation binaire réflexive, antisymétrique et transitive.

2.e

Relation d'ordre et d'équivalence

L'unique relation d'ordre et d'équivalence est la relation d'égalité (plus finement, l'unique relation réflexive, symétrique et antisymétrique est la relation d'égalité).

2.7

Ordre strict

Étant donné une relation d'ordre \leq sur un ensemble E , on définit l'*ordre strict* associé, noté $<$, par

$$x < y \Leftrightarrow (x \leq y) \wedge (x \neq y),$$

pour tous $(x, y) \in E^2$.

On notera qu'un ordre strict ^a n'est pas un ordre.

a. sauf dans un cas pathologique

2.8

Exemple (Ordre)

L'ordre naturel (ou usuel) dans $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$: cet ordre est si naturel qu'il est parfois sous-entendu. La relation d'inclusion sur $\mathcal{P}(E)$, la relation de divisibilité dans \mathbb{N} . Si F est une partie d'un ensemble E ordonné pour \leq , cette relation induit une relation d'ordre sur F .

iii

Définition (Éléments comparables)

Soit \leq une relation d'ordre sur E . Deux éléments x et y de E sont dits *comparables* si $x \leq y$ ou $y \leq x$.

Si deux éléments quelconques de E sont toujours comparables, on dit que \leq est une relation d'ordre *total*, et que l'ensemble E est *totalelement ordonné* par (ou pour) \leq . Sinon, on dit \leq est une relation d'ordre *partiel*.

2.f

Exemple (Relations d'ordre total ou partiel)

- (1) La relation d'ordre naturelle sur $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ est bien sûr totale ;
- (2) La relation d'inclusion sur un ensemble d'au moins deux éléments est une relation d'ordre partiel ;
- (3) On peut définir un ordre ^a sur \mathbb{R}^2 , en posant :

$$(x, y) \leq (x', y') \Leftrightarrow ((x \leq x') \wedge (y \leq y'))$$

(ordre partiel) mais aussi en posant

$$(x, y) \leq (x', y') \Leftrightarrow ((x < x') \vee ((x = x') \wedge (y \leq y')))$$

Ce dernier ordre est total, et se généralise à \mathbb{R}^n , et qui est appelé *ordre lexicographique*.

^a. que l'on pourrait qualifier d'ordre produit

iv

Définition (Majorant, minorant, ensemble borné)

Soit (E, \leq) un ensemble ordonné. Soit A une partie non vide de E .

On dit qu'un élément x de E est un *majorant* de A dans E (ou qu'il *major*e A) si, pour tout élément a de A , on a $a \leq x$.

On dit qu'un élément x de E est un *minorant* de A dans E (ou qu'il *minore* A) si, pour tout élément a de A , on a $x \leq a$.

On dit que A est *majorée* (resp. *minorée*) s'il existe un majorant (resp. un minorant) de A . On dit que A est *bornée* si elle est majorée et minorée.

2.g

Majorant et minorant

En particulier, un majorant ou minorant de A dans E est comparable à tout élément de A , et n'est pas forcément élément de A . Un majorant (ou un minorant) n'a aucune raison d'être unique. On peut aussi observer que la notion de majorant (par exemple) est relative à l'ensemble ordonné E dans lequel on se place.

2.9

Définition (Plus grand ou plus petit élément)

Dans le même contexte, un élément de A est appelé *plus grand élément* (ou élément *maximum*) de A s'il *major*e A . Un élément de A est appelé *plus petit élément* (ou élément *minimum*) de A s'il *minore* A . Ces éléments sont notés (s'ils existent) $\max A$ et $\min A$, respectivement.

2.h

Plus grand ou plus petit élément

A possède au plus un plus grand élément (et au plus un plus petit élément).

2.10

Exemple (Plus grand ou plus petit élément)

- $[1; +\infty[$ admet un plus petit élément, et pas de majorant dans \mathbb{R} ;
- Dans \mathbb{R} , $] - \infty; 2[$ n'admet pas de minorant, admet des majorants, mais pas de plus grand élément ;
- Dans (\mathbb{N}, \leq) , toute partie non vide admet un minimum (mais pas forcément de maximum) ;
- Dans \mathbb{N}^* ordonné par la divisibilité, le plus petit élément de \mathbb{N}^* est 1, mais ne possède pas de plus grand élément ;
- Toute partie A de $\mathcal{P}(E)$ admet un majorant E (pour l'inclusion) et un minorant \emptyset , alors que ses éléments ne sont pas forcément comparables.

v

Notion d'éléments minimal et maximal (hors programme)

Si $E = \{a, b, c, d\}$ ^a et $A = \{\{a\}, \{b, d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, c, d\}\} \subset \mathcal{P}(E)$, alors A ne possède pas de plus grand élément, ni de plus petit élément. Pourtant le singleton $\{a\}$ est inclus dans tous les autres éléments de A , sauf $\{b, d\}$, qui ne lui est pas comparable. Pour exprimer cette propriété, on dit que $\{a\}$ est un élément *minimal* de A (pour l'inclusion). Cela dit $\{b, d\}$ est aussi minimal, et les éléments maximaux sont $\{b, d\}$, $\{a, b\}$ et $\{a, c, d\}$, et $\{a, c\}$ n'est ni minimal ni maximal.

Dans le cas où l'ordre est total, maximum=maximal et minimum=minimal.

Quels sont les éléments minimaux de $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ pour la relation d'ordre de divisibilité ?

2.11

a. où a, b, c et d sont distincts deux à deux

Définition (Bornes supérieure et inférieure)

Soit (E, \leq) un ensemble ordonné, et A une partie de E admettant un majorant. On dit que A admet une *borne supérieure dans E* si l'ensemble des majorants de A dans E admet un plus petit élément. Dans ce cas, ce plus petit élément est appelé la *borne supérieure de A dans E* , et noté $\sup(A)$.

Soit (E, \leq) un ensemble ordonné, et A une partie de E admettant un minorant. On dit que A admet une *borne inférieure dans E* si l'ensemble des minorants de A dans E admet un plus grand élément. Dans ce cas, ce plus grand élément est appelé la *borne inférieure de A dans E* , et noté $\inf(A)$.

2.i

Exemple (Bornes supérieure et inférieure)

- Si A admet un plus grand élément $\max(A)$, cet élément est bien sûr la borne supérieure de A . La réciproque est fautive en général, comme le montre l'exemple $[0, 1[$;
- $\{x \in \mathbb{Q}, |x| < \sqrt{2}\}$ n'a pas de borne supérieure dans \mathbb{Q} mais en a une dans \mathbb{R} . En fait, \mathbb{R} possède la propriété fondamentale (que nous ne démontrerons pas) que toute partie de \mathbb{R} majorée admet une borne supérieure ;
- Soit $m_i, 1 \leq i \leq n$ des entiers strictement positifs. Donner les bornes supérieure et inférieure de $\{m_i, i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$ dans \mathbb{N} pour la relation de divisibilité :

vi

Caractérisation de la borne supérieure dans le cas de l'ordre total

On suppose E totalement ordonné. Pour que $b \in E$ soit la borne supérieure de A dans E , il faut et il suffit qu'il vérifie simultanément les deux conditions :

- (1) $\forall a \in A, a \leq b$, i.e. b est un majorant de A ;
- (2) $\forall c \in E, (c < b) \Rightarrow \exists a \in A, a > c$, i.e. b est le premier majorant de A .

2.12

3. GÉNÉRALITÉS SUR LES APPLICATIONS

Dans ce paragraphe, E, F, G désignent trois ensembles.

3.1. APPLICATIONS : DÉFINITION ET PREMIERS EXEMPLES

Définition (Application)

Une *application* f est la donnée d'un triplet (E, F, Γ) , où E et F sont deux ensembles, Γ une partie de $E \times F$ vérifiant :

$$\forall x \in E, \exists! y \in F, (x, y) \in \Gamma.$$

Cette application f va de son *ensemble de départ* (ou *source*) E vers (ou dans) son *ensemble d'arrivée* (ou *but*) F .

Γ s'appelle le *graphe* de f .

Pour $x \in E$, l'unique y de F tel que $(x, y) \in \Gamma$ est appelé *image* (ou *valeur*) de f en x , et on note : $y=f(x)$. On dit aussi que x est un *antécédent* de y par f .

Une telle application se note schématiquement

$$\begin{aligned} f : E &\rightarrow F \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Deux applications f et g sont dites *égales* si elles ont même ensemble de départ E , même ensemble d'arrivée F , et :

$$\forall x \in E, f(x) = g(x).$$

L'ensemble des applications de E dans F est noté $\mathcal{F}(E, F)$, ou F^E .

3.a

On a donc $\Gamma = \{(x, f(x)), x \in E\}$.

Distinction entre source et but

Il y a donc une dissymétrie profonde entre les ensembles E et F . De chaque élément de E part une unique flèche, mais il peut n'arriver aucune ou plusieurs flèches sur un élément donné de F . On entend d'ailleurs cette dissymétrie dans l'emploi d'un article défini pour *l'image*, et d'un article indéfini pour *un (éventuel) antécédent*.

3.1

Importance de la source et du but

La donnée d'une application doit comprendre but et source. Dans certains cas, l'un ou l'autre est (abusivement) oublié, mais dans d'autres, il est essentiel de les préciser (par exemple pour la notion de surjectivité).

3.2

Exemple (Applications classiques)

- On définit l'application *identité* (ou *identique*) de E (dans E), notée Id_E , par : $\text{Id}_E(x) = x$, pour tout $x \in E$;
- Une application $f : E \rightarrow F$ est dite *constante* si elle ne prend qu'une valeur, *i.e.* s'il existe $\alpha \in F$ tel que $f(x) = \alpha$, pour tout $x \in E$, ou encore ^a si

$$\forall (x, y) \in E^2, f(x) = f(y).$$

a. en fait, ces deux assertions ne sont pas tout à fait équivalentes, voyez-vous pourquoi ?

i

Définition (Restriction et prolongement à la source)

Soit $f : E \rightarrow F$ une application, soit $E' \subset E$.

La *restriction* de f (au départ) au sous-ensemble E' de E est l'application, notée $f|_{E'}$, de E' dans F , vérifiant : $f|_{E'}(x') = f(x')$ pour tout $x' \in E'$.

On dit aussi que f est un *prolongement* à E de $f|_{E'}$.

3.b

3.2. COMPOSITION DES APPLICATIONS

Définition (Composée de deux applications)

Soit deux applications $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$. On définit l'application *composée* de f par g , l'application, notée $g \circ f$, de E dans G , qui envoie x sur $g(f(x))$, pour tout $x \in E$.

3.c

Associativité de la composition

Pour trois applications $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} H$, on a

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Il est donc inutile de préciser les parenthèses lorsque l'on compose trois fonctions ou plus. On peut considérer qu'il s'agit d'une forme d'associativité de la composition.

3.3

Puissances n -ièmes d'une fonction

En particulier, si f est une application d'un ensemble E dans lui-même et $n \in \mathbb{N}^*$, on note f^n la composée $f \circ \dots \circ f$ (où f apparaît n fois). Par convention, $f^0 = \text{Id}_E$. Ainsi, pour tous entiers naturels p et q , $f^{p+q} = f^p \circ f^q$.

Attention ! Dans certains cas, f^n désigne une composée, dans d'autres, un produit. Le contexte permet souvent de lever l'ambiguïté. S'il ne le permet pas, le plus probable est le produit.

3.4

Exemple (L'identité est neutre pour la composition)

Si f est une application de E dans F , on a $f \circ \text{Id}_E = f$ et $\text{Id}_F \circ f = f$.

ii

3.3. INJECTIVITÉ, SURJECTIVITÉ

Dans la suite, f est une application de E dans F .

Définition (Injectivité, surjectivité, bijectivité)

On dit que f est *injective*, ou que f est une *injection*, si tout élément de F admet au plus un antécédent dans E par f :

$$\forall x, x' \in E, \quad (f(x) = f(x')) \Rightarrow (x = x').$$

On dit que f est *surjective*, ou que f est une *surjection* (de E sur F), si tout élément de F admet au moins un antécédent :

$$\forall y \in F, \exists x \in E, \quad y = f(x).$$

On dit que f est *bijective*, ou que f est une *bijection* (de E sur F), si tout élément de F admet un unique antécédent, *i.e.* f est injective et surjective :

$$\forall y \in F, \exists! x \in E, \quad y = f(x).$$

3.d

Exercice (Compatibilité entre injectivité et surjectivité)

Injectivité et surjectivité ne sont pas contraires : donner des exemples variés des quatre cas possibles

5

Définition (Bijection réciproque)

Soit f une bijection de E sur F . On définit une application de F dans E en associant à tout y de F son unique antécédent par f . Cette application est appelée *bijection réciproque* de f , et notée f^{-1} .

3.e

Propriétés élémentaires de la bijection réciproque

Soit f une bijection de E sur F .

- L'application f^{-1} est bijective, de bijection réciproque $f : (f^{-1})^{-1} = f$.
- $f^{-1} \circ f = Id_E$, et $f \circ f^{-1} = Id_F$;
- Dans le cas où $E = F$, on définit naturellement f^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$, et, pour tous entiers relatifs p et q , on a : $f^{p+q} = f^p \circ f^q$.

3.5

Proposition (Composition et injectivité, surjectivité, bijectivité)

On considère deux applications $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$.

- (1) Si f et g sont injectives (resp. surjectives), alors $g \circ f$ est injective (resp. surjective);
- (2) Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective, et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$;
- (3) Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective;
- (4) Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

3.a

Démonstration

□

Exercice (Inverse d'une fonction)

Faire l'exercice 10 de TD, que l'on peut considérer comme du cours.

6

3.4. IMAGE DIRECTE D'UNE PARTIE

Définition (Image directe)

Soit $A \subset E$. On appelle *image (directe)* de A par f et on note $f(A)$ le sous-ensemble suivant de F :

$$\{f(x), x \in A\}.$$

L'image $f(E)$ de E par f est appelée l'*image de f* .On définit ainsi une application $\mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(F)$, notée abusivement f .

3.f

Caractérisation de l'image d'une partie

Soit A une partie de E . On a :

$$y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A, y = f(x).$$

Retenir cette notion d'image, que nous utiliserons beaucoup en algèbre linéaire.

3.6

Caractérisation de la surjectivité par l'image

 $f : E \rightarrow F$ est surjective si et seulement si l'image de f est F , i.e. $f(E) = F$.

3.7

Exemple (Images directes de parties)

- $f(\emptyset) = \emptyset$. Si $a \in E$, alors $f(\{a\}) = \{f(a)\}$;
- L'image de la fonction sinus est $[-1, 1]$. L'image de la fonction exponentielle est \mathbb{R}_+^* , celle de la fonction tangente est \mathbb{R} .

iii

Propriétés de l'image directe

Si E_1 et E_2 sont deux parties quelconques de E , on a :

$$(E_1 \subset E_2) \Rightarrow (f(E_1) \subset f(E_2)),$$

$$f(E_1 \cap E_2) \subset f(E_1) \cap f(E_2),$$

$$f(E_1 \cup E_2) = f(E_1) \cup f(E_2).$$

Les inclusions mentionnées peuvent être strictes (illustrez-le).

3.8

Définition (Corestriction)

Si $f : E \rightarrow F$ est une application et si $f(E) \subset F' \subset F$, alors on peut définir la *corestriction* de f à F' (ou *restriction à l'arrivée de f à F'*), application de E dans F' , notée $f|^{F'}$, vérifiant : $\forall x \in E, f|^{F'}(x) = f(x)$.

3.g

Il faut faire attention lorsqu'on restreint à l'arrivée, alors qu'on peut restreindre au départ sans précaution.

3.5. IMAGE RÉCIPROQUE D'UNE PARTIE

Définition (Image réciproque)

Soit $B \subset F$. On appelle *image réciproque* de B par f et on note $f^{-1}(B)$ le sous-ensemble $\{x \in E, f(x) \in B\}$ de E .

Ceci définit donc une application $\mathcal{P}(F) \rightarrow \mathcal{P}(E)$, notée *abusivement* f^{-1} .

3.h

Caractérisation de l'image réciproque

On a donc $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$.

3.9

Confusion entre image réciproque et bijection réciproque

Attention, la notion d'image réciproque ne permet pas, en général, de définir une application de F dans E . Seul le cas où f est bijective le permet. Par ailleurs, il peut y avoir confusion des notations.

3.10

Proposition (Propriétés de l'image réciproque)

L'image réciproque se comporte bien avec les opérations ensemblistes : pour toutes parties F_1 et F_2 de F ,

$$f^{-1}(F_1 \cap F_2) = f^{-1}(F_1) \cap f^{-1}(F_2),$$

$$f^{-1}(F_1 \cup F_2) = f^{-1}(F_1) \cup f^{-1}(F_2),$$

$$f^{-1}(F - F_1) = E - f^{-1}(F_1).$$

3.b

Démonstration

□

3.6. ORDRE ET APPLICATIONS

Définition (Partie majorée, minorée, bornée, monotonie)

Si F est ordonné, une fonction $f : E \rightarrow F$ est *majorée* (resp. *minorée*, *bornée*) si $f(E)$ l'est dans F . Si en outre E est ordonné, on peut définir la (stricte) croissance, la (stricte) décroissance, la (stricte) monotonie de la fonction $f : E \rightarrow F$.

Par exemple, f est croissante si

$$\forall(x, y) \in E^2, \quad (x \leq y) \Rightarrow (f(x) \leq f(y)),$$

et f est strictement décroissante si

$$\forall(x, y) \in E^2, \quad (x < y) \Rightarrow (f(y) < f(x)).$$

3.i

Composée d'applications monotones

La composée (licite) de deux applications de même monotonie (resp. de monotonies contraires) est croissante (resp. décroissante). Qu'en est-il pour la stricte monotonie ?

3.11

Stricte monotonie et ordre total

Dans le cas où les ordres sont totaux et f est strictement monotone, alors l'implication est une équivalence. En particulier, si f est bijective (il ne manque que la surjectivité), sa bijection réciproque est de même monotonie stricte.

3.12

Exemple (Stricte décroissance du passage au complémentaire)

Soit E est un ensemble, $\mathcal{P}(E)$ est muni de la relation d'ordre d'inclusion. On définit l'application $f : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$, $A \mapsto E \setminus A$ (passage au complémentaire dans E). Cette application est strictement décroissante.

iv

4. FAMILLES

Soit I et E deux ensembles.

Définition (Famille)

On appelle *famille d'éléments de E indexée (ou indexée) par I* toute application x de I dans E . Pour $i \in I$, l'*élément (ou terme)* d'indice i de cette famille est $x(i)$, plus souvent noté x_i . La famille est notée $(x_i)_{i \in I}$. On note E^I l'ensemble des familles d'éléments de E indexées par I .

La famille $(x_i)_{i \in I}$ est dite *finie* ou *infinie*, selon que I est fini ou infini.

4.a

Exemple (n -uplet)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans la suite, nous noterons $\llbracket 1, n \rrbracket$ pour l'ensemble $\{1, \dots, n\}$, et tout n -uplet sera considéré comme une famille indexée par $\llbracket 1, n \rrbracket$. Par exemple, $(123, 34, 21)$ est une famille indexée par $\{1, 2, 3\}$. Son terme d'indice 1 (resp. 2, 3) est 123 (resp. 34, 21). On pourra parler de terme en position i , ou même de i -ième terme.

L'ensemble des familles d'éléments de E indexées par $\llbracket 1, n \rrbracket$ est noté $\mathbb{R}^{\llbracket 1, n \rrbracket}$. On a donc identifié cet ensemble avec \mathbb{R}^n .

i

Familles et applications

E^I est donc également l'ensemble des applications de I dans E . Nous donnerons une explication à cette notation plus tard.

4.1

Image d'une famille

Comme c'est le cas de toute application, la famille $x = (x_i)_{i \in I}$ ne se confond pas avec son image $\{x_i, i \in I\}$. Par exemple, la famille $((-1)^i)_{i \in \mathbb{N}}$ est infinie, mais son image est la paire $\{-1, 1\}$.

4.2

Composée de termes d'une famille finie

Si E est muni d'une loi de composition interne \oplus (i.e. une application $\oplus : E \times E \rightarrow E$), associative et commutative, et si I est fini non vide, on note leur composition

$$\bigoplus_{i \in I} x_i.$$

4.3

On utilise les symboles Σ et Π pour la somme et le produit respectivement.

Si E admet un élément neutre e pour \oplus , on peut étendre cette notation lorsque I est vide (la composée vaut alors e).

Exemple (Familles et suites)

Une suite de nombres réels $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille de réels indexée par \mathbb{N} . C'est donc une application de \mathbb{N} vers \mathbb{R} , et un élément de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

ii

Exemple (Famille et ensemble)

$\{1, 2, 3\}$ n'est pas une famille. En revanche, c'est par exemple l'image de la famille $(1, 2, 3)$, mais aussi de $(3, 2, 1)$, de $(1, 2, 1, 3)$, ou de $(3, 3, 3, 2, 1, 2)$.

La notion de famille est différente de celle d'ensemble : par exemple, les éléments d'une famille peuvent être ordonnés, comme dans le cas des couples par exemple, et il peut y avoir redondance (toujours comme dans le cas des couples), ce qui peut être utile pour les suites constantes à partir d'un certain rang par exemple.

iii

Famille et étiquetage

Une des utilités des familles est qu'elles permettent d'étiqueter : un élément de E^I , c'est un étiquetage de certains éléments de E par les éléments de I . L'application correspondant à cette famille est injective (resp. surjective) si aucun élément n'a été étiqueté deux fois (resp. tout élément a été étiqueté).

4.4

Définition (Famille de partie)

Toute application de I vers $\mathcal{P}(E)$ est appelée une *famille de parties de E indexée par I* .

4.b

Exemple (Famille de parties, suite)

$(n\mathbb{Z})_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille de parties de \mathbb{Z} , indexée par \mathbb{N} , donc un élément de $\mathcal{P}(\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$.

iv

Définition (Réunion et intersection d'une famille)

Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille de parties de l'ensemble E (chaque E_i est une partie de E). La *réunion* de cette famille est la partie suivante de E , notée $\bigcup_{i \in I} E_i$:

$$\bigcup_{i \in I} E_i = \{x \in E, \exists i \in I, x \in E_i\}.$$

L'*intersection* de cette famille est la partie suivante de E , notée $\bigcap_{i \in I} E_i$:

$$\bigcap_{i \in I} E_i = \{x \in E, \forall i \in I, x \in E_i\}.$$

4.c

Exemple (Réunion et intersection de familles)

$\bigcup_{x \in \mathbb{R}} \{x\} = \mathbb{R}$ et

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left] -\frac{1}{n}; \frac{1}{n} \right[= \{0\}.$$

v

Définition (Produit d'une famille de parties)

Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille de parties d'un ensemble E . On appelle *produit (cartésien)* de cette famille et on note $\prod_{i \in I} E_i$ l'ensemble des familles $(a_i)_{i \in I}$ d'éléments de E telles que, pour tout $i \in I$, $a_i \in E_i$.

4.d

Exemple (Famille de parties)

$(\{0, \dots, n\})_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ indexée par \mathbb{N} , *i.e.* un élément de $\mathcal{P}(\mathbb{N})^{\mathbb{N}}$, *i.e.* une suite de parties de \mathbb{N} .

Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E indexée par I . Donner les bornes supérieure et inférieure de $\{E_i, i \in I\}$ dans $\mathcal{P}(E)$ (ordonné par l'inclusion) :

vi

5. NOMBRES ENTIERS NATURELS

5.1. PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES

Nous supposons connu l'ensemble des entiers naturels \mathbb{N} . Nous savons notamment que cet ensemble est muni de la loi de composition interne d'addition, qui est associative, commutative, et qui admet pour élément neutre 0 (on dit que $(\mathbb{N}, +)$ est un *monoïde* commutatif¹).

- Pour tout entier naturel n , l'entier $n + 1$ est le *successeur* de n , et n est le *prédécesseur* de $n + 1$ (0 n'a pas de prédécesseur). L'application $S : n \mapsto n + 1$ est appelée *passage au successeur* ;
- $(\mathbb{N}, +)$ n'est pas un groupe, puisque par exemple 1 n'admet pas de symétrique ;
- L'addition est toutefois *régulière* dans le sens suivant :

$$\forall p, q, r \in \mathbb{N}, \quad (p + r = q + r) \Rightarrow (p = q).$$

(*i.e.* tout élément est simplifiable pour l'addition).

\mathbb{N} est aussi muni de la loi de composition interne de multiplication, qui est associative, commutative, qui admet 1 pour élément neutre, et qui est distributive par rapport à l'addition.

1. il manque le fait que tout élément soit symétrisable pour en faire un groupe abélien

– La multiplication n'est pas régulière, mais on a tout de même :

$$\forall p, q, r \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \quad pr = qr \Rightarrow p = q$$

(la multiplication restreinte à \mathbb{N}^* est donc régulière) ;

– (\mathbb{N}, \cdot) n'est pas un groupe, puisque par exemple 0 ou 2 n'admettent pas de symétriques, ou encore parce que la multiplication n'est pas régulière, à cause de l'élément *absorbant* 0.

Enfin, \mathbb{N} est muni d'un ordre naturel (ou usuel), noté \leq . Cet ordre est total, 0 minore toute partie de \mathbb{N} , et certaines parties de \mathbb{N} (par exemple \mathbb{N} lui-même, ou l'ensemble $2\mathbb{N}$ des nombres pairs) n'admettent pas de majorant dans \mathbb{N} .

Cet ordre est de plus *compatible avec l'addition* au sens où :

$$\forall p, q, r \in \mathbb{N}, \quad p \leq q \Leftrightarrow (p + r \leq q + r)$$

Cet ordre est aussi *compatible avec la multiplication par un entier non nul*, au sens où :

$$\forall p, q, r \in \mathbb{N}, \quad (p \leq q \wedge r \neq 0) \Leftrightarrow (pr \leq qr)$$

De plus, l'ensemble \mathbb{N} vérifie la propriété fondamentale suivante :

Fait (Propriété fondamentale des entiers naturels)

Toute partie non vide (de \mathbb{N}) a un plus petit élément.

On en déduit :

Proposition (Partie majorée non vide d'entiers naturels)

Toute partie majorée non vide de \mathbb{N} a un plus grand élément.

5.a

Démonstration

Soit A une partie majorée non vide de \mathbb{N} , et soit Ω l'ensemble des majorants de A (dans \mathbb{N}). Par hypothèse, Ω n'est pas vide, et admet donc un plus petit élément b . Il s'agit de montrer que b est un élément de A . Supposer $b \notin A$ conduit aux absurdités $A = \emptyset$ si b est nul, et $b - 1 \in \Omega$ si b n'est pas nul.

□

Notation (Intervalles d'entiers)

Pour tous entiers naturels p, q , $p \leq q$, on pose

$$\llbracket p, q \rrbracket = \{n \in \mathbb{N}, p \leq n \leq q\}$$

On pose également

$$\llbracket p, +\infty \llbracket = \{n \in \mathbb{N}, p \leq n\}$$

Par convention, $\llbracket 1, 0 \rrbracket = \emptyset$.

5.a

5.2. RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE

Théorème (Raisonnement par récurrence (ou principe de récurrence))

Soit $\mathcal{P}(n)$ une assertion dépendant d'une variable $n \in \mathbb{N}^a$. On suppose que :

- (1) $\mathcal{P}(0)$ (est vraie) (*amorçage* ou *initialisation*);
- (2) $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ (*hérédité*).

Pour tout entier naturel n , l'assertion $\mathcal{P}(n)$ est alors vraie.

a. on dit aussi que $(\mathcal{P}(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est un *prédicat* sur \mathbb{N}

5.b

Démonstration

On considère l'ensemble Ω des entiers naturels n tels que $\mathcal{P}(n)$ soit fausse. On souhaite montrer que Ω est vide. On raisonne par l'absurde en le supposant non vide : il admet donc un plus petit élément b . La condition d'amorçage montre que b n'est pas nul, et donc $b \geq 1$. Or l'entier naturel $b-1$ ne peut être élément de Ω (par définition de b), donc $\mathcal{P}(b-1)$ est vraie, ce qui entraîne, par hérédité, l'absurdité $b \notin \Omega$.

□

Sous une forme plus épurée, le principe de récurrence résulte du fait que l'unique partie de \mathbb{N} , comprenant 0, et stable par passage au successeur, est \mathbb{N} elle-même.

Cette récurrence est dite *simple* (ou *faible*), car on déduit $\mathcal{P}(n+1)$ de l'unique assertion $\mathcal{P}(n)$.

Exercice (Récurrence simple)

Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N} : 2^p \geq p + 1$.

7

Bien sûr, on peut généraliser ce résultat en commençant à un rang n_0 autre que 0 (à 1 par exemple).

Ce principe de récurrence admet de nombreuses variantes. En voici quelques unes (vous pouvez d'ailleurs les combiner) :

Corollaire (Récurrence avec deux prédécesseurs)

Soit $\mathcal{P}(n)$ une assertion dépendant d'une variable $n \in \mathbb{N}$. On suppose que :

- (1) $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies (*amorçage*);
- (2) $\forall n \in \mathbb{N}, (\mathcal{P}(n) \wedge \mathcal{P}(n+1)) \Rightarrow \mathcal{P}(n+2)$ (*hérédité*).

L'assertion $\mathcal{P}(n)$ est alors vérifiée pour tout entier naturel n .

5.c

Démonstration

Se ramener au théorème en formulant, pour tout entier naturel, l'hypothèse $\mathcal{P}'(n) = (\mathcal{P}(n) \wedge \mathcal{P}(n+1))$.

□

Corollaire (Récurrence forte)

Soit $\mathcal{P}(n)$ une assertion dépendant d'une variable $n \in \mathbb{N}$. On suppose que :

- (1) $\mathcal{P}(0)$ est vraie (*amorçage*);
- (2) $\forall n \in \mathbb{N}, (\forall m \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathcal{P}(m)) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ (*hérédité*).

Pour tout entier naturel n , $\mathcal{P}(n)$ est alors vérifiée.

5.d

Démonstration

Se ramener au théorème, en posant, pour tout entier naturel n , l'hypothèse $\mathcal{P}'(n) = \mathcal{P}(0) \wedge \dots \wedge \mathcal{P}(n)$

□

Exercice (Récurrence forte)

Donner un exemple pertinent d'utilisation d'une récurrence forte (on pourra penser à l'arithmétique).

8

Corollaire (Récurrence finie)

Soit p et q deux entiers naturels, $p < q$, et $\mathcal{P}(n)$ une assertion dépendant d'une variable $n \in \llbracket p, q \rrbracket$. On suppose que :

- (1) $\mathcal{P}(p)$ est vraie (*amorçage*);
- (2) Pour tout entier $n \in \llbracket p, q-1 \rrbracket$, $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ (*hérédité*).

Alors, pour tout entier naturel $n \in \llbracket p, q \rrbracket$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

5.e

Exercice (Lemme pour extractrice)

Soit n un entier naturel, et $f : \llbracket 0, n \rrbracket \rightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante. Alors, pour tout entier naturel $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a $f(k) \geq k$.

9

En corollaire, si $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante, on a $f(k) \geq k$, pour tout entier naturel k .

Méthode (Principe de récurrence)

En pratique, une preuve par récurrence comporte quatre étapes, que nous présentons dans le cadre du théorème :

- (1) *Formulation de la récurrence* : pour chaque entier naturel n , on formule l'hypothèse de récurrence (ou on énonce/introduit l'assertion) suivante : etc.
- (2) *Amorçage* : on vérifie $\mathcal{P}(0)$;
- (3) *Hérédité* : soit n un entier naturel. Supposons $\mathcal{P}(n)$, et montrons $\mathcal{P}(n+1)$. etc. ;
- (4) *Conclusion* : en conclusion, pour tout entier naturel n , l'assertion $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée.

5.1

5.3. SUITE DÉFINIE PAR UNE RÉCURRENCE ET UNE CONDITION INITIALE

Définition (Suite d'éléments de E)

Soit E un ensemble non vide, et A une partie de \mathbb{N} . Une *suite d'éléments de E* indexée par A est une famille d'éléments de E indexée par A : c'est donc un élément de E^A (et, d'un autre point de vue, une application de A dans E).

5.b

Proposition (Suite récurrente définie par une itératrice)

Soit E un ensemble non vide, et $f : E \rightarrow E$ une application. Soit $\alpha \in E$. Il existe une unique suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E (indexée par \mathbb{N}) vérifiant :

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

5.f

Démonstration

(*Unicité*) supposons que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifient les conditions de l'énoncé. L'ensemble des indices en lesquels elles coïncident comprend 0 et est stable par passage au successeur : c'est donc \mathbb{N} , et les suites sont égales.

(*Existence*) on considère l'ensemble Ω des entiers n pour lesquels on peut définir u_0, \dots, u_n comme dans l'énoncé. Cet ensemble comprend 0, et est stable par passage au successeur : c'est donc \mathbb{N} . □

Définition (Suite récurrente)

Dans le contexte de la proposition précédente, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est appelée *suite définie par la condition initiale $u_0 = \alpha$ et par la récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ (ou l'itératrice f)*. On dit aussi que c'est une suite *récurrente*.

5.c

Exercice (Suite récurrente)

Soit $f : x \mapsto \ln(1+x)$. Montrer que la suite (u_n) définie par la condition initiale $u_0 = 1$ et l'itératrice f est bien définie.

10

Attention, si f est une application d'une *partie* de E dans E , il se peut très bien que la suite récurrente ne soit pas définie pour tout entier. Si par exemple $f : x \mapsto \frac{1-x}{x}$ et $\alpha = \frac{1}{2}$. u_0, u_1 et u_2 sont bien définis, mais pas u_3 .

6. FEUILLE DE TD 2 : ENSEMBLES, RELATIONS BINAIRES, APPLICATIONS

6.1. ENSEMBLES

Exercice 1 (Description d'ensembles)

0

Décrire simplement les ensembles suivants : $\{x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, x \leq \varepsilon\}$, $\{x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, |x| \leq \varepsilon\}$, $\{x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, |x| < \varepsilon\}$.

Exercice 2 (Ensemble des parties d'un ensemble)

2

Décrire en extension $\mathcal{P}(\{a, b, c, d\})$ (où a, b, c et d sont des réels fixés), $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{0, 1\}))$. Combien ces ensembles ont-ils d'éléments ?

Exercice 3 (Relations ensemblistes entre ensembles de parties)

3

Soit A et B deux ensembles. Montrer que

$$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B),$$

mais que l'on peut avoir

$$\mathcal{P}(A \cup B) \neq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B).$$

Exercice 4 (Manipulations ensemblistes)

3

Soit E un ensemble et A, B, C trois parties de E telles que $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$. Montrer que $B = C$.

Indication : dans ce type d'exercice, vous pouvez rester au niveau des ensembles (ne manipuler que les ensembles, sans mentionner leurs éléments), ou revenir à leurs (éventuels) éléments.

6.2. RELATIONS BINAIRES

Exercice 5 (Structure de corps ordonné et nombres complexes)

1

1 Donner une relation d'ordre total sur \mathbb{C} .

2 Montrer que \mathbb{C} n'admet pas de *structure de corps totalement ordonné*, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de relation d'ordre total sur \mathbb{C} compatible avec les opérations du corps des nombres complexes.

3 Donner un ordre partiel sur \mathbb{C} compatible avec les opérations sur \mathbb{C} .

Exercice 6 (Une relation d'ordre sur un ensemble de fonctions)

2

Soit E un ensemble, $F = \mathbb{R}^E$. On introduit une relation \preccurlyeq sur F par

$$\forall (f, g) \in F^2, \quad (f \preccurlyeq g) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leq g(x)).$$

- 1 Montrer que \preccurlyeq est une relation d'ordre.
- 2 L'ordre défini est-il total ?
- 3 Soit $f \in F$. Les assertions « f est majorée » et « $\{f\}$ est majorée » sont-elles équivalentes ?
- 4 Soit $f, g \in F$. L'ensemble $\{f, g\}$ admet-il un plus grand élément ? une borne supérieure ?
- 5 Montrer que toute partie non vide et majorée de F admet une borne supérieure.

Exercice 7 (Relations d'équivalence)

3

On rappelle qu'une *relation d'équivalence* sur un ensemble E est une relation binaire réflexive, symétrique et transitive sur E . Pour une telle relation \sim , et x élément de E , on appelle *classe d'équivalence* de x (pour la relation \sim) l'ensemble des éléments de E équivalents à x .

- 1 Montrer que la relation sur \mathbb{R} définie par

$$(x \mathcal{R} y) \Leftrightarrow (x^2 - y^2 = x - y),$$

pour tous réels x et y , est une relation d'équivalence, et déterminer les classes d'équivalence pour cette relation.

- 2 Montrer que la relation \sim sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ définie par

$$(f \sim g) \Leftrightarrow (\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad f|_{[-\varepsilon, \varepsilon]} = g|_{[-\varepsilon, \varepsilon]}),$$

pour tout $(f, g) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{R}})^2$, est une relation d'équivalence.

- 3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la relation de congruence modulo n est une relation d'équivalence. Dénombrer les classes d'équivalence. pour cette relation.

- 4 Soit ∇ la relation définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x \nabla y) \Leftrightarrow ((x^3 + 2)(y^2 + 1) = (y^3 + 2)(x^2 + 1)).$$

Montrer que ∇ est une relation d'équivalence, et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, trouver le cardinal de la classe d'équivalence de x .

Exercice 8 (Un calcul de borne supérieure)

4

On introduit une relation \preccurlyeq sur \mathbb{R}^2 par

$$\forall ((x, y), (x', y')) \in (\mathbb{R}^2)^2, \quad ((x, y) \preccurlyeq (x', y')) \Leftrightarrow (|x' - x| \leq y' - y).$$

- 1 Montrer que l'on définit ainsi une relation d'ordre sur \mathbb{R}^2 .
- 2 L'ordre défini est-il total ?
- 3 Montrer que le disque unité fermé admet une borne supérieure dans \mathbb{R}^2 , et déterminer celle-ci. Ce disque admet-il un plus grand élément ?

6.3. GÉNÉRALITÉS SUR LES APPLICATIONS

Les lettres E, F, G désignent des ensembles.

Exercice 9 (Composition, injectivité, surjectivité)

0

Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications.

- 1 Montrer que si $g \circ f$ est injective et f surjective, alors g est injective.
- 2 Montrer que si $g \circ f$ est surjective et g injective, alors f est surjective.

Exercice 10 (Inverse à droite, inverse à gauche)

1

On dit qu'une application $f : E \rightarrow F$ est *inversible à gauche* (resp. *inversible à droite*) s'il existe une fonction $g : F \rightarrow E$ (resp. $h : F \rightarrow E$) telle que $g \circ f = \text{Id}_E$ (resp. $f \circ h = \text{Id}_F$). On dit que f est *inversible* si elle est inversible à gauche et à droite.

- 1 Montrer que si f est inversible à gauche d'inverse g et inversible à droite d'inverse h , alors $g = h$.
- 2 Montrer que f est bijective si et seulement si elle est inversible.
- 3 Montrer que si $f : E \rightarrow E$ est une involution (*i.e.* $f \circ f = \text{Id}_E$), alors elle est bijective, et donner sa bijection réciproque.
- 4 Montrer plus généralement que si $f : E \rightarrow E$ vérifie $f^n = \text{Id}_E$ (f composée n fois) pour un certain entier naturel $n \geq 2$, alors f est bijective, et donner sa bijection réciproque.
- 5 Donner un exemple d'application admettant un inverse à droite mais pas à gauche (resp. un inverse à gauche mais pas à droite).

Exercice 11 (Parties paire et impaire d'une fonction)

1

Soit I un intervalle centré en 0, f une application de I dans \mathbb{R} .

- 1 Montrer que f s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire f_p et d'une fonction impaire f_i , appelées respectivement *partie paire* et *partie impaire* de f .
- 2 Que dire des applications partie paire et partie impaire ainsi définies de \mathbb{R}^I dans lui-même ?

Exercice 12 (Produit cartésien, injectivité, surjectivité)

2

Soit $f : E \rightarrow F$, $g : E \rightarrow G$ deux applications. On considère l'application h de E dans $F \times G$, définie par : $h(x) = (f(x), g(x))$, pour tout $x \in E$.

- 1 Montrer que si f ou g est injective, alors h est injective.
- 2 On suppose f et g surjectives. L'application h est-elle nécessairement surjective ?

Exercice 13 (Caractérisations de la surjectivité)

3

Soit f une application de E dans F . Établir l'équivalence des assertions suivantes :

- (1) f est surjective ;
- (2) $\forall y \in F, f(f^{-1}(\{y\})) = \{y\}$;
- (3) $\forall Y \in \mathcal{P}(F), f(f^{-1}(Y)) = Y$;
- (4) $\forall Y \in \mathcal{P}(F), (f^{-1}(Y) = \emptyset) \Rightarrow (Y = \emptyset)$.

Exercice 14 (Suite récurrente bien définie)

0

1 Montrer qu'il existe une unique suite (u_n) de nombres réels telle que $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{-1}{1 + u_n}.$$

2 Même question pour les conditions $v_0 = 2$ et $v_{n+1} = 1 + \ln(v_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3 Même question pour les conditions $w_0 = 0$ et $w_{n+1} = \sqrt{2 - w_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 15 (Raisonnement par récurrence)

0

1 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.

2 Soit $x \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $p \in \mathbb{N}^*$ divise $x^2 - x$, alors p divise $x^n - x$.

3 Montrer que pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \mathbb{N}$, le nombre $m^{2r+1} + n^{2r+1}$ est divisible par $m + n$.

4 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0, u_1 = 0, u_2 = 2$, et

$$u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que pour tout entier naturel, $u_n = n(n - 1)$.

5 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\prod_{k=0}^n (2k + 1) = \frac{(2n + 1)!}{2^n n!}.$$

Exercice 16 (Inégalité arithmético-géométrique : une preuve de Cauchy)

2

Pour tout entier naturel supérieur ou égal à 2, on formule l'hypothèse de récurrence suivante (appelée *inégalité arithmético-géométrique* pour n réels positifs) :

$$(\mathcal{H}_n) : \quad \forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}_+^n, \quad \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

(1) Montrer \mathcal{H}_2 ;

(2) Montrer, pour tout entier $n \geq 2$, l'implication $\mathcal{H}_n \Rightarrow \mathcal{H}_{n-1}$;

(3) Montrer, pour tout entier $n \geq 2$, l'implication $(\mathcal{H}_n \wedge \mathcal{H}_2) \Rightarrow \mathcal{H}_{2n}$;

(4) En déduire que \mathcal{H}_n est vraie, pour tout $n \geq 2$.

Nombres complexes

Sommaire

1. Le corps des nombres complexes	56
1.1. Premières définitions	56
1.2. Image d'un nombre complexe dans le plan	56
1.3. La conjugaison complexe	57
1.4. Module d'un nombre complexe	58
2. L'exponentielle complexe	61
2.1. Le groupe \mathbb{U} des nombres complexes de module 1	61
2.2. Une notation commode	61
2.3. Applications de la notation exponentielle à la trigonométrie	62
2.4. Arguments d'un nombre complexe non nul	64
2.5. La fonction exponentielle complexe	65
3. Nombres complexes et géométrie	66
4. Équations polynomiales complexes	68
4.1. Le théorème fondamental de l'algèbre	68
4.2. Racines carrées d'un nombre complexe	69
4.3. Équations du second degré	69
4.4. Racines n -ièmes de l'unité	69
4.5. Résolution de l'équation $z^n = a$	71
5. Fonctions trigonométriques	72
5.1. Domaine de définition et régularité	72
5.2. Équations simples	72
5.3. Relations fonctionnelles	72
5.4. Représentation paramétrique rationnelle du cercle trigonométrique privé de -1	73
5.5. Dérivées successives des fonctions sinus et cosinus	73
5.6. Dérivées de tangente et cotangente	74
La notation exponentielle	74
6. Une construction de \mathbb{C}	76
7. Questionnaire 1 : Complexes	80
8. Feuille de TD 3 : Nombres complexes	81
8.1. Nombres complexes et géométrie	81
8.2. Module, argument, forme exponentielle	81
8.3. Trigonométrie	82
8.4. Racines de l'unité	83
8.5. Équations algébriques	84

Les nombres complexes sont essentiellement les nombres que l'on peut former, à l'aide des opérations algébriques usuelles, à partir des nombres réels et d'un hypothétique nombre de carré -1 . Contrairement à ce que l'on aurait pu penser, l'introduction d'un tel nombre ne soulève pas de contradiction, et les calculs s'effectuent de manière standard.

On suppose connues les définitions et propriétés élémentaires des fonctions sinus, cosinus (continuité, dérivabilité, formules d'addition). Voir la section 5 à ce sujet pour des compléments, notamment l'introduction de la fonction tangente.

Ce chapitre donne l'occasion de reprendre le cours de Terminale (que je vous invite à relire), mais de manière plus abstraite, notamment en insistant sur la notion de morphisme.

La difficulté des exercices sur les nombres complexes provient sans doute des diverses manières de les représenter : l'algébrique, l'exponentielle, la géométrique, et la « neutre ». Je vous invite à bien réfléchir, au long du cours et surtout des TD, aux avantages et inconvénients de ces diverses représentations selon la situation rencontrée.

1. LE CORPS DES NOMBRES COMPLEXES

1.1. PREMIÈRES DÉFINITIONS

Définition (Corps des nombres complexes)

On appelle *corps des nombres complexes* tout surcorps \mathbb{C} de \mathbb{R} vérifiant les propriétés suivantes :

- \mathbb{C} possède (au moins) un élément dont le carré vaut -1 . Nous choisissons un tel élément, et le notons i ;
- Tout nombre complexe z peut s'écrire de manière unique sous la forme :

$$a + ib,$$

où a et b sont des nombres réels, respectivement appelés *partie réelle* et *partie imaginaire* du nombre complexe z , et respectivement notés $\operatorname{Re} z$ et $\operatorname{Im} z$. Cette écriture est appelée la *notation algébrique* (ou *cartésienne*) du nombre complexe z .

1.a

Définition (Nombre imaginaire pur)

Un nombre complexe de partie réelle nulle est dit *imaginaire pur*. Leur ensemble est noté $i\mathbb{R}$, de sorte que :

$$i\mathbb{R} = \{i \cdot r, r \in \mathbb{R}\}.$$

1.b

Il existe (au moins) un corps des nombres complexes, la preuve est donnée en 6.

1.2. IMAGE D'UN NOMBRE COMPLEXE DANS LE PLAN

L'unicité d'écriture d'un nombre complexe sous la forme algébrique $z = \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z)$ fournit immédiatement une bijection de \mathbb{C} sur \mathbb{R}^2 (c'est d'ailleurs en partant de cette bijection que nous avons défini le corps des nombres complexes). On munit le plan euclidien d'un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) . Étant donné deux points A et B du plan, on notera AB ou $d(A, B)$ la longueur du segment $[AB]$, qui est aussi la norme $\|\vec{AB}\|$ du vecteur \vec{AB} .

Définition (Image et affixe)

Pour tout nombre complexe z , on appelle *image* de z le point du plan euclidien de coordonnées $(\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z))$ dans (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Si M (resp \vec{v}) est un point (resp. un vecteur) du plan de couple de coordonnées (a, b) , alors l'*affixe* de M (resp. de \vec{v}) est le nombre complexe $a + ib$.

1.c

En particulier, si z et z' sont deux nombres complexes quelconques, d'images respectives M et M' , alors l'affixe du vecteur $\vec{MM'}$ est le nombre complexe $z' - z$.

Illustration

1.3. LA CONJUGAISON COMPLEXE

Définition (Conjugaison complexe)

Pour tout nombre complexe $z = a + ib$ mis sous forme algébrique, on note \bar{z} et appelle *conjugué* de z le nombre complexe $a - ib$. On définit ce faisant une application de \mathbb{C} dans lui-même, appelée *conjugaison complexe*.

1.d

Proposition (La conjugaison est un automorphisme)

La conjugaison est un automorphisme du corps des nombres complexes, laissant \mathbb{R} invariant, *i.e.* la conjugaison définit une application de \mathbb{C} dans lui-même, bijective, laissant fixe tout réel, et vérifiant, pour tous complexes z et z' :

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}' \quad \text{et} \quad \overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'$$

1.a

Démonstration

□

On déduit de la proposition précédente, et de calculs élémentaires :

Proposition (Propriétés de la conjugaison complexe)

Pour tous nombres complexes z et z' :

- $\overline{z - z'} = \bar{z} - \bar{z}'$;
- si z' est non nul, alors : $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$;
- $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ et $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$;
- z est réel si et seulement si $z = \bar{z}$;
- z est imaginaire pur si et seulement si $z = -\bar{z}$.

1.b

La transformation géométrique du plan euclidien correspondant à la conjugaison est la symétrie orthogonale d'axe (O, \vec{i}) :

Illustration

Exercice (Demi-plan de Poincaré)

Le *demi-plan de Poincaré* est l'ensemble \mathbb{H} des nombres complexes de partie imaginaire strictement positive. Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $ad - bc = 1$.

1 Montrer que pour tout $z \in \mathbb{H}$, $\frac{az+b}{cz+d} \in \mathbb{H}$.

2 Soit \mathbb{H}^- l'ensemble des nombres complexes de partie imaginaire strictement négative. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{H}^-$, $\frac{az+b}{cz+d} \in \mathbb{H}^-$.

1

1.4. MODULE D'UN NOMBRE COMPLEXE

Définition (Module d'un nombre complexe)

Pour tout nombre complexe z de forme algébrique $a + ib$, le *module* de z est le nombre réel $\sqrt{a^2 + b^2}$. Il est noté $|z|$.

1.e

Le module d'un nombre complexe z d'image M est donc la distance OM .

Plus généralement, pour tous nombres complexes z, z' , d'images respectives M et M' , on a : $|z' - z| = MM' = d(M, M') = \left\| \overrightarrow{MM'} \right\|$;

Pour tout nombre réel x , le module de x est égal à la valeur absolue de x , et il n'y a donc pas de conflit de notations.

Pour tout nombre complexe z , on a : $|\bar{z}| = |z|$, $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$, $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$. On a l'égalité $|\operatorname{Re}(z)| = |z|$ si et seulement si z est réel, et l'égalité $\operatorname{Re}(z) = |z|$ si et seulement si z est un réel positif ou nul.

Exemple (Cercles et disques en complexes)

Soit A un point du plan euclidien d'affixe a , et R un réel strictement positif. Les images des trois ensembles $\{z \in \mathbb{C}, |z - a| = R\}$, $\{z \in \mathbb{C}, |z - a| < R\}$ et $\{z \in \mathbb{C}, |z - a| \leq R\}$ dans le plan euclidien sont respectivement le cercle, le disque ouvert, et le disque fermé, de centre A et de rayon R .

i

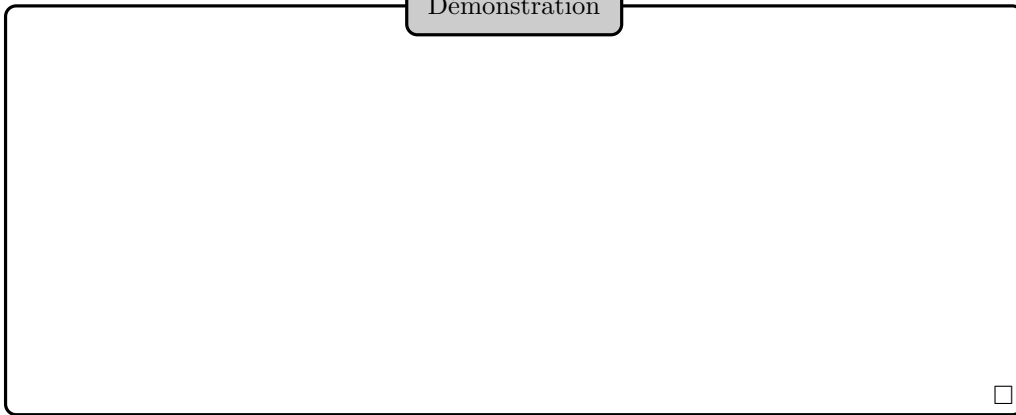
Proposition (Propriétés multiplicatives du module)

Pour tous nombres complexes z et z' , on a :

- (1) $|z|^2 = z\bar{z}$;
- (2) $|zz'| = |z||z'|$;
- (3) Si $z' \neq 0$, alors $|\frac{z}{z'}| = \frac{|z|}{|z'|}$;
- (4) Si z est non nul, alors, pour tout entier relatif n : $|z|^n = |z^n|$.

1.c

Démonstration



On utilise la première formule pour donner la forme algébrique d'un quotient (technique de la multiplication par la quantité conjuguée).

L'application module définit un morphisme

L'application de \mathbb{C}^* dans \mathbb{R}_+^* qui à z associe son module $|z|$ est donc un morphisme de groupes (multiplicatifs), *i.e.* :

1.1

Proposition (Propriétés additives du module)

Pour tous nombres complexes z et z' , on a :

- (1) $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (*première inégalité triangulaire*) ;
- (2) Cette inégalité est une égalité si et seulement si z et z' sont positivement liés, *i.e.* il existe un réel positif ou nul λ tel que $z' = \lambda z$ ou $z = \lambda z'$;
- (3) On a aussi : $||z| - |z'|| \leq |z + z'|$ (*seconde inégalité triangulaire*).

1.d

Une autre version de la seconde inégalité triangulaire est : $||z| - |z'|| \leq |z - z'|$.

Démonstration

Soit z et z' deux complexes quelconques. Pour prouver la première inégalité triangulaire, il faut et il suffit de prouver :

$$|z + z'|^2 \leq (|z| + |z'|)^2$$

(puisque $|z + z'|$ et $|z| + |z'|$ sont des réels positifs ou nuls). D'une part :

$$|z + z'|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(\bar{z}z') + |z'|^2,$$

et, d'autre part :

$$(|z| + |z'|)^2 = |z|^2 + 2|z||z'| + |z'|^2.$$

Or $\operatorname{Re}(\bar{z}z') \leq |\bar{z}z'| = |z||z'|$, et l'inégalité triangulaire est prouvée. De plus, il y a égalité si et seulement si

$$\operatorname{Re}(\bar{z}z') = |z||z'|,$$

c'est-à-dire $\bar{z}z' \in \mathbb{R}_+$.

Supposons que ce soit le cas : si $z \neq 0$, on peut exprimer z' comme multiple de z par un réel positif ou nul ($z' = \frac{\bar{z}z'}{|z|^2}z$), et, si $z = 0$, alors on a $z = 0z'$. Dans tous les cas, on a l'existence d'un réel positif λ comme annoncé.

Réciproquement, si on a cette condition, il y a clairement égalité (ou, si on préfère, clairement $\bar{z}z' \in \mathbb{R}_+$).

La seconde inégalité triangulaire résulte de la première en écrivant $z = z + z' - z'$, et $z' = z + z' - z$.

□

Interprétation géométrique de l'inégalité triangulaire

Cette inégalité tire son nom de sa reformulation en termes géométriques.

Illustration

1.2

Exercice (Ensemble décrit par des égalités de modules)

Décrire l'ensemble des nombres complexes z tels que z , $\frac{1}{z}$ et $z - 1$ aient même module.

2

Exercice (Ensemble stable par produit)

On considère le sous-ensemble Λ de \mathbb{N} suivant :

$$\Lambda = \{n \in \mathbb{N}, \exists (a, b) \in \mathbb{N}^2, n = a^2 + b^2\}$$

Montrer que Λ est stable par multiplication, *i.e.* :

$$\forall (n, n') \in \Lambda^2, nn' \in \Lambda.$$

L'ensemble Λ est-il stable par addition ?

3

2. L'EXPONENTIELLE COMPLEXE

2.1. LE GROUPE \mathbb{U} DES NOMBRES COMPLEXES DE MODULE 1

Définition (Groupe des nombres complexes de module 1)

L'ensemble $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$, muni de la multiplication complexe, est un groupe commutatif, appelé *groupe des nombres complexes de module 1*.

L'image de \mathbb{U} dans le plan est appelé *cercle unité* (ou *cercle trigonométrique*).

2.a

Démonstration

□

2.2. UNE NOTATION COMMUNE

Notation (Exponentielle complexe)

Pour tout nombre réel θ , on pose

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta).$$

2.b

Exemple (Calculs d'exponentielles complexes)

$$e^{i\pi} = -1 \text{ (formule d'Euler); } e^{i\frac{\pi}{2}} = i; e^{3i\frac{\pi}{2}} = -i; e^{2i\pi} = 1; e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}; e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$$

i

En mathématiques, on note souvent j le nombre $e^{2i\pi/3} (= -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Proposition (Le morphisme exponentiel complexe)

L'application $\mathcal{E} : \theta \mapsto e^{i\theta}$ est un morphisme surjectif du groupe $(\mathbb{R}, +)$ dans le groupe (\mathbb{U}, \cdot) , de noyau $2\pi\mathbb{Z}$:

- $\forall \theta \in \mathbb{R}, |e^{i\theta}| = 1$;
- $\forall \theta, \theta' \in \mathbb{R}, e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} e^{i\theta'}$.
- $\forall z \in \mathbb{U}, \exists \theta \in \mathbb{R}, e^{i\theta} = z$;
- $\forall \theta \in \mathbb{R}, (e^{i\theta} = 1) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}, \theta = 2k\pi)$.

2.a

Démonstration

□

Proposition (Formule de Moivre)

Pour tout réel θ , et tout entier relatif n :

$$(e^{i\theta})^n = (e^{in\theta}),$$

soit encore :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)).$$

2.b

Démonstration

□

2.3. APPLICATIONS DE LA NOTATION EXPONENTIELLE À LA TRIGONOMÉTRIE

Rappel (Formule du binôme de Newton)

si a et b sont deux nombres complexes, alors on a, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Relations d'Euler

Pour tout réel θ :

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

2.1

Méthode (Linéarisation)

Pour linéariser un polynôme en cosinus et sinus, on peut partir des relations d'Euler (et de la formule du binôme de Newton).

2.2

Exercice (Un exemple de linéarisation)

Linéariser \cos^3 (réponse : $x \mapsto \frac{1}{4} \cos(3x) + \frac{3}{4} \cos x$).

4

Méthode (Opération inverse de la linéarisation)

Pour exprimer un cosinus ou un sinus d'un angle multiplié sous forme d'un polynôme en cosinus et sinus, on peut partir de la formule de Moivre (et de la formule du binôme de Newton).

2.3

Exercice (Exemples de délinéarisation)

Exprimer $x \mapsto \cos(5x)$ et $x \mapsto \sin(5x)$ comme polynômes de cosinus et sinus.

5

Plus généralement, la notation exponentielle permet de retrouver les formules de trigonométrie données au chapitre ??, notamment en utilisant l'« astuce de l'angle moitié ».

Méthode (Astuce de l'angle moitié)

Quand on étudie une expression de la forme $e^{i\alpha} \pm e^{i\beta}$, on a souvent intérêt à factoriser par $e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$.

2.4

Exercice (Somme de deux cosinus)

Retrouver les formules avec $\cos x + \cos y$ et $\sin x + \sin y$ en appliquant l'astuce de l'angle moitié à $e^{ix} + e^{iy}$.

6

Exercice (Calculs de sommes trigonométrique)

Faire l'exercice 16.

7

2.4. ARGUMENTS D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL

Définition (Arguments d'un nombre complexe non nul)

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On appelle *argument* du nombre complexe non nul z tout réel θ tel que : $z = |z|e^{i\theta}$. Si θ_0 est un argument de z , alors on note :

$$\arg z \equiv \theta_0 [2\pi].$$

L'unique argument de z appartenant à l'intervalle $] -\pi, \pi]$ est l'*argument principal* de z .

2.c

Tout nombre complexe non nul admet une infinité d'arguments, mais 0 n'en a pas.

Soit z un nombre non nul. Si θ_0 est un argument de z , alors l'ensemble des arguments de z est :

$$\theta_0 + 2\pi\mathbb{Z} = \{\theta_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Si \vec{v} est le vecteur d'affixe z , alors un argument de z n'est rien d'autre qu'une mesure de l'angle $\widehat{(\vec{i}, \vec{v})}$;

Définition (Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul)

Soit z un nombre complexe non nul. L'écriture de z sous la forme $\rho e^{i\theta}$, où $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ est la *forme exponentielle* (ou *forme trigonométrique*) du nombre complexe non nul z .

2.d

Illustration

Tout nombre complexe non nul admet une forme exponentielle, unique au choix de l'argument près. Dans le contexte de la définition précédente, on a $\rho = |z|$, et θ est un argument de z (et réciproquement). Ce n'est pas parce que l'on a une écriture sous la forme $z = ae^{ix}$, où $(a, x) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, qu'il s'agit de la forme trigonométrique de z . En effet, ceci n'est pas le cas si $a < 0$. Dans ce dernier cas, on obtient la forme trigonométrique en écrivant : $z = (-a)e^{i(x+\pi)}$. 0 n'a pas de forme exponentielle.

Proposition (Propriétés des arguments)

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls, d'arguments respectifs θ et θ' .

- (1) Un argument de \bar{z} est $-\theta$;
- (2) Un argument de zz' est $\theta + \theta'$;
- (3) Un argument de $\frac{z}{z'}$ est $\theta - \theta'$;
- (4) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, un argument de z^n est $n\theta$.

2.c

Démonstration

□

Formules abusives pour les arguments

On écrira, de manière abusive, des formules telles que :

$$\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') [2\pi].$$

2.5

Exercice (Caractérisation d'une égalité de modules)

Montrer que deux nombres complexes z et z' distincts ont même module si et seulement si :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, z + z' = \lambda i (z - z').$$

8

2.5. LA FONCTION EXPONENTIELLE COMPLEXE

Définition (Exponentielle complexe)

Pour tout nombre complexe $z = a + ib$ mis sous sa forme algébrique, on pose :

$$e^z := e^a e^{ib}$$

La fonction ainsi définie, de \mathbb{C} dans \mathbb{C} , est appelée *fonction exponentielle complexe*.

2.e

Proposition (Propriétés fondamentales de l'exponentielle complexe)

La fonction exponentielle complexe est un morphisme surjectif du groupe additif \mathbb{C} sur le groupe multiplicatif \mathbb{C}^* , de noyau $2i\pi\mathbb{Z}$:

- (1) $\forall z \in \mathbb{C}, e^z \in \mathbb{C}^*$;
- (2) $\forall z, z' \in \mathbb{C}, e^{z+z'} = e^z e^{z'}$;
- (3) $\forall u \in \mathbb{C}^*, \exists z \in \mathbb{C}, u = e^z$;
- (4) $\forall z \in \mathbb{C}, e^z = 1 \Leftrightarrow z \in 2i\pi\mathbb{Z}$.

De plus, l'application exponentielle est périodique, de période $2i\pi$, *i.e.*

$$\forall z \in \mathbb{C}, e^{z+2i\pi} = e^z,$$

et commute avec la conjugaison, *i.e.*

$$\forall z \in \mathbb{C}, \overline{e^z} = e^{\bar{z}}.$$

2.d

Démonstration

□

Antécédents d'un nombre complexe non nul par l'exponentielle

Si $u = \rho e^{i\theta}$ est un nombre complexe non nul mis sous sa forme trigonométrique, alors $z_0 = \ln(\rho) + i\theta$ est un antécédent de u par la fonction exponentielle. Les autres antécédents sont les nombres z tels que $z - z_0 \in 2i\pi\mathbb{Z}$, noyau de l'application exponentielle.

2.6

3. NOMBRES COMPLEXES ET GÉOMÉTRIE

Nous avons vu que la conjugaison complexe correspondait géométriquement à la symétrie orthogonale d'axe celui des abscisses.

Distances, angles, et complexes

Soit $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$. Soit $z \in \mathbb{C} - \{a, b\}$, et A, B, M les images respectives de a, b, z . Alors :

$$\left| \frac{z-a}{z-b} \right| = \frac{MA}{MB}$$

$$\arg \frac{z-a}{z-b} = (\widehat{BM, AM})$$

3.1

En particulier :

- A, B, M sont alignés si et seulement si $\frac{z-a}{z-b} \in \mathbb{R}$;
- \overrightarrow{AM} et \overrightarrow{BM} sont orthogonaux si et seulement si $\frac{z-a}{z-b} \in i\mathbb{R}$.

On généralise aisément ces formules au cas de quatre points A, B, C, D .

Descriptions paramétriques complexes des droites et des segments

Soit $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$, d'images respectives A et B . L'ensemble $\{\lambda a + (1 - \lambda)b, \lambda \in \mathbb{R}\}$ correspond à la droite (AB) (la droite (AB) est l'ensemble des barycentres des points A et B). L'ensemble $\{\lambda a + (1 - \lambda)b, \lambda \in [0, 1]\}$ correspond au segment $[AB]$ (le segment $[AB]$ est l'ensemble des barycentres des points A et B affectés de poids positifs).

3.2

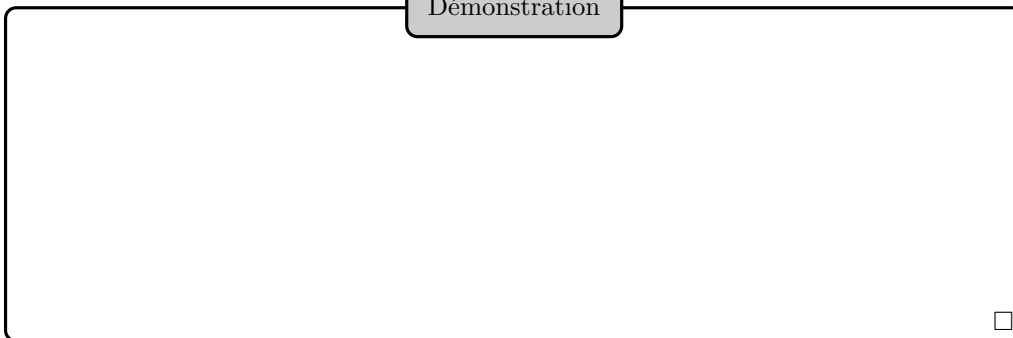
Proposition (Similitudes directes et nombres complexes)

L'application $\varphi : z \mapsto az + b$, correspond, selon les valeurs des complexes a et b , à la transformation géométrique Φ suivante :

- Si $a = 0$, tout point du plan est envoyé sur un même point d'affixe b (application constante) ;
- Si $a = 1$, Φ est la translation de vecteur \vec{v} d'affixe b ;
- Si $a \notin \{0, 1\}$, Φ est la similitude directe de centre Ω d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$, de rapport $|a|$, et d'angle $\arg a$.

3.a

Démonstration



En particulier, dans le dernier cas :

- Si $b = 0$ la similitude directe est de centre O ;
- Si $a \in \mathbb{R}$, Φ est une homothétie ;
- Si $|a| = 1$, alors Φ est une rotation ;

Φ est une symétrie centrale si et seulement si $a = -1$.

Exercice (Composée de deux symétries centrales)

Montrer que la composée de deux symétries centrales est une translation.

9

Application inverse géométrique

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On obtient l'image de $\frac{1}{z}$ en effectuant une symétrie orthogonale par rapport l'axe des abscisses, puis ce que l'on appelle une *inversion* de centre O .

Illustration

3.3

4. ÉQUATIONS POLYNOMIALES COMPLEXES

4.1. LE THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ALGÈBRE

On admet :

Théorème fondamental de l'algèbre (ou de d'Alembert-Gauss)

Tout polynôme non constant à coefficients complexes admet une racine complexe.

4.a

Corollaire (Décomposition en produit d'irréductibles d'un polynôme complexe)

Tout polynôme non constant à coefficients complexes se décompose en produit de polynômes de degré 1.

4.b

Nombre de racines d'un polynôme complexe

Un polynôme complexe non nul de degré n admet au plus n racines (en fait exactement n si on les compte avec multiplicité).

4.1

On « rappelle » que si $X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$ est un polynôme unitaire de degré n à coefficients complexes, alors a_{n-1} est l'opposé de la somme de ses racines, et a_0 est le produit de ces racines si n est pair, l'opposé sinon.

Par exemple (à connaître), les racines du polynôme $X^2 - SX + P$ ont pour somme S et pour produit P .

4.2. RACINES CARRÉES D'UN NOMBRE COMPLEXE

Nous savons déjà exprimer les racines carrées d'un nombre complexe non nul mis sous sa forme trigonométrique. L'objet de ce paragraphe est de montrer comment procéder dans le cas où le nombre est donné sous sa forme algébrique.

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}^*$ ($a, b \in \mathbb{R}$). D'après le théorème fondamental de l'algèbre, z admet deux racines carrées distinctes.

Méthode (Racines carrées d'un nombre complexe non nul)

On cherche u, v réels tels que $(u + iv)^2 = a + ib$, équation équivalente au système :

$$\begin{cases} u^2 - v^2 = a \\ 2uv = b \end{cases}$$

Plutôt que de partir de ce système, on ajoute l'équation obtenue en égalant les modules :

$$u^2 + v^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Nous résolvons d'abord le système de deux équations à deux « inconnues » u^2 et v^2 , et nous déterminons les valeurs possibles de u et v avec l'équation restante (qui donne le signe de uv).

4.2

Racine carrée d'un complexe

Attention ! La notation \sqrt{z} n'a de sens que si z est un *nombre réel positif*.

4.3

Exercice (Exemple de recherche de racines carrées)

Déterminer par cette méthode les racines carrées de $3 - 4i$.

10

4.3. ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

On sait que toute équation du second degré à coefficients complexes admet deux racines (éventuellement confondues). Voyons comment les calculer :

Méthode (Résolution d'une équation du second degré)

La mise sous la forme canonique d'une équation du second degré est toujours possible dans \mathbb{C} . Le discriminant de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ (où $a \neq 0$) est

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- Si $\Delta = 0$, l'unique solution de l'équation est $-\frac{b}{2a}$;
- Si $\Delta \neq 0$, on introduit alors δ tel que $\delta^2 = \Delta$. Les deux solutions de l'équation sont alors $\frac{-b+\delta}{2a}$ et $\frac{-b-\delta}{2a}$.

4.4

Exercice (Exemple de factorisation d'un polynôme complexe)

Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme : $X^4 + 6X^2 + 25$.

11

4.4. RACINES n -IÈMES DE L'UNITÉ

Définition (Racines n -ième de l'unité)

Pour tout entier naturel non nul n , on appelle *racine n -ième de l'unité* tout nombre complexe z vérifiant $z^n = 1$. On note \mathbb{U}_n leur ensemble.

4.a

Il y a donc au plus n racines n -ièmes de l'unité, toute racine n -ième de l'unité est élément de \mathbb{U} . De plus, si z (resp. z') est racine n -ième (resp. m -ième) de l'unité, alors zz' est racine ppcm(n, m) de l'unité (et peut-être bien mieux). Si z est une racine n -ième de l'unité, il en est de même pour son inverse.

Exemple (Racines de l'unité)

- Les racines cubiques de l'unité sont $1, j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, et $j^2 = \bar{j} = \frac{1}{j}$. On remarque par simple calcul que $1 + j + j^2 = 0$;
- Les racines quatrièmes de l'unité sont $1, -1, i, -i$.

i

Proposition (Description des racines n -ièmes de l'unité)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- (1) Pour tout entier naturel positif n , il existe exactement n racines n -ièmes de l'unité. On a :

$$\mathbb{U}_n = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \{1, \dots, n\}\}$$

- (2) \mathbb{U}_n est un sous-groupe de \mathbb{U} .

4.c

Démonstration

□

Les images des éléments de \mathbb{U}_n forment un polygone régulier à n côtés.

Illustration

Autres description de l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité

On peut également écrire, entre autres :

$$\mathbb{U}_n = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \{0, \dots, n-1\}\} = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \mathbb{Z}\}.$$

4.5

Exercice (Somme et produit des racines de l'unité)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer somme et produit des racines n -ièmes de l'unité.

12

4.5. RÉOLUTION DE L'ÉQUATION $z^n = a$ Définition (Racine n -ième de a)

Soit a un nombre complexe non nul, et n un entier naturel non nul. On appelle *racine n -ième de a* tout nombre complexe z tel que : $z^n = a$.

4.b

Proposition (Description des racines n -ièmes de a)

Soit $a = \rho e^{i\theta}$ un nombre complexe non nul mis sous sa forme trigonométrique.

- (1) Le nombre $\rho^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}}$ est une racine n -ième de a .
- (2) Il existe exactement n racines n -ièmes de a . Elles s'obtiennent en multipliant une racine n -ième donnée z_0 de a par les différentes racines n -ièmes de l'unité ;
- (3) L'ensemble des racines n -ièmes de a peut s'écrire :

$$\{\rho^{\frac{1}{n}} e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})}, k \in \{1, \dots, n\}\}$$

4.d

Images des racines n -ièmes de a

Les images des racines n -ièmes de a forment un polygone régulier à n côtés.

4.6

Factorisation de $X^n - a$

Le polynôme $X^n - a$ se factorise en $\prod_{k=1}^n (X - z_k)$, où $z_k = \rho^{\frac{1}{n}} e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})}$.

4.7

5. FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

5.1. DOMAINE DE DÉFINITION ET RÉGULARITÉ

Les fonctions cosinus, sinus sont définies, continues et indéfiniment dérivables sur \mathbb{R} . Elles sont 2π -périodiques. Leur image commune est le segment $[-1; 1]$. L'ensemble d'annulation de la fonction cosinus est $\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, celui de sinus est $\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

La fonction tangente est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Elle est continue et indéfiniment dérivable sur son ensemble de définition, et π -périodique. Sa restriction à $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ réalise une bijection strictement croissante de $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ sur \mathbb{R} .

La fonction cotangente, quotient de la fonction cosinus par la fonction sinus, est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Elle est continue et indéfiniment dérivable sur son ensemble de définition, et π -périodique. Sa restriction à $]0; \pi[$ réalise une bijection strictement décroissante de $]0; \pi[$ sur \mathbb{R} .

5.2. ÉQUATIONS SIMPLES

On considère deux réels x, y , et on donne les solutions d'équations simples sous forme de tableaux.

x vérifie	$\cos(x) = 1$	$\cos(x) = 0$	$\cos(x) = \cos(y)$
$\exists k \in \mathbb{Z}$,	$x = 2k\pi$	$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$	$x = \pm y + 2k\pi$

Par exemple, $\cos(x) = \frac{1}{2}$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

x vérifie	$\sin(x) = 1$	$\sin(x) = 0$	$\sin(x) = \sin(y)$
$\exists k \in \mathbb{Z}$,	$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$	$x = k\pi$	$x = y + 2k\pi$ ou $x = \pi - y + 2k\pi$

Par exemple, $\sin(x) = \frac{1}{2}$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$.

x vérifie	$\tan(x) = 1$	$\tan(x) = 0$	$\tan(x) = \tan(y)$
$\exists k \in \mathbb{Z}$,	$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$	$x = k\pi$	$x = y + k\pi$

5.3. RELATIONS FONCTIONNELLES

Les relations suivantes sont valables pour tous réels x et y , sauf mention expresse du contraire. Les fonctions cosinus et sinus vérifient la relation fondamentale

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1,$$

dont découle la relation suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}, 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

5.3.1. *Relations issues de transformations géométriques.* Les fonctions sinus et cosinus sont respectivement impaire et paire. Il en résulte que tangente et cotangente sont impaires.

Retenir que l'application $x \mapsto \frac{\pi}{2} - x$ intervertit fonctions sinus et cosinus :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x), \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$$

De ceci découlent les formules suivantes :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x), \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x),$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin(x), \quad \cos(\pi + x) = -\cos(x),$$

$$\sin(\pi - x) = \sin(x), \quad \cos(\pi - x) = -\cos(x).$$

5.3.2. Images trigonométriques d'une somme ou d'une différence.

$$\cos(x + y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y)$$

$$\cos(x - y) = \cos(x) \cos(y) + \sin(x) \sin(y)$$

$$\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \sin(y) \cos(x)$$

$$\sin(x - y) = \sin(x) \cos(y) - \sin(y) \cos(x)$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x) \tan(y)} \quad (\text{lorsque tous ces termes ont un sens})$$

En particulier,

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2 \cos^2(x) - 1 = 1 - 2 \sin^2(x)$$

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$$

$$\tan(2x) = \frac{2 \tan(x)}{1 - \tan^2(x)} \quad (\text{lorsque tous ces termes ont un sens})$$

5.3.3. Produit de fonctions sinus et cosinus.

$$\cos(x) \cos(y) = \frac{1}{2} (\cos(x + y) + \cos(x - y))$$

$$\sin(x) \sin(y) = \frac{1}{2} (\cos(x - y) - \cos(x + y))$$

$$\sin(x) \cos(y) = \frac{1}{2} (\sin(x + y) + \sin(x - y))$$

5.3.4. Somme de fonctions sinus et cosinus.

$$\cos(x) + \cos(y) = 2 \cos\left(\frac{x + y}{2}\right) \cos\left(\frac{x - y}{2}\right)$$

$$\cos(x) - \cos(y) = -2 \sin\left(\frac{x + y}{2}\right) \sin\left(\frac{x - y}{2}\right)$$

$$\sin(x) + \sin(y) = 2 \sin\left(\frac{x + y}{2}\right) \cos\left(\frac{x - y}{2}\right)$$

$$\sin(x) - \sin(y) = 2 \sin\left(\frac{x - y}{2}\right) \cos\left(\frac{x + y}{2}\right)$$

5.4. REPRÉSENTATION PARAMÉTRIQUE RATIONNELLE DU CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE PRIVÉ DE -1

Soit $x \in]-\pi; \pi[$. On pose $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. On a alors :

$$\cos(x) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$\sin(x) = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$\tan(x) = \frac{2t}{1 - t^2}$$

Ceci permet de donner une représentation paramétrique du cercle trigonométrique privé de -1 , à l'aide des fonctions rationnelles $t \mapsto \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $t \mapsto \frac{2t}{1+t^2}$, où le paramètre t parcourt \mathbb{R} .

5.5. DÉRIVÉES SUCCESSIVES DES FONCTIONS SINUS ET COSINUS

Les formules

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x), \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x),$$

permettent d'écrire $\sin' = \sin \circ t$ et $\cos' = \cos \circ t$, où t est la translation dans \mathbb{R} de $\frac{\pi}{2}$ (i.e. $\forall x \in \mathbb{R}, t(x) = x + \frac{\pi}{2}$). On en déduit par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n \frac{\pi}{2}\right).$$

5.6. DÉRIVÉES DE TANGENTE ET COTANGENTE

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}, \quad \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}, \quad \cotan'(x) = -1 - \cotan^2(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$$

LA NOTATION EXPONENTIELLE

Formules d'Euler. Pour tout réel θ :

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Formule de Moivre. Pour tout réel θ , et tout entier relatif n :

$$(e^{i\theta})^n = (e^{in\theta}),$$

soit encore :

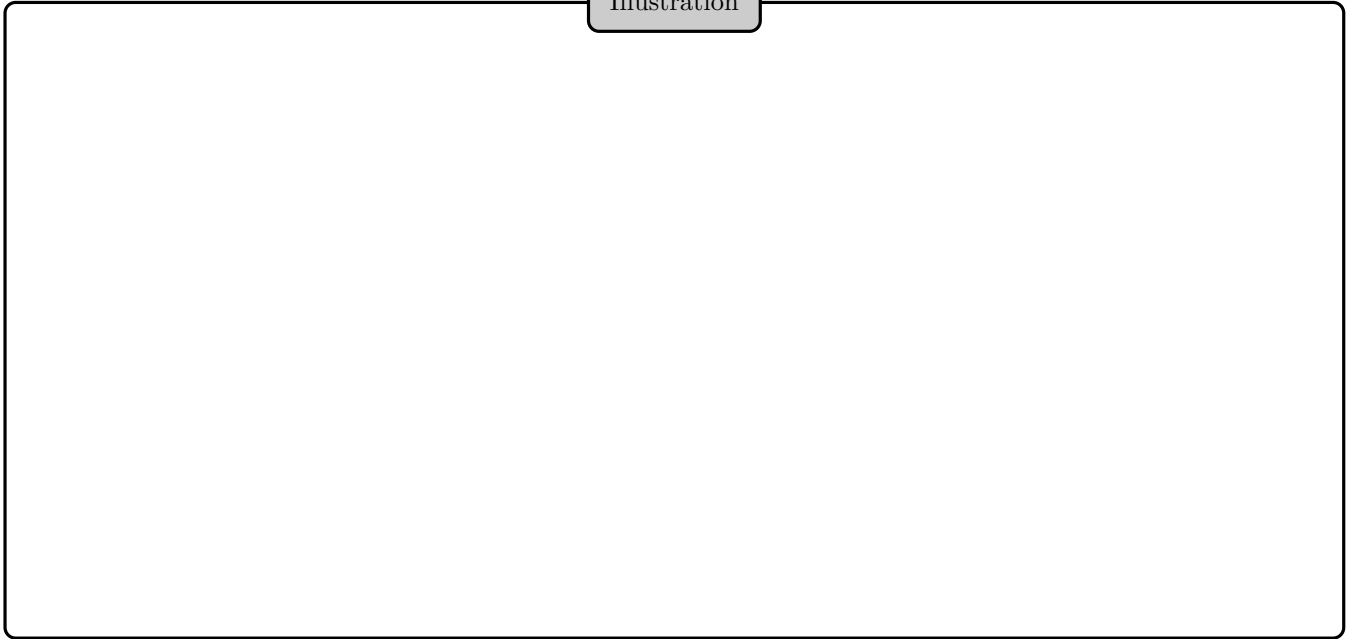
$$(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)).$$

Ces formules permettent de retrouver des relations trigonométriques. On retiendra notamment que

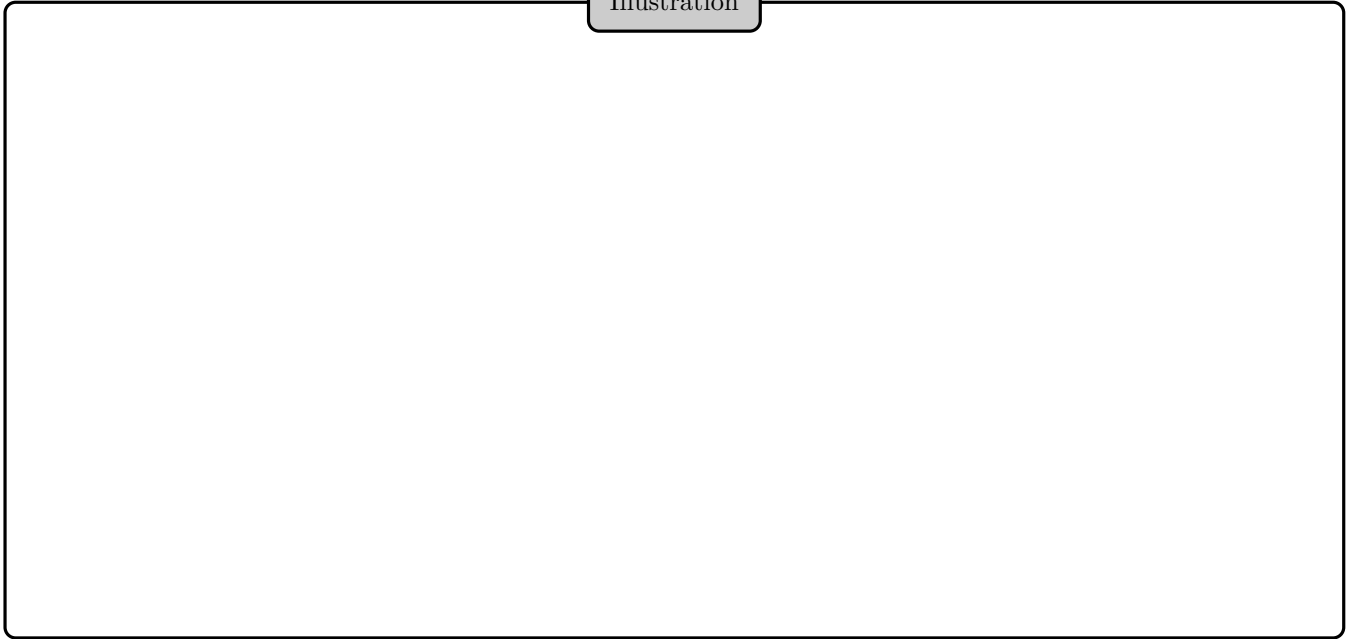
- La formule de Moivre permet d'écrire $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ comme polynômes en $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.
- Les formules d'Euler (et la formule de Moivre) permettent de « linéariser » les polynômes en $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

Illustration

Illustration



Illustration



6. UNE CONSTRUCTION DE \mathbb{C}

La construction suivante permet d'exhiber un modèle du corps des nombres complexes, modèle défini (« trouvé ») de manière à satisfaire les propriétés algébriques souhaitées de ce corps.

On introduit l'ensemble $\Omega = \mathbb{R}^2$, muni des lois d'addition et de multiplication suivantes :

$$\forall ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in \Omega^2, (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), (x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$$

6.0.1. $(\Omega, +)$ est un groupe commutatif.

Démonstration

La loi $+$ est une loi de composition interne sur Ω . En effet, si (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont deux éléments quelconques de Ω , alors leur somme $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ est encore élément de Ω .

La loi $+$ est associative. Soit (x_1, y_1) , (x_2, y_2) et (x_3, y_3) trois éléments quelconques de Ω . D'une part,

$$\begin{aligned} ((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) + (x_3, y_3) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) + (x_3, y_3) \\ &= ((x_1 + x_2) + x_3, (y_1 + y_2) + y_3) \\ &= (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3), \end{aligned}$$

et, d'autre part,

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) + ((x_2, y_2) + (x_3, y_3)) &= (x_1, y_1) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3) \\ &= (x_1 + (x_2 + x_3), y_1 + (y_2 + y_3)) \\ &= (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3). \end{aligned}$$

La loi $+$ est commutative. Soit (x_1, y_1) et (x_2, y_2) deux éléments quelconques de Ω :

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_2 + x_1, y_2 + y_1) = (x_2, y_2) + (x_1, y_1)$$

Ω admet un élément neutre pour $+$. En effet, pour tout élément (x, y) de Ω , on a : $(x, y) + (0, 0) = (x, y)$.

Chaque élément de Ω admet un symétrique pour $+$. Pour tout élément (x, y) de Ω , on a : $(x, y) + (-x, -y) = (0, 0)$. □

Intérêt de montrer si tôt la commutativité

Il peut paraître surprenant de montrer la commutativité de l'addition dans Ω avant l'existence d'un élément neutre par exemple. En réalité, cette connaissance préalable de la commutativité permet de simplifier la preuve de certaines assertions. Dans ma démonstration, j'ai montré que $(0, 0)$ était élément neutre à droite pour l'addition dans Ω : par commutativité, il est également élément neutre à gauche. De même pour l'existence d'un symétrique, et plus tard, pour la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

6.1

Structure de groupe produit

L'exercice 8 sur la structure de groupe produit du chapitre V permet de généraliser les calculs menés ici : Ω est un groupe abélien car il a une structure de groupe abélien produit.

6.2

6.0.2. $(\Omega, +, *)$ est un anneau commutatif non nul.

Démonstration

$*$ est une loi de composition interne sur Ω . En effet, si (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont deux éléments quelconques de Ω , alors

$$(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$$

est encore élément de Ω (par structure d'anneau de \mathbb{R}).

La loi $*$ est associative. Soit (x_1, y_1) , (x_2, y_2) et (x_3, y_3) trois éléments quelconques de Ω . D'une part,

$$\begin{aligned} & ((x_1, y_1) * (x_2, y_2)) * (x_3, y_3) \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2) * (x_3, y_3) \\ &= ((x_1x_2 - y_1y_2)x_3 - (x_1y_2 + y_1x_2)y_3, (x_1x_2 - y_1y_2)y_3 + (x_1y_2 + y_1x_2)x_3) \\ &= (x_1x_2x_3 - y_1y_2x_3 - x_1y_2y_3 - y_1x_2y_3, x_1x_2y_3 - y_1y_2y_3 + x_1y_2x_3 + y_1x_2x_3) \end{aligned}$$

et, d'autre part,

$$\begin{aligned} & (x_1, y_1) * ((x_2, y_2) * (x_3, y_3)) \\ &= (x_1, y_1) * (x_2x_3 - y_2y_3, x_2y_3 + y_2x_3) \\ &= (x_1(x_2x_3 - y_2y_3) - y_1(x_2y_3 + y_2x_3), x_1(x_2y_3 + y_2x_3) + y_1(x_2x_3 - y_2y_3)) \\ &= (x_1x_2x_3 - x_1y_2y_3 - y_1x_2y_3 - y_1y_2x_3, x_1x_2y_3 + x_1y_2x_3 + y_1x_2x_3 - y_1y_2y_3). \end{aligned}$$

La loi $*$ est donc bien associative.

La loi $*$ est commutative. Soit (x_1, y_1) , (x_2, y_2) deux éléments quelconques de Ω .

$$(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2)$$

et

$$(x_2, y_2) * (x_1, y_1) = (x_2x_1 - y_2y_1, x_2y_1 + y_2x_1) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2)$$

La loi $*$ est donc commutative.

La loi $*$ admet un élément neutre, différent de $(0, 0)$. On vérifie que pour tout élément (x, y) de Ω , on a :

$$(x, y) * (1, 0) = (1x - 0y, 1y + 0x) = (x, y).$$

$(1, 0)$ est bien élément unité de $(\Omega, *)$, et est différent de $(0, 0)$.

La loi $*$ est distributive par rapport à la loi $+$. Soit (x_1, y_1) , (x_2, y_2) et (x_3, y_3) trois éléments quelconques de Ω . D'une part,

$$\begin{aligned} & (x_1, y_1) * ((x_2, y_2) + (x_3, y_3)) \\ &= (x_1, y_1) * (x_2 + x_3, y_2 + y_3) \\ &= (x_1(x_2 + x_3) - y_1(y_2 + y_3), x_1(y_2 + y_3) + y_1(x_2 + x_3)) \\ &= (x_1x_2 + x_1x_3 - y_1y_2 - y_1y_3, x_1y_2 + x_1y_3 + y_1x_2 + y_1x_3), \end{aligned}$$

et, d'autre part,

$$\begin{aligned} & (x_1, y_1) * (x_2, y_2) + (x_1, y_1) * (x_3, y_3) \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2) + (x_1x_3 - y_1y_3, x_1y_3 + y_1x_3) \\ &= (x_1x_2 + x_1x_3 - y_1y_2 - y_1y_3, x_1y_2 + x_1y_3 + y_1x_2 + y_1x_3). \end{aligned}$$

□

6.0.3. Dernières vérifications.

Démonstration

$(\Omega, +, *)$ est un corps. Soit (x, y) un élément non nul de Ω , c'est-à-dire différent de $(0, 0)$. Le nombre réel $x^2 + y^2$ est alors non nul, et on vérifie que :

$$\begin{aligned} (x, y) * \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) &= \left(x \frac{x}{x^2 + y^2} - y \frac{-y}{x^2 + y^2}, x \frac{-y}{x^2 + y^2} + y \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \\ &= (1, 0). \end{aligned}$$

$(\Omega, +, *)$ est un surcorps de \mathbb{R} . Ω ne contient pas le corps des réels au sens strict, mais il contient $\mathbb{R} \times \{0\}$, que l'on peut identifier à \mathbb{R} par la bijection $x \mapsto (x, 0)$, cette identification étant compatible avec les lois des objets considérés.

Ω possède bien un élément dont le carré vaut -1 . L'élément $(0, 1)$ convient en effet. Notons le i .

Existence de l'écriture algébrique Un élément (x, y) quelconque de Ω peut s'écrire sous la forme :

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1) * (y, 0) = x + iy$$

grâce à l'identification de \mathbb{R} avec $\mathbb{R} \times \{0\}$. □

Proposition (Unicité du corps des nombres complexes)

Deux corps des nombres complexes sont isomorphes. 6.a

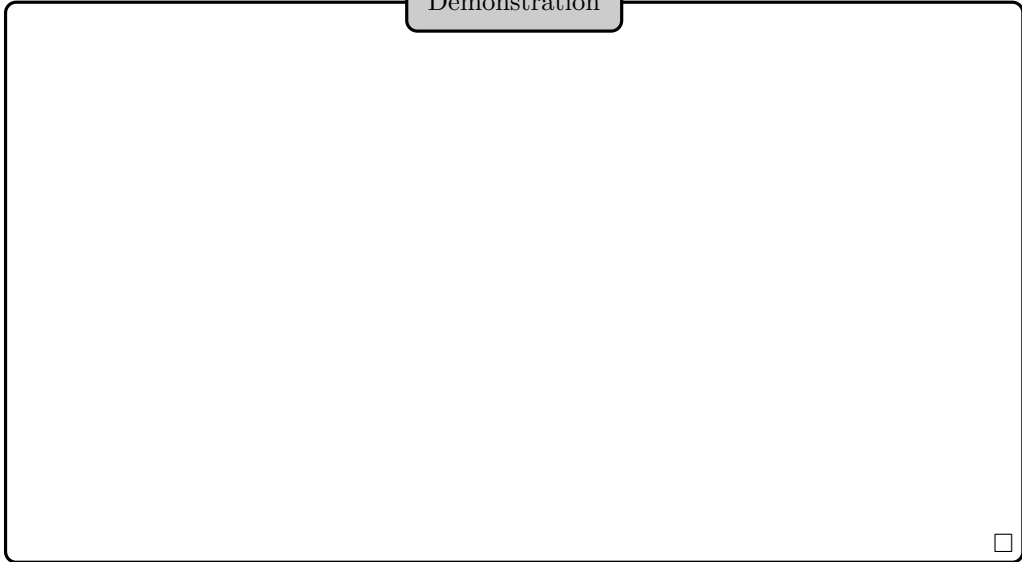
Démonstration

□

Proposition (Automorphismes du corps des nombres complexes)

Le corps des nombres complexes admet deux automorphismes laissant \mathbb{R} invariant : l'application identique, et la conjugaison complexe. 6.b

Démonstration



7. QUESTIONNAIRE 1 : COMPLEXES

- 1 Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. Si $|z| = 1$ et si $|z + z'| = 1$, alors $z' = 0$.
- 2 Aucun nombre complexe n'est égal à sa partie imaginaire.
- 3 Pour tout $(\lambda, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$, $\text{Im}(\lambda z) = \lambda \text{Im}(z)$.
- 4 L'application module est un morphisme du groupe (\mathbb{C}, \cdot) vers (\mathbb{R}, \cdot) .
- 5 Soit $z \in \mathbb{C}^*$. \bar{z} et $1/z$ ont les mêmes arguments.
- 6 Soit $z \in \mathbb{C}^*$, θ et θ' des arguments respectifs de z et de $1/\bar{z}$. On a : $\theta = \theta'$.
- 7 Soit $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe un unique couple (a, b) de réels tels que $z = a + bz_0$.
- 8 Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|1 + iz| = \sqrt{1 + |z|^2}$.
- 9 Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $||z'| - |z|| \leq |z' - z|$.
- 10 Soit $(a, n) \in \mathbb{C} \times \mathbb{N}^*$. a admet n racines n -ièmes.
- 11 La somme des racines 26-ièmes de l'unité qui ne sont pas des racines 13-ièmes de l'unité est nulle.
- 12 Les seuls groupes multiplicatifs finis inclus dans \mathbb{C} sont les \mathbb{U}_n , $n \in \mathbb{N}^*$.
- 13 Tout nombre complexe de module 1 est une racine n -ième de l'unité pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$.

8. FEUILLE DE TD 3 : NOMBRES COMPLEXES

8.1. NOMBRES COMPLEXES ET GÉOMÉTRIE

Exercice 1 (Donner les expressions complexes de similitudes)

0

Donner les expressions complexes de la translation de vecteur \vec{v} d'affixe $3+i$, de la rotation de centre Ω d'affixe $2-i$, d'angle de mesure $\pi/3$, de la similitude directe de centre Ω' d'affixe $1+3i$, d'angle de mesure $\pi/4$, de rapport $\sqrt{2}$.

Exercice 2 (Transformation donnée par son expression analytique)

0

Reconnaître la transformation du plan complexe donnée par son expression analytique

$$z \mapsto (\sqrt{3}-i)z - 2 + 2i(1-\sqrt{3}).$$

Exercice 3 (Ligne de niveau complexe)

2

Soit a et b deux complexes distincts, et soit λ un réel strictement positif. Décrire l'ensemble C_λ , où :

$$C_\lambda = \{z \in \mathbb{C}, \quad |z-b| = \lambda|z-a|\}.$$

Exercice 4 (Caractérisations des triangles équilatéraux)

4

Soit a, b, c des nombres complexes distincts deux à deux, d'images respectives A,B,C. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

- (1) ABC est un triangle équilatéral ;
- (2) j ou j^2 est solution de $az^2 + bz + c = 0$;
- (3) $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$;
- (4) $\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} = 0$.

Exercice 5 (Points à coordonnées entières sur un cercle)

4 et 5

Montrer qu'il existe des cercles du plan contenant un nombre arbitrairement grand de points à coordonnées entières.

8.2. MODULE, ARGUMENT, FORME EXPONENTIELLE

Exercice 6 (Inégalités de modules)

0

Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que si $|z| = 1$, alors $|1+z| \geq 1$ ou $|1+z^2| \geq 1$.

Exercice 7 (Ensemble d'entiers déterminé par une condition complexe)

0

Déterminer l'ensemble $\left\{n \in \mathbb{N}, \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1-i}\right)^5\right\}^n \in \mathbb{R}_+\right\}$.

Exercice 8 (X MP 08)

2

Soit a, b, c trois éléments distincts de $[0, 2\pi[$. Calculer l'argument de $\frac{e^{ic}-e^{ib}}{e^{ic}-e^{ia}}$. Interprétation géométrique ?

Exercice 9 (X MP 08)

2

Soit a, b, c, d des complexes distincts. On suppose que $\frac{d-a}{b-c}$ et $\frac{d-b}{a-c}$ sont imaginaires purs.

1 Montrer que $\frac{d-c}{a-b}$ est imaginaire pur.

2 On suppose que $|a| = |b| = |c| = 1$. Exprimer d en fonction de a, b et c .

Exercice 10 (X MP 05)

3

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $|a| = |b| = |c| = 1$ et $a \neq c$. Montrer : $\frac{a}{b} \frac{(c-b)^2}{(c-a)^2} \in \mathbb{R}^+$.

Exercice 11 (Mines MP 07)

3

Condition nécessaire et suffisante pour que $e^{ix} + e^{iy} + e^{iz} = 0$?

8.3. TRIGONOMÉTRIE

Exercice 12 (Exemples de linéarisation)

0

Linéariser les expressions suivantes, dépendant de la variable réelle x : $\cos(x)^4$, $\sin(x)^5$, $\cos(x)^3 \sin^2(x)$.

Exercice 13 (Équation trigonométrique)

0

Résoudre l'équation $\cos(3x) - 2 \cos(2x) = 0$, d'inconnue réelle x .

Exercice 14 (Polynôme de la fonction cosinus)

0

Exprimer comme un polynôme de la fonction cosinus la fonction f définie par $f(2k\pi) = 6$ et $f((2k+1)\pi) = -6$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et, pour tout réel $x \notin \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, par

$$f(x) = \frac{\sin 6x}{\sin x}.$$

Exercice 15 (Changement d'écriture d'une combinaison de cosinus et sinus)

1

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Déterminer un réel $A > 0$ et un réel θ_0 de sorte que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad a \cos \theta + b \sin \theta = A \cos(\theta - \theta_0).$$

Exercice 16 (Calculs de sommes trigonométrique)

1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout réel x , calculer :

$$C_n(x) = \sum_{k=0}^n \cos(kx) \quad \text{et} \quad S_n(x) = \sum_{k=0}^n \sin(kx).$$

Exercice 17 (Sommes trigonométriques à coefficients binomiaux)

2

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer les sommes $A_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(k\theta)$ et $B_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(k\theta)$.

Exercice 18 (X MP 07)

2

Calculer $\cos \frac{\pi}{13} + \cos \frac{3\pi}{13} + \dots + \cos \frac{11\pi}{13}$.

8.4. RACINES DE L'UNITÉ

Exercice 19 (Calculs de racines cubiques)

0

Déterminer les racines cubiques de $\sqrt{3} - i$ et de $\frac{i+\sqrt{3}}{i-\sqrt{3}}$.

Exercice 20 (Somme de distances entre racines de l'unité)

2

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \left| e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1 \right|$.

Exercice 21 (Équation complexe à paramètre)

2

Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation :

$$z^{2n} - 2z^n \cos(na) + 1 = 0.$$

Exercice 22 (Mines MP 08)

2

Calculer $\prod_{k=1}^{n-1} (1 - e^{2ik\pi/n})$ où $n \geq 2$.

Exercice 23 (X MP 07)

3

Déterminer les $z \in \mathbb{C}$ tels que z et ses racines cubiques forment dans le plan un parallélogramme.

Exercice 24 (Centrale PC 08)

3

Soit

1 Montrer que $\mathbb{U}_{12} = \mathbb{U}_3\mathbb{U}_4 = \{zz', (z, z') \in \mathbb{U}_3 \times \mathbb{U}_4\}$.**2** Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi : z \in \mathbb{U}_{12} \mapsto z^p \in \mathbb{U}_{12}$. À quelle condition φ réalise-t-il une bijection ?

8.5. ÉQUATIONS ALGÈBRIQUES

Exercice 25 (Calculs de racines carrées)

0

Déterminer sous forme algébrique les racines carrées des nombres complexes suivants : $2i$, $3 - 4i$, $16 + 30i$.

Exercice 26 (Équations algébriques complexes)

0

1 Résoudre l'équation $z^2 - (4 + 2i)z + (11 + 10i) = 0$.**2** Résoudre l'équation $(1 + i)z^2 - 4iz + 26 - 2i = 0$.

Exercice 27 (Équations algébriques complexes plus compliquées)

2

1 Résoudre l'équation

$$(1 - i)z^3 + (-4 + 8i)z^2 + (3 - 25i)z + 30i = 0,$$

sachant qu'elle admet une solution réelle.

2 Résoudre l'équation

$$z^3 - (5 + 3i)z^2 + (7 + 16i)z + 3 - 21i = 0,$$

sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure.

3 Résoudre l'équation

$$z^6 + (2i - 1)z^3 - 1 - i = 0.$$

Techniques fondamentales en algèbre et analyse

Sommaire

1. Calculs algébriques	85
1.1. Symboles de somme et de produit, factorielle et coefficients binomiaux	85
1.2. Systèmes linéaires	89
2. Notions fondamentales d'analyse	91
2.1. L'ensemble des nombres réels	91
2.2. Généralités sur les fonctions	93
2.3. Dérivation, étude d'une fonction	96
2.4. Primitives, formules d'intégration	98
3. Exponentielles, logarithmes, puissances	100
3.1. Fonction logarithme	100
3.2. Fonction exponentielle	101
3.3. Fonctions exponentielle et logarithme de base a	102
3.4. Fonctions puissances	103
3.5. Comparaison des fonctions usuelles	105
4. Calcul pratique de primitives	106
4.1. Intégration par parties	106
4.2. Changement de variable	107
4.3. Exemples classiques de primitives	108
5. Fonctions hyperboliques	108
6. Fonctions circulaires réciproques	110
6.1. Définition, propriétés	110
6.2. Simplifier une expression trigonométrique	113
7. Complément sur le calcul de primitives	113
8. Feuille de TD 4 : Techniques fondamentales en algèbre et analyse	115
8.1. Utilisation des symboles de somme et de produit	115
8.2. Systèmes	116
8.3. Équations	116
8.4. Dérivation, intégration	117
8.5. Formules	119
8.6. Simplifications	119
8.7. Divers	120

Ce chapitre rappelle et introduit des notations et fonctions classiques et utiles en mathématiques comme en physique. Nous laissons à plus tard certaines démonstrations (et même certaines définitions), afin de rendre ce chapitre de « TS survitaminée » le plus pratique possible.

\mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} , ses éléments seront appelés *scalaires*, et I est un intervalle comprenant au moins deux points.

1. CALCULS ALGÈBRIQUES

1.1. SYMBOLES DE SOMME ET DE PRODUIT, FACTORIELLE ET COEFFICIENTS BINOMIAUX

On considère une loi de composition interne \star sur un ensemble E , associative. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $(a_1, \dots, a_n) \in E^n$. On appelle composée de cette famille par \star le terme d'indice n de la suite $(u_p)_{p \in [1, n]}$ définie par :

$$\begin{cases} u_1 &= a_1 \\ \forall i \in [1, n-1], u_{i+1} &= u_i \star a_{i+1} \end{cases}$$

Si E admet un élément neutre e pour \star , on peut convenir que la composée de la famille vide par \star soit e .

Dans le cas où \star est l'addition (resp. la multiplication), on note $\sum_{i=1}^n a_i$ (resp. $\prod_{i=1}^n a_i$) cette composée.

Cas d'une loi commutative

Si la loi \star est en outre commutative, alors pour toute famille $(e_i)_{i \in I}$ d'éléments de E , indexée par un ensemble fini non vide, on peut définir sans ambiguïté sa composée par la loi \star , qui ne dépendra pas de l'ordre arbitraire que l'on donnera aux éléments de I . Ainsi, on pourra utiliser les notations $\sum_{i \in I} a_i$ et $\prod_{i \in I} a_i$.

1.1

Exercice (Somme des n premiers entiers non nuls)

Montrer par récurrence, que pour tout entier naturel non nul n :

$$\sum_{1 \leq k \leq n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

1

Le symbole \sum possède de nombreuses propriétés facilitant le calcul. Illustrons-les sur quelques exemples :

Exercice (Somme des n premiers entiers non nuls à la Gauss)

Montrer le résultat de l'exercice précédent sans récurrence, en utilisant le symbole \sum .

2

Sommes télescopiques : ce sont les sommes de la forme

$$\sum_{k=0}^n (a_{k+1} - a_k),$$

qui se simplifient en $a_{n+1} - a_0$.

Exercice (Somme des carrés)

En considérant la somme télescopique

$$\sum_{k=0}^n ((k+1)^3 - k^3),$$

montrer que

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3

Si on effectue un produit de nombres réels strictement positifs, la fonction logarithme permet de passer à une somme.

Quel est l'équivalent des sommes télescopiques pour les produits ? Les produits télescopiques, *i.e.* les expressions (licites) du type $\prod_{1 \leq p \leq n} \frac{a_{p+1}}{a_p}$.

Définition (Factorielle)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$n! = \prod_{1 \leq i \leq n} i$$

On convient que $0! = 1$

On appelle le nombre $n!$ (la) *factorielle* (de) n .

1.a

Exercice (Factorielle)

Soit n un entier naturel non nul. Exprimer

$$\prod_{1 \leq k \leq n} \left(1 + \frac{1}{2k}\right)$$

sans symbole de produit.

4

Définition (Coefficients binomiaux)

Soit $n \in \mathbb{N}$, $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On appelle *coefficient binomial* p parmi n et on note $\binom{n}{p}$ le réel

$$\frac{n!}{p!(n-p)!}$$

1.b

Nous verrons une interprétation de ces coefficients en termes de dénombrements
On peut convenir que si p et n sont des entiers naturels tels que $p > n$, alors $\binom{n}{p}$ vaut 0.

Proposition (Formules combinatoires)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a :

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

Si en outre n et p sont ≥ 1 , on a :

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} \quad (\text{triangle de Pascal})$$

1.a

Démonstration

□

Proposition (Binôme de Newton)

Soit $a, b \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$(a + b)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^p b^{n-p}$$

1.b

Exercice (Somme de coefficients binomiaux)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer : $\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = 2^n$

5

La formule du triangle de Pascal permet de retrouver les coefficients binomiaux intervenant dans la formule du binôme de Newton :

Illustration

Proposition (Formule de Bernoulli)

Soit $a, b \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$

1.c

Formule de Bernoulli

Pour ne pas se tromper dans cette formule, on pourra vérifier son homogénéité (en imaginant que a et b soient des longueurs).

1.2

Exemple (Formule de Bernoulli)

Soit $x \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Si $x \neq 1$, on a : $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$.

Dans le cas où $x = 1$, $\sum_{k=0}^n x^k = n + 1$, et l'expression ci-dessus n'a pas de sens.

i

1.2. SYSTÈMES LINÉAIRES

1.2.1. Généralités.

Définition (Système linéaire)

On appelle *système linéaire* de n équations, à p inconnues (et à coefficients dans \mathbb{K}) tout système d'équations d'inconnues x_1, \dots, x_p , de la forme :

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

où les $a_{i,j}$ et les b_i sont des éléments de \mathbb{K} .

Les $a_{i,j}$ sont appelés *coefficients (du système)*.

La matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$ à n lignes et p colonnes est

appelée *matrice (du système)*.

Les coefficients b_1, \dots, b_n sont les *seconds membres du système*, et la matrice colonne

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ est appelée *colonne second membre (du système)*.

On dit que (x_1, \dots, x_p) est le vecteur (ou p -uplet) des *inconnues* de \mathcal{S} , et la matrice

colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ est appelée *colonne des inconnues (du système)*.

Un vecteur (x_1, \dots, x_p) vérifiant les n égalités de \mathcal{S} est appelé *solution du système*.

Un système linéaire est dit *homogène* si les seconds membres sont tous nuls. À un système \mathcal{S} on associe un système homogène \mathcal{H} en changeant tous les seconds membres en 0.

Deux systèmes linéaires sont dits *équivalents* s'ils ont le même ensemble de solutions.

1.c

Si le système est homogène, il possède toujours la solution nulle $(0, 0, \dots, 0)$, appelée solution *triviale*.

Interprétation géométrique de systèmes

Dans le cas de deux inconnues (*i.e.* lorsque $p = 2$) et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on peut interpréter la résolution d'un système comme la recherche des points communs à certaines droites du plan. Dans le cas de trois inconnues et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on peut interpréter la résolution d'un système comme la recherche des points communs à certains plans de l'espace \mathbb{R}^3 .

1.3

On reprend le système \mathcal{S} de la définition ci-dessus.

Interprétation matricielle : si $A = (a_{i,j})$ est la matrice du système, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$, alors \mathcal{S}

s'écrit

$$AX = B$$

Le système homogène associé s'écrit

$$AX = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

En particulier, si A est inversible, le système possède une unique solution (peu importe le second membre).

L'ensemble des solutions de \mathcal{H} comprend le vecteur nul, et est stable par somme et par multiplication par un scalaire : on dit que c'est un sous-espace vectoriel de \mathbb{K}^p .

En conséquence, si \mathcal{S} admet au moins une solution x_0 , une solution générale x de \mathcal{S} s'écrit $x = x_0 + h$, où h est une solution générale de \mathcal{H} . Si \mathcal{S} admet au moins deux solutions distinctes, il en possède une infinité.

1.2.2. *Opérations élémentaires sur les lignes d'un système.* On conserve le système \mathcal{S} , dont on note les équations E_1, \dots, E_n . On définit aisément des lois d'addition de deux équations, et de multiplication d'une équation par un scalaire.

Définition (Opération élémentaire sur les équations d'un système)

On appelle *opération élémentaire* sur les lignes de \mathcal{S} l'une des opérations suivantes :

- (1) Addition d'un multiple d'une équation à une autre (codage $E_i \leftarrow E_i + \alpha E_j$).
- (2) Multiplication d'une équation par un scalaire non nul (codage $E_i \leftarrow \alpha E_i$).
- (3) Échanger deux équations (codage $E_i \leftrightarrow E_j$).

1.d

Toute opération élémentaire sur les lignes de \mathcal{S} transforme ce système en un système équivalent.

À partir de ces opérations élémentaires sur les équations d'un système, on peut donner d'autres opérations licites (à vous d'expliquer pourquoi elles conduisent à un système équivalent) :

- (1) On ajoute à une équation une combinaison linéaire des autres équations (applications successives de la première).
- (2) On change une équation E_i en $\alpha E_i + \beta E_j$, avec $i \neq j$, et $\alpha \neq 0$ ($E_i \leftarrow \alpha E_i$ puis $E_i \leftarrow E_i + \beta E_j$).
- (3) On permute ses équations (applications successives de la dernière).
- (4) On ajoute à chaque équation E_j un multiple de E_i , avec $i \neq j$.
- (5) On peut supprimer de \mathcal{S} toute équation triviale. Plus généralement, on peut supprimer de \mathcal{S} une équation combinaison linéaire des autres équations (*i.e.* s'obtenant à partir des autres en les multipliant par des scalaires, puis en les ajoutants).

1.2.3. *Résolution des systèmes de Cramer par la méthode du pivot de Gauss.* Soit \mathcal{S} un système linéaire. Le principe du pivot de Gauss (appliqué à \mathcal{S}) consiste à trouver, au moyen d'une démarche précise, un système équivalent à \mathcal{S} , sous une forme précise et facile à résoudre, dite *échelonnée*.

Plus précisément (mais de manière volontairement informelle), on cherche si l'un des coefficients $a_{1,1}, \dots, a_{n,1}$ (*i.e.* ceux de la première colonne de A) devant x_1 est non nul.

- Si tel est le cas, on peut, quitte à échanger des équations de \mathcal{S} , supposer que $a_{1,1} \neq 0$. Ce coefficient, le premier pivot de notre algorithme, sert alors à annuler, par opérations élémentaires, les autres coefficients devant x_1 dans les autres équations de \mathcal{S} .

Ceci fait, le système d'équations E_2, \dots, E_n peut être considéré comme d'inconnues x_2, \dots, x_p , et on répète le processus.

- Si tous les coefficients devant x_1 sont nuls, *i.e.* si la première colonne de A est nulle, le choix de x_1 ne change rien à la résolution de \mathcal{S} : on considère \mathcal{S} comme d'inconnues x_2, \dots, x_p , et on revient à la première étape.

Exercice (Systèmes linéaires par le pivot de Gauss)

Résoudre par l'algorithme du pivot de Gauss, les systèmes suivants :

1

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$$

2

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x - y = 0 \\ 2x - y = m \end{cases},$$

où m est un paramètre réel.

3

$$\begin{cases} y + 2z = -1 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$$

4

$$\begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ 3x + y + z = 4 \\ x - 3y + z = 0 \end{cases}$$

6

2. NOTIONS FONDAMENTALES D'ANALYSE

2.1. L'ENSEMBLE DES NOMBRES RÉELS

2.1.1. *Structures algébriques sur le corps des réels.* La construction de \mathbb{R} est hors-programme. Recensons quelques-unes de ses propriétés, plus ou moins connues. Tout d'abord, $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un surcorps de \mathbb{Q} : on peut donc y effectuer des calculs comme nous en avons l'habitude.

Le corps des nombres réels \mathbb{R} est également muni d'une relation d'ordre total (prolongeant celle de \mathbb{Q}), compatible avec l'addition et la multiplication (par un réel positif) :

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \quad ((x \leq y) \Rightarrow (x + z \leq y + z)) \wedge ((x \leq y \wedge 0 \leq z) \Rightarrow (xz \leq yz))$$

On dit alors que \mathbb{R} est un *corps totalement ordonné*.

Attention cependant, si a et b sont des réels tels que $a \leq b$ et si c est un réel *négatif*, alors $bc \leq ac$. Cela peut s'interpréter comme la décroissance de la fonction $x \mapsto cx$

Illustration

On prendra de même garde au passage à l'inverse dans une inégalité. Soit a et b deux réels non nuls, tels que $a \leq b$. On a :

- si a et b sont positifs, alors :
- si a et b sont négatifs, alors :
- si a et b n'ont pas le même signe, alors :

Tracer le graphe de la fonction inverse et illustrer les différents cas :

Illustration

\mathbb{R} est aussi muni de la fonction valeur absolue ($x \mapsto \max\{x, -x\}$), prolongeant celle de \mathbb{Q} , et vérifiant :

- (1) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (axiome de séparation) ;
- (2) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |xy| = |x||y|$ (homogénéité) ;
- (3) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad ||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$ (seconde et première inégalités triangulaires¹).

Cette fonction valeur absolue permet de définir la *distance* de deux nombres réels x et y par $d(x, y) = |x - y|$. L'application $d : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifie, pour tous réels x, y et z :

- (1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (axiome de séparation) ;
- (2) $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie) ;
- (3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire).

Définition (Parties positive et négative d'un nombre réel)

Soit x un réel. On appelle *partie positive* de x et on note x^+ le réel $\max(x, 0)$. On appelle *partie négative* de x et on note x^- le réel $\min(x, 0)$.

2.a

Exercice (Parties positive et négative et valeur absolue)

Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $|x|$ en fonction de x^+ et x^- , et réciproquement.

7

2.1.2. *La droite numérique achevée. Intervalles.* Le corps des réels vérifie la propriété fondamentale suivante : toute partie non vide et majorée de \mathbb{R} admet une borne supérieure (dans \mathbb{R})².

En vue d'unifier et simplifier certains résultats, sur les suites notamment³, on introduit la droite numérique achevée.

Définition (Droite numérique achevée)

On introduit deux symboles $+\infty$ et $-\infty$. On appelle *droite numérique achevée* l'ensemble

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

On prolonge la relation d'ordre \leq en posant

$$\forall x \in \overline{\mathbb{R}}, \quad x \leq +\infty \quad \text{et} \quad \forall x \in \overline{\mathbb{R}}, \quad -\infty \leq x$$

2.b

Si $A \subset \mathbb{R}$ n'est pas majorée (resp. minorée), on pose $\sup A = +\infty$ (resp. $\inf A = -\infty$)⁴.

1. La seconde se déduit de la première.

2. De manière duale, toute partie non vide et minorée de \mathbb{R} admet une borne inférieure (dans \mathbb{R}).

3. Par exemple : toute suite croissante tend vers sa borne supérieure.

4. On a simplement pris les bornes dans $\overline{\mathbb{R}}$. En fait, toute partie de $\overline{\mathbb{R}}$ admet une borne supérieure et une borne inférieure.

On prolonge partiellement à $\overline{\mathbb{R}}$ les opérations d'addition et de multiplication sur \mathbb{R} , comme on s'y attend. Par exemple, $3 + (+\infty) = +\infty$, $-2(-\infty) = +\infty$, ou $(-\infty)(-\infty) = +\infty$. On a cependant aussi des formes indéterminées, comme $-\infty + (+\infty)$, $0(+\infty)$, $0(-\infty)$.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, où $a \leq b$.

Définition (Intervalle)

On définit comme attendu les intervalles $]a, b[$, $[a, b[$, $]a, b]$, $[a, b]$. Par exemple :

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}.$$

On définit aussi $[a, +\infty[$, $]a, +\infty[$, $] - \infty, a]$, $] - \infty, a[$, et $] - \infty, +\infty[$. Les intervalles $]a, b[$, $]a, +\infty[$, $] - \infty, a[$ et $] - \infty, +\infty[$ sont dits *ouverts*. Les intervalles \emptyset , \mathbb{R} , $[a, b]$, $] - \infty, a]$, $[a, +\infty[$ sont dits *fermés*.

2.c

Nous donnerons une définition plus générale et satisfaisante des notions d'ouverts et fermés lors du cours sur les fonctions. Observons ici que \emptyset et \mathbb{R} sont les seuls intervalles ouverts et fermés, et que des intervalles sont ni ouverts ni fermés, comme $]0, 1[$ par exemple.

La *longueur* d'un intervalle I (non vide) est $\sup(I) - \inf(I)$.

Définition (Segment)

Un *segment* est un intervalle du type $[a, b]$.

2.d

Un intervalle est un segment si et seulement si il est fermé, borné, et non vide.

Exercice (Interprétation graphique d'inégalités)

Soit $(a, \varepsilon) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. Représenter les ensembles $\{x \in \mathbb{R}, |x - a| \leq \varepsilon\}$ et $\{x \in \mathbb{R}, |x - a| < \varepsilon\}$.

8

2.2. GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

2.2.1. Vocabulaire standard.

Nous ne ferons pas de distinction entre les notions de fonction et d'application. Tout au plus se permettra-t-on de parler d'une fonction sans préciser sa source, qui dans ce cas, doit être une partie de son *ensemble de définition* (i.e. l'ensemble des points où la fonction est définie).

Par exemple, l'ensemble de définition de la fonction tangente est $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Dans le cas d'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ d'une variable réelle et à valeurs réelles, nous avons l'habitude de représenter son graphe (ou *courbe représentative*).

Exercice (Exemple de graphe)

Représenter le graphe de la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1+x}}$.

9

Définition (Valeur absolue d'une fonction)

On appelle *valeur absolue* de f et on note $|f|$ la fonction $x \mapsto |f(x)|$.

2.e

Exercice (Parties positive et négative d'une fonction)

On peut définir les applications $f^+ : x \mapsto \max(f(x), 0)$ et $f^- : x \mapsto \min(f(x), 0)$ d'une fonction.

1 Exprimer $|f|$ en fonction de f^+ et f^- , et réciproquement.

2 Tracer le graphe de \sin^+ sur $[-3\pi, 3\pi]$.

10

Exercice (Translation ou dilatation de l'argument ou de la valeur d'une fonction)

Soit $a \in \mathbb{R}$. En prenant un exemple précis (et intéressant) pour la fonction f et pour a , tracer sur un même dessin les graphes de f , $x \mapsto f(x) + a$, $x \mapsto f(x + a)$, $x \mapsto f(a - x)$, $x \mapsto f(ax)$, $x \mapsto af(x)$.

On pourra par exemple prendre $f : x \mapsto \frac{x^3}{2} + x^2 + \frac{1}{2}$, et $a = 2$.

11

On peut « résoudre graphiquement » des équations et inéquations du type $f(x) = \lambda$ et $f(x) \geq \lambda$.

Illustration

On peut aussi lire graphiquement si f est injective, surjective ou bijective :

Illustration

Pour deux fonctions f et g de I dans \mathbb{R} , on peut définir leur somme $f + g$ et leur produit fg (ou $f \times g$) par :

On peut aussi dans certains cas définir la composée de deux fonctions (voir le cours sur les applications).

On définit sans difficulté la croissance, la décroissance, la monotonie, la stricte croissance, la stricte décroissance et la stricte monotonie de f .

Par exemple, f est dite strictement décroissante si :

On définit aussi aisément le fait que f soit majorée, minorée, ou bornée.

Fonction bornée

f est bornée si et seulement si $|f|$ est majorée.

2.1

Définition (Périodicité d'une fonction)

Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$. On dit qu'une fonction f de domaine de définition \mathcal{D} est T -périodique (ou que T est une période de f) si \mathcal{D} est invariant par translation par T (i.e. $\{x + T, x \in \mathcal{D}\} = \mathcal{D}$), et si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x + T) = f(x)$.

2.f

Exemple (Fonctions périodiques)

Les fonctions sinus, cosinus, tangente, sont périodiques, ainsi que les fonctions constantes.

i

2.2.2. *Parité, imparité, parties paires et impaire.* Ici, f désigne une fonction définie sur un domaine centré en 0.

Définition (Parité, imparité)

On dit que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est *paire* (resp. *impaire*) si, pour tout $x \in I$, $f(-x) = f(x)$ (resp. $f(-x) = -f(x)$).

2.g

Illustration

Exemple (Fonctions paires ou impaires)

La fonction cosinus est paire, sinus et tangente sont impaires.

ii

Proposition (Parties paire et impaire)

On suppose I centré en 0. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application. La fonction f s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire f_p et d'une fonction impaire f_i .

2.a

Définition (Parties paire et impaire)

Dans ce contexte, f_p et f_i sont respectivement les *parties paire et impaire* de f .

2.h

Démonstration

□

2.3. DÉRIVATION, ÉTUDE D'UNE FONCTION

Nous recensons ici les propriétés fondamentales de la dérivation.

On considère deux fonctions dérivables⁵, de I dans \mathbb{R} , ainsi qu'une fonction dérivable φ d'un intervalle J sur I .

On rappelle que si f est dérivable en $a \in I$, alors la tangente au graphe de f en son point d'abscisse a est de pente $f'(a)$, et donc d'équation

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Illustration

5. Bien entendu, toutes les fonctions ne sont pas dérivables!

Théorème (Opérations algébriques et dérivation)

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(1) (*linéarité de la dérivation*) $\alpha f + \beta g$ est dérivable sur I , et

$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'.$$

(2) *dérivée d'un produit* fg est dérivable sur I , et

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

(3) (*dérivée d'une composée*) $f \circ \varphi$ est dérivable, et

$$(f \circ \varphi)' = \varphi' \times (f' \circ \varphi).$$

2.b

Il faut noter que la dérivabilité de $\alpha f + \beta g$, de fg et de $f \circ \varphi$ ne sont pas supposées par hypothèses, mais qu'elles font partie des conclusions.

Théorème (Croissance et dérivée)

(1) f est constante si et seulement si $f' = 0$

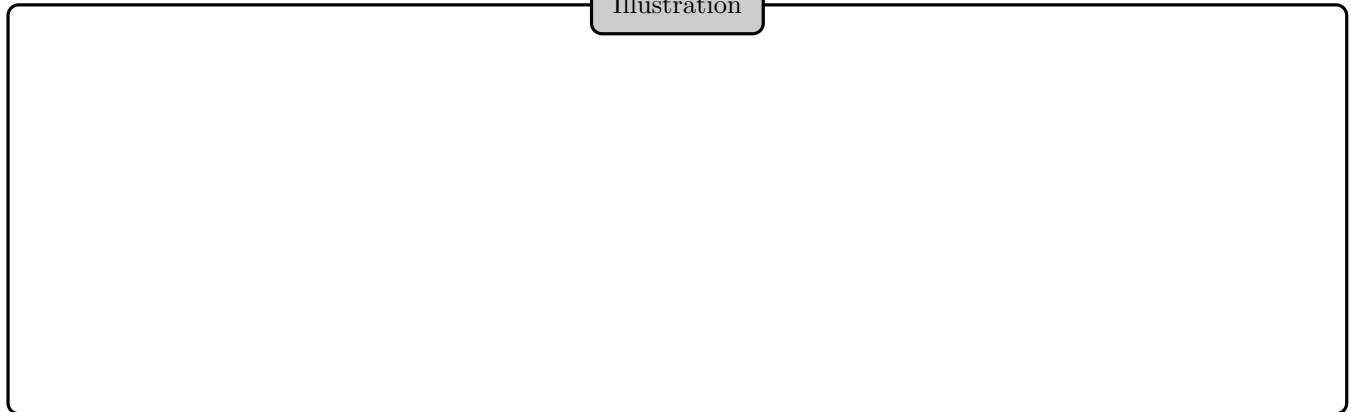
(2) f est croissante si et seulement si $f' \geq 0$ (i.e. $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$).

(3) f est strictement croissante si et seulement si ($f' \geq 0$ et f' n'est jamais identiquement nulle entre deux points d'annulation de f')

2.c

Par exemple la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (que vous devez proposer) dérivable, et dont la dérivée s'annule une infinité de fois, est strictement croissante :

Illustration



Bien sûr, on a des assertions analogues pour la (stricte) décroissance.

Ainsi, l'étude du signe de f' nous informe sur les variations de f , informations que l'on peut synthétiser et enrichir sur un *tableau de variations*.

De telles études, que l'on peut parfois réduire par des arguments de symétrie ou de périodicité, permettent d'étudier les extremums de fonctions, ou de montrer des inégalités :

Exercice (Inégalité par étude de variations)

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+ : \sin(x) \leq x$.

12

Dans le cas où f est bijective de I sur son image, on peut s'intéresser à la dérivabilité de sa bijection réciproque f^{-1} :

Théorème de la bijection continue

Soit f une fonction de I dans \mathbb{R} . On suppose f continue sur I , strictement monotone. La fonction f admet alors des limites m et M aux bornes de I , l'image $J = f(I)$ de f est un intervalle d'extrémités m et M . De plus, $f|_J$ est bijective, et sa bijection réciproque, notée abusivement f^{-1} , est continue, strictement monotone, de même monotonie que f .

2.d

Théorème de dérivabilité de la réciproque (fonctions usuelles)

Soit f une application continue de I dans \mathbb{R} , strictement monotone. On note f^{-1} sa bijection réciproque (avec un léger abus). Soit $a \in I$, $b = f(a) \in J = f(I)$. Si f est dérivable en a , et si $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en b , et :

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{f'(a)}.$$

2.e

La condition $f'(a) \neq 0$ permet d'éviter une tangente verticale pour le graphe de f^{-1} en son point d'abscisse b . Cette formule se « retrouve » facilement graphiquement :

Illustration

Dérivabilité globale de la réciproque

Si f est une application dérivable de I dans \mathbb{R} dont la dérivée ne s'annule pas, alors sa bijection réciproque est dérivable en tout point, et

$$(f^{-1})' = 1/(f' \circ f^{-1}).$$

Si f est en outre indéfiniment dérivable, alors f^{-1} l'est aussi.

2.2

Enfin, si f' est elle-même dérivable, on peut définir la dérivée seconde f'' de f , et on peut parfois dériver f de nombreuses fois (on note $f^{(k)}$ la dérivée k -ième de f , de sorte que $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, et, si elle existe, $f^{(2)} = f''$ si f est deux fois dérivable.

2.4. PRIMITIVES, FORMULES D'INTÉGRATION

Nous supposons connu le symbole intégral, bien que la présentation f désigne ici une fonction continue de I dans \mathbb{R} .

Définition (Primitive)

On appelle *primitive* de f sur I toute fonction de I dans \mathbb{R} , dérivable sur I , de dérivée égale à f .

2.i

Si F est une primitive de $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, alors les primitives de f sont les $F + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Le fait d'être sur un intervalle est primordial.

En particulier, si deux primitives d'une même fonction continue f sur I coïncident en un point, alors elles sont égales.

Par exemple, si $a \in I$, il existe au plus une primitive de f s'annulant en a .

Théorème (Expression intégrale de la primitive s'annulant en a)

Soit $a \in I$. La fonction F_a définie par :

$$\forall x \in I, F_a(x) = \int_a^x f(t) dt$$

est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a .

2.f

On en déduit plusieurs corollaires, le premier sera qualifié de théorème étant donné son importance :

Théorème (Primitives et intégrale)

Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$, a et b deux points de I . Si F est une primitive de f sur I , on a :

$$\int_{[a,b]} f = F(b) - F(a)$$

2.g

Exercice (Dérivation d'une fonction définie par une intégrale à bornes variables)

Soit α, β dérivables sur un intervalle J à valeurs dans I . Montrer que la fonction

$$\begin{aligned} \varphi : J &\rightarrow \mathbb{K} \\ x &\mapsto \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t) dt \end{aligned}$$

est dérivable sur J et exprimer sa dérivée en fonction de f , α et β .

13

Exercice (Primitives des fonctions paires, impaires, périodiques)

On suppose que $I = \mathbb{R}$.

1 On suppose f impaire. Que dire des primitives de f ?

2 On suppose f paire. Combien f admet-elle de primitives impaires ?

3 On suppose f T -périodique. À quelle condition nécessaire et suffisante f admet-elle (au moins) une primitive T -périodique ?

14

Écritures $\int_a^b f(t) dt = [F(t)]_a^b = [F(t)]_{t=a}^{t=b}$.

La notation $\int f$, ou $\int f(x) dx$, désigne (abusivement) une primitive de f (cf. Maple). On écrira par exemple

$$\int \cos(x) dx = \sin(x) + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

3. EXPONENTIELLES, LOGARITHMES, PUISSANCES

3.1. FONCTION LOGARITHME

Définition (Fonction logarithme)

L'application *logarithme (népérien)*, notée \ln (ou \log), est la primitive sur \mathbb{R}_+^* s'annulant en 1 de l'application inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Autrement dit,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

3.a

La fonction logarithme est donc dérivable sur \mathbb{R}_+^* , et, pour tout réel strictement positif x :

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

En particulier, on en déduit que : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Proposition (La fonction logarithme est un morphisme)

La fonction logarithme est un morphisme de (\mathbb{R}_+^*, \cdot) vers $(\mathbb{R}, +)$: pour tous réels strictement positifs x et y , on a :

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).$$

3.a

Démonstration

Fixons $y_0 \in \mathbb{R}_+^*$. On étudie la fonction auxiliaire $g : x \mapsto \ln(xy_0) - \ln(y_0)$. On vérifie que g est l'unique primitive sur \mathbb{R}_+^* s'annulant en 1 de la fonction inverse, *i.e.* $g = \ln$. □

En conséquence, on a, pour tous réels strictement positifs x et y , tout entier relatif n :

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x), \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y), \quad \ln(x^n) = n \ln(x).$$

Si x et y sont deux réels non nuls de même signe, alors $\ln xy = \ln |x| + \ln |y|$;

L'application $x \mapsto \ln |x|$ est définie et dérivable sur \mathbb{R}^* , et sa dérivée est la fonction inverse.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et à valeurs dans \mathbb{R}^* . On appelle *dérivée logarithmique* de f la dérivée de l'application $\ln |f|$, *i.e.* l'application $\frac{f'}{f}$.

Proposition (Propriétés analytiques de la fonction logarithme)

- (1) La fonction logarithme est strictement croissante, continue et indéfiniment dérivable sur \mathbb{R}_+^* ;
- (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$;
- (3) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$;
- (4) La fonction logarithme réalise une bijection de \mathbb{R}_+^* sur \mathbb{R} .

3.b

Démonstration

- (1) La fonction inverse est à valeurs strictement positives, continue et indéfiniment dérivable sur \mathbb{R}_+^* .
- (2) Par croissance, \ln admet une limite l en $+\infty$, finie ou égale à $+\infty$. En considérant la quantité $\ln(2x)$ (où $x \in \mathbb{R}_+^*$), on vérifie que nécessairement $l = +\infty$ (supposer l finie conduirait à l'absurdité $\ln(2) = 0$);
- (3) Par croissance, \ln admet une limite, valant éventuellement $-\infty$, en 0^+ . De plus, on a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \frac{1}{x} = -\lim_{y \rightarrow +\infty} \ln y = -\infty$;
- (4) L'application logarithme est continue, strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* , et de limites respectives $-\infty$ et $+\infty$ en 0 et $+\infty$: \ln est une bijection de \mathbb{R}_+^* sur \mathbb{R} .

□

La fonction logarithme est donc un morphisme bijectif du groupe (\mathbb{R}_+^*, \cdot) sur le groupe $(\mathbb{R}, +)$: on dit que c'est un *isomorphisme de groupes*.

Illustration

3.2. FONCTION EXPONENTIELLE

Définition (Fonction exponentielle)

L'application *exponentielle* est la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien, notée *exp*. C'est donc une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R}_+^* .

3.b

Il résulte des propriétés de la fonction \ln les propriétés suivantes de la fonction exponentielle :

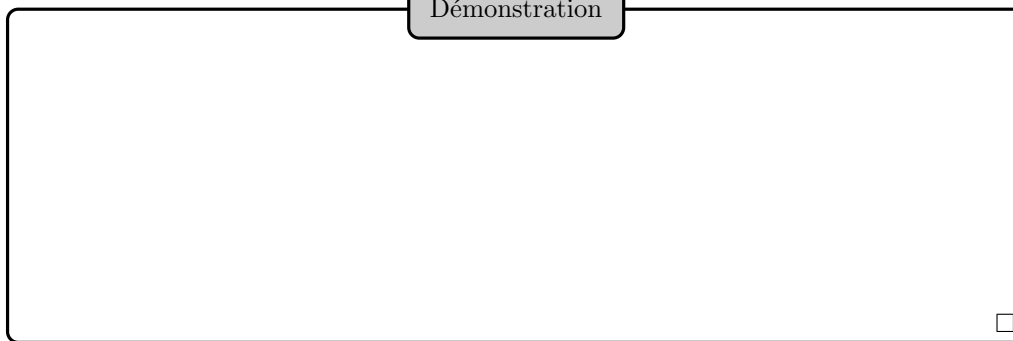
Proposition (Propriétés de la fonction exponentielle)

La fonction exponentielle est :

- (1) Un isomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ sur (\mathbb{R}_+^*, \cdot) ;
- (2) Continue, strictement croissante, de limites respectives 0 et $+\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$;
- (3) Indéfiniment dérivable sur \mathbb{R} , égale à sa propre dérivée.

3.c

Démonstration



Pour tous réels x et y , tout entier relatif n on a :

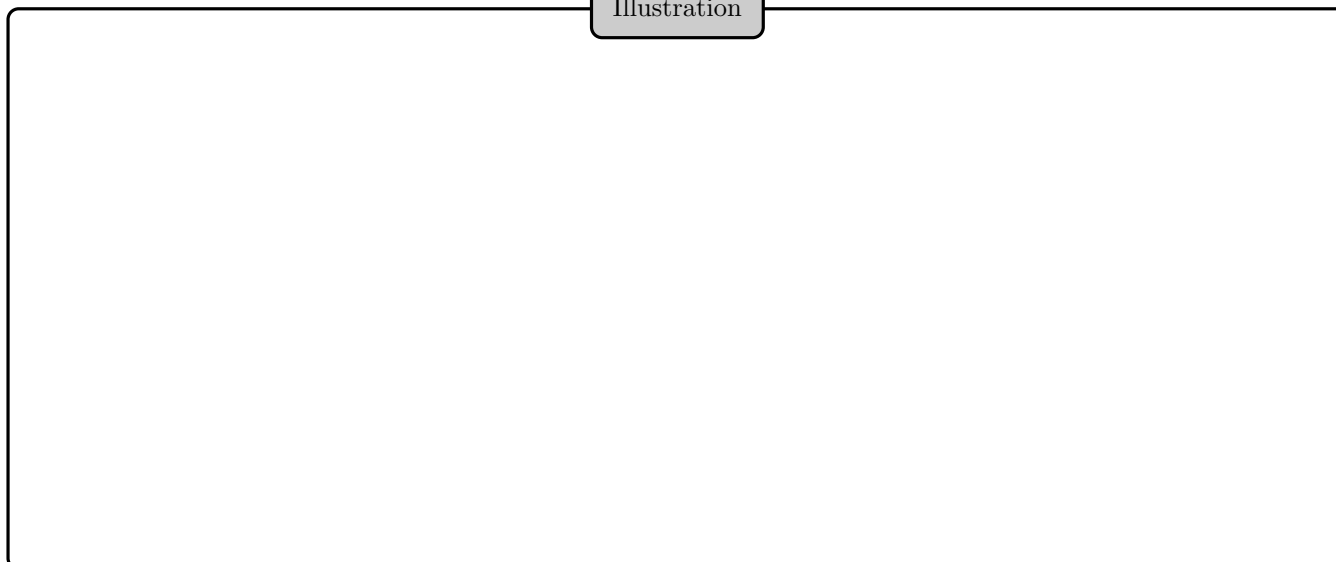
$$\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$$

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

$$\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$$

$$(\exp(x))^n = \exp(nx).$$

Illustration

3.3. FONCTIONS EXPONENTIELLE ET LOGARITHME DE BASE a Définition (Exponentielle de base a)

Pour tout réel $a > 0$, et pour tout réel x , on pose $a^x = \exp(x \ln a)$. L'application $x \mapsto a^x$ ainsi définie sur \mathbb{R} est appelée *fonction exponentielle de base a* .

3.c

On a donc, pour tout réel x : $\exp(x) = e^x$, où $e = \exp(1)$, d'où la notation standard de la fonction exponentielle.

La fonction exponentielle de base a est la composée de l'application linéaire de multiplication par $\ln(a)$ par la fonction exponentielle. Son étude est donc très facile, et on donne sans preuve ses propriétés les plus remarquables.

Proposition (Propriétés de l'exponentielle de base a)

Soit a un réel strictement positif.

- (1) L'application $x \mapsto a^x$ est définie, continue, et indéfiniment dérivable sur \mathbb{R} . Sa dérivée est l'application $x \mapsto (\ln(a))a^x$. Elle est strictement croissante (resp. strictement décroissante, resp. constante) si $a > 1$ (resp. $a < 1$, resp. $a = 1$);

- (2) Pour tous réels x et y , on a :

$$a^{x+y} = a^x a^y, \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \quad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}, \quad (a^x)^y = a^{xy}.$$

- (3) Les courbes représentatives de $x \mapsto a^x$ et $x \mapsto \left(\frac{1}{a}\right)^x$ sont symétriques l'une de l'autre par rapport à l'axe des ordonnées.

- (4) Si $a > 1$, alors : $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$.

$$\text{Si } a \in]0, 1[, \text{ alors : } \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0.$$

- (5) Si $a \neq 1$, elle réalise une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R}_+^* . Sa bijection réciproque est la fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$.

3.d

Définition (Fonction logarithme de base a)

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. La fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ est appelée fonction *logarithme de base a* . C'est la bijection réciproque de la fonction exponentielle de base a .

3.d

Encore une fois, l'exponentielle et le logarithme de base a sont des morphismes de groupes (de $(\mathbb{R}, +)$ vers (\mathbb{R}_+^*, \cdot) pour l'exponentielle, de (\mathbb{R}_+^*, \cdot) vers $(\mathbb{R}, +)$ pour le logarithme).

Illustration

3.4. FONCTIONS PUISSANCES

Définition (Fonction puissance)

Soit α un nombre réel quelconque, et x un réel strictement positif (on a donc déjà défini l'expression x^α). On appelle *fonction puissance d'exposant α* l'application définie sur \mathbb{R}_+^* par $x \mapsto x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$.

3.e

Il se peut que l'expression x^α ait un sens sur un domaine plus large pour x : si par exemple $\alpha = 1$, l'expression a un sens pour tout réel x . Si plus généralement α est un entier naturel, l'expression x^α a un sens pour tout réel x (en convenant que $0^0 = 1$). Si α est un entier négatif, x^α a un sens pour tout réel non nul, et si par exemple $\alpha = \frac{1}{2}$, x^α a un sens lorsque x vaut 0.

Proposition (Propriétés des fonctions puissances)

- (1)
 - Si $\alpha > 0$, alors $x \mapsto x^\alpha$ a pour limites respectives 0 et $+\infty$ en 0 et $+\infty$, et l'application $x \mapsto x^\alpha$ est notamment prolongeable par continuité en 0, en lui donnant la valeur 0.
 - Si $\alpha < 0$, alors $x \mapsto x^\alpha$ a pour limites respectives $+\infty$ et 0 en 0 et $+\infty$.
 - Si $\alpha = 0$, l'application $x \mapsto x^\alpha$ est constante, de valeur 1.
- (2) Pour $\alpha \neq 0$, l'application $x \mapsto x^\alpha$ est une bijection continue, indéfiniment dérivable de \mathbb{R}_+^* sur lui-même, sa bijection réciproque étant $x \mapsto x^{\frac{1}{\alpha}}$, et son nombre dérivé en x est : $\alpha x^{\alpha-1}$.

3.e

Illustration

Exercice (Dérivée de u^v)

Faire l'exercice 22 de TD.

15

3.5. COMPARAISON DES FONCTIONS USUELLES

Il est très utile en analyse de pouvoir « mesurer les forces en présence », c'est-à-dire savoir qui de deux fonctions l'emporte (si quelqu'un l'emporte bien) là où on les étudie. On peut résumer la proposition suivante, en notant que l'exponentielle l'emporte sur les fonctions puissances, qui l'emportent sur les fonctions logarithmes.

Proposition (Comparaison des fonctions usuelles)

- (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0^-;$
- (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp x}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x \exp x = 0;$
- (3) $\forall \alpha, \beta > 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^\beta x}{x^\alpha} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha |\ln x|^\beta = 0;$
- (4) $\forall \alpha, \beta > 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp^\beta x}{x^\alpha} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\alpha \exp^\beta x = 0;$
- (5) Pour $a > 1$ et $\alpha > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\alpha a^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty.$$

- (6) Pour $a \in]0, 1[$ et $\alpha > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha a^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a^x}{|x|^\alpha} = +\infty.$$

3.f

Démonstration

- (1) La fonction $\varphi : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ est positive sur $[1, +\infty[$, dérivable sur cet intervalle, et $\varphi'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$ pour tout $x \in [1, +\infty[$. Cette fonction est donc décroissante et minorée par 0 sur $[e, +\infty[$, et, partant, admet une limite finie $l \in \mathbb{R}_+$ en $+\infty$. En faisant tendre x vers $+\infty$ dans l'expression $\varphi(2x) = \frac{\ln(2)+\ln(x)}{2x}$, il vient $l = l/2$, donc $l = 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. En écrivant $x \ln(x) = -\frac{\ln(1/x)}{1/x}$, et en faisant tendre x vers 0, on obtient : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$.

- (2) Soit $x \in \mathbb{R}_+^* : \frac{\exp(x)}{x} = \frac{\exp(x)}{\ln(\exp(x))}$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$, d'après ce qui précède.

Soit $x \in \mathbb{R}_-^* : x \exp(x) = -\frac{-x}{\exp(-x)}$, puis en faisant tendre x vers $-\infty$, il vient bien : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \exp(x) = 0$.

- (3) Fixons $\alpha, \beta > 0$. De la première formule, et du fait que $x^{\alpha/\beta}$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$, on tire :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^{\alpha/\beta})}{x^{\alpha/\beta}} = 0,$$

puis, grâce aux propriétés du logarithme :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^{\alpha/\beta}} = 0,$$

La fonction puissance d'exposant $\beta (> 0)$ étant de limite nulle en 0, on obtient bien :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)^\beta}{x^\alpha} = 0.$$

De même pour les autres limites.

□

Exercice (Comparaison de fonctions)

Faire l'exercice 21 de TD.

16

4. CALCUL PRATIQUE DE PRIMITIVES

4.1. INTÉGRATION PAR PARTIES

On dit qu'une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles est de classe \mathcal{C}^1 si elle est dérivable, de dérivée continue.

Proposition (Intégration par parties)

Si u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$, on a :

$$\int_{[a,b]} uv' = [uv]_a^b - \int_{[a,b]} u'v.$$

4.a

Démonstration

□

Cette formule provient donc simplement de la formule de dérivation d'un produit.

Lorsqu'on applique cette méthode, bien préciser u , v (et non pas u et v' , car la connaissance de v' ne donne pas v), et ne pas oublier de signaler que ces deux fonctions sont de classe \mathcal{C}^1 .

Quand effectuer une intégration par parties? Cette formule est notamment utile pour se débarrasser de fonctions « compliquées » telles que \ln , etc.

Exercice (Primitive du logarithme)

À l'aide d'une intégration par parties, déterminer une primitive de la fonction logarithme (sur \mathbb{R}_+^*).

17

Elle permet également dans certains cas d'obtenir un terme intégral que l'on arrive plus facilement à encadrer.

Exercice (Sinus intégral)

On considère la suite de terme général

$$u_n = \int_1^n \frac{\sin(t)}{t} dt.$$

À l'aide d'une intégration par parties, montrer que cette suite est bornée.

18

Il arrive d'appliquer plusieurs fois d'affilée cette méthode (voire de calculer une suite d'intégrales) : à cet égard, le DM sur les intégrales de Wallis est conseillé.

Exercice (Intégration par parties)

Calculer $\int_0^\pi x \sin(x) dx$ en effectuant une intégration par parties.

19

4.2. CHANGEMENT DE VARIABLE

Proposition (Changement de variable)

Soit I et J deux intervalles de \mathbb{R} , et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue, $\varphi : J \rightarrow I$ de classe \mathcal{C}^1 . Soient α et β deux éléments de J . On a :

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u)) \varphi'(u) du.$$

4.b

Démonstration

□

Cette formule provient donc simplement de la formule de dérivation d'une composée. Moyen mnémotechnique à la physicienne : si $t = \varphi(u)$, alors $dt = \varphi'(u) du$. Il ne faut pas oublier de changer les bornes de l'intégrale !

Exemple (Changement de variable)

En effectuant le changement de variable $u = \sin(t)$, on a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(t) \cos(t) dt = \int_0^1 u^3 du = \frac{1}{4}.$$

On aurait aussi pu écrire

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(t) \cos(t) dt = \int_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} \sin^3(t) d \sin(t) = \left[\frac{\sin^4(t)}{4} \right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}.$$

i

Exemple (Invariance par translation)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $\tau \in \mathbb{R}$. On a

$$\int_a^b f(t) dt = \int_{a+\tau}^{b+\tau} f(t - \tau) dt$$

ii

Exercice (Changement de variable)

Calculer $\int_0^\pi x \sin(x) dx$ en effectuant le changement de variable $u = \pi - x$.

20

Exercice (Valeur moyenne d'une fonction périodique)

Soit f une fonction T -périodique et continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

1 Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

$$\int_{[a, a+T]} f = \int_{[b, b+T]} f.$$

Ainsi, il est permis de définir la *valeur moyenne* d'une fonction T -périodique comme le réel

$$\frac{1}{T} \int_{[a, a+T]} f,$$

(indépendant de la valeur de a).

2 Calculer les valeurs moyennes de \cos , \sin , \cos^2 , \sin^2 .

21

Exercice (Aire d'un quart de disque)

Calculer $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$.

22

Les changements de variable les plus simples, les changements de variable affines, permettent notamment d'exploiter la périodicité et la symétrie de la fonction considérée (périodicité, parité, imparité, décalage).

Ils permettent aussi de se ramener au cas où le segment d'intégration est $[0, 1]$ ($t = a + u(b-a)$), ou $[-1, 1]$ ($t = \frac{a+b}{2} + u \frac{a-b}{2}$) au choix.

4.3. EXEMPLES CLASSIQUES DE PRIMITIVES

On mentionne ici des primitives classiques et trop souvent oubliées.

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C. (\alpha \neq -1).$$

$$\int \frac{dx}{\cos(x)^2} = \tan(x) + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sin(x)^2} = -\cotan(x) + C.$$

$$\int \frac{dx}{\cos(x)} = \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sin(x)} = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C.$$

$$\int \tan(x) dx = -\ln |\cos(x)| dx + C.$$

5. FONCTIONS HYPERBOLIQUES

Définition (Fonctions hyperboliques)

On définit la fonction *cosinus hyperbolique*, de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , notée ch , par $\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, pour tout réel x .

On définit la fonction *sinus hyperbolique*, de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , notée sh , par $\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, pour tout réel x .

On définit la fonction *tangente hyperbolique*, de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , notée th , par $\text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$, pour tout réel x .

5.a

La fonction cosinus hyperbolique ne s'annulant pas, la fonction tangente hyperbolique est bien définie sur \mathbb{R} .

Les fonctions ch et sh sont respectivement les parties paire et impaire de la fonction exponentielle. En particulier, pour tout réel x :

$$\exp(x) = \text{ch}(x) + \text{sh}(x) \quad \text{et} \quad \exp(-x) = \text{ch}(x) - \text{sh}(x).$$

Proposition (Propriétés des fonctions cosinus et sinus hyperboliques)

- (1) Les applications cosinus et sinus hyperboliques sont continues et indéfiniment dérivables sur \mathbb{R} . La fonction ch (resp. sh) est strictement croissante sur \mathbb{R}_+ (resp. sur \mathbb{R}).
- (2) On a $\text{ch}' = \text{sh}$ et $\text{sh}' = \text{ch}$ (et donc $\text{ch}'' = \text{ch}$ et $\text{sh}'' = \text{sh}$).
- (3) ch est paire, sh impaire.
- (4) $\lim_{+\infty} \text{ch} = +\infty$, $\lim_{+\infty} \text{sh} = +\infty$, $\lim_{-\infty} \text{ch} = +\infty$, $\lim_{-\infty} \text{sh} = -\infty$.
- (5) ch est d'image $[1, +\infty[$, sh est une bijection de \mathbb{R} sur lui-même.
- (6) Les applications ch et sh vérifient la relation fondamentale : $\text{ch}^2 - \text{sh}^2 = 1$.

5.a

Démonstration

Montrons seulement les deux derniers points, les autres étant évidents.

Soit $x \in \mathbb{R}$: $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = (\text{ch}(x) - \text{sh}(x))(\text{ch}(x) + \text{sh}(x)) = \exp(-x) \exp(x) = 1$.

□

Proposition (Propriétés de tangente hyperbolique)

L'application th est impaire, strictement croissante, indéfiniment dérivable, et $\text{th}' = 1 - \text{th}^2 = \frac{1}{\text{ch}^2}$. De plus, $\lim_{+\infty} \text{th} = 1$, $\lim_{-\infty} \text{th} = -1$

5.b

Démonstration

Les vérifications sont immédiates.

□

Comme en trigonométrie circulaire, on a des formules pour les fonctions hyperboliques. On peut par exemple linéariser une puissance de ch ou de sh, ou inversement exprimer $x \mapsto \text{ch}(nx)$ et $x \mapsto \text{sh}(nx)$ sous forme de polynôme en ch et sh.

Exercice (Linéarisation d'une puissance de sinus hyperbolique)

Linéariser sh^5 (réponse : $x \mapsto \frac{1}{16} (\text{sh}(5x) - 5 \text{sh}(3x) + 10 \text{sh}(x))$).

23

Illustration

Exercice (Sommes de fonctions hyperboliques)

Faire l'exercice 23 de TD.

24

6. FONCTIONS CIRCULAIRES RÉCIPROQUES

6.1. DÉFINITION, PROPRIÉTÉS

Définition (Fonctions circulaires réciproques)

La restriction à $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ de la fonction sinus est une bijection de I sur $J = [-1, 1]$.
 La bijection réciproque de cette fonction est appelée *fonction arc sinus*, notée \arcsin .
 La restriction à $I = [0, \pi]$ de la fonction cosinus est une bijection de I sur $J = [-1, 1]$.
 La bijection réciproque de cette fonction est appelée *fonction arc cosinus*, notée \arccos .
 La restriction à $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ de la fonction tangente est une bijection de I sur \mathbb{R} .
 La bijection réciproque de cette fonction est appelée *fonction arc tangente*, notée \arctan .

6.a

Illustration

Explication sur les fonctions circulaires réciproques

Soit $x \in [-1, 1]$. Le nombre $\arcsin(x)$ (resp. $\arccos(x)$) est le réel compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ (resp. entre 0 et π), dont le sinus (resp. le cosinus) vaut x .

Soit $y \in \mathbb{R}$. Le nombre $\arctan(y)$ est l'unique réel compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ dont la tangente vaut y .

6.1

Illustration

Exemple (Valeurs des fonctions circulaires réciproques)

$$(1) \arcsin(0) = 0, \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}, \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}, \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3},$$

$$\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}.$$

$$(2) \arccos(-1) = \pi, \arccos(0) = \frac{\pi}{2}, \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}, \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4},$$

$$\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}, \arccos(1) = 0.$$

$$(3) \arctan(0) = 0, \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}, \arctan(1) = \frac{\pi}{4}, \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}.$$

i

Proposition (Régularité des fonctions circulaires réciproques)

(1) L'application \arcsin est une bijection continue, strictement croissante, de $[-1, 1]$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. De plus, \arcsin est indéfiniment dérivable sur $] -1, 1[$, et, pour tout $x \in] -1, 1[$: $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(2) L'application \arccos est une bijection continue et strictement décroissante de $[-1, 1]$ sur $[0, \pi]$. De plus, \arccos est indéfiniment dérivable sur $] -1, 1[$, et, pour tout $x \in] -1, 1[$: $\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(3) L'application \arctan est une bijection de \mathbb{R} sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, continue, strictement croissante, et indéfiniment dérivable sur \mathbb{R} . De plus, pour tout réel x : $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

6.a

Démonstration

□

Proposition (Propriétés de symétrie des fonctions circulaires réciproques)

Les fonctions arcsin et arctan sont impaires, et, pour tout $x \in [-1, 1]$:

$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \arccos(x) + \arccos(-x) = \pi.$$

6.b

Démonstration

□

Cette dernière relation exprime le fait que le graphe d'arccosinus admette le point de coordonnées $(0, \pi/2)$ pour centre de symétrie.

Proposition (Relation fonctionnelle pour arctangente)

La fonction arctangente vérifie, pour tout réel non nul x :

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \text{sg}(x) \frac{\pi}{2},$$

où $\text{sg}(x)$ vaut 1 (resp. -1) si $x > 0$ (resp. $x < 0$).

6.c

Démonstration

□

6.2. SIMPLIFIER UNE EXPRESSION TRIGONOMÉTRIQUE

Composée d'arcsinus et de sinus

Pour tout $x \in [-1, 1]$, $\sin(\arcsin(x)) = x$, et n'a pas de sens si $x \notin [-1, 1]$.
 Pour tout $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\arcsin(\sin(y)) = y$, mais cette composée a un sens pour tout $y \in \mathbb{R}$. En fait, la fonction $y \mapsto \arcsin(\sin(y))$ de \mathbb{R} dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est la fonction qui à y associe l'unique $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tel que $\sin(\theta) = \sin(y)$. Pour trouver θ , on peut d'abord chercher l'unique $\alpha \in [-\pi/2, 3\pi/2[$, congru à y modulo 2π .

- Si $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, alors $\theta = \alpha$.
- Si $\alpha \in]\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}[$, alors $\theta = \pi - \alpha$.

6.2

Composée d'arccosinus et de cosinus

Pour tout $x \in [-1, 1]$, $\cos(\arccos(x)) = x$, et n'a pas de sens si $x \notin [-1, 1]$.
 Pour tout $y \in [0, \pi]$, $\arccos(\cos(y)) = y$, mais cette composée a un sens pour tout $y \in \mathbb{R}$. En fait, la fonction $y \mapsto \arccos(\cos(y))$ de \mathbb{R} dans $[0, \pi]$ est la fonction qui à y associe l'unique $\theta \in [0, \pi]$ tel que $\cos(\theta) = \cos(y)$. Pour trouver θ , on peut d'abord chercher l'unique $\alpha \in]-\pi, \pi]$, congru à y modulo 2π .

- Si $\alpha \in [0, \pi]$, alors $\theta = \alpha$.
- Si $\alpha \in]-\pi, 0]$, alors $\theta = -\alpha$.

6.3

Composée d'arctangente et de tangente

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan(x)) = x$.
 Pour tout $y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\arctan(\tan(y)) = y$, mais cette composée a un sens pour tout $y \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. En fait, la fonction $y \mapsto \arctan(\tan(y))$ de $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est la fonction qui à y associe l'unique $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tel que $\tan(\theta) = \tan(y)$. θ est donc l'unique élément de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ congru à y modulo π .

6.4

Exercice (Simplifications)

Traiter des questions des exercices 17, 19 et 20 de TD.

25

7. COMPLÉMENT SUR LE CALCUL DE PRIMITIVES

À la lumière de ce qui précède, on peut rajouter les calculs suivants de primitives.

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C.$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C \quad (a \in \mathbb{R}_+^*).$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C'.$$

Nous sommes maintenant en mesure de déterminer les primitives (sur un intervalle de définition) des fonctions du type : $f : x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$, où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $a \neq 0$. Tout dépendra du type des racines du trinôme $P = aX^2 + bX + c$, donné par son discriminant Δ :

- (1) Cas où P admet une unique racine (alors réelle) α ($\Delta = 0$). On a $P = a(X - \alpha)^2$, de sorte que

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} =$$

- (2) Cas où P admet deux racines réelles distinctes α et β ($\Delta > 0$). On peut alors trouver des réels s et t tels que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\alpha, \beta\}$, on ait

$$\frac{1}{ax^2 + bx + c} = \frac{s}{x - \alpha} + \frac{t}{x - \beta},$$

de sorte que

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} =$$

- (3) Cas où P admet deux racines complexes non réelles conjuguées ($\Delta < 0$). On peut mettre P sous forme canonique

$$P = a((X - \alpha)^2 + \beta^2),$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}_+^*$, de sorte que

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} =$$

8. FEUILLE DE TD 4 : TECHNIQUES FONDAMENTALES EN ALGÈBRE ET ANALYSE

8.1. UTILISATION DES SYMBOLES DE SOMME ET DE PRODUIT

Exercice 1 (Symboles de somme et de produit)

0

1 Établir une formule pour $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2-1}$ valable pour chaque entier $n \geq 2$.

2 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $1! + 2! + \dots + n! = (n+1)! - 1$.

3 Évaluer, pour tout entier naturel n , la somme

$$S_n = \sum_{\{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, p+q \leq n\}} (p+q).$$

4 Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Trouver une formule pour $\prod_{i=2}^n (1 - \frac{1}{i})$.

5 De même pour $\prod_{i=2}^n (1 - \frac{1}{i^2})$.

6 Soit n un entier naturel. Calculer $\sum_{i+j=n} \min(\{i, j\})$, $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \min(\{i, j\})$ et $\sum_{i,j=1}^n \min(\{i, j\})$.

7 Soit n un entier naturel. Calculer $\sum_{i+j=n} ij$.

Exercice 2 (Sommes de puissances)

1

1 Montrer de deux manières que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

2 Montrer de deux manières que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3 Trouver une formule analogue pour $\sum_{k=0}^n k^3$. Quel est le lien entre cette somme et $\sum_{k=0}^n k$? Retrouver ce lien par un dessin.

Exercice 3 (Somme de carrés de nombres de même parité)

3

Montrer de deux manières différentes que, pour tout entier pair ≥ 2 , on a :

$$2^2 + 4^2 + \dots + n^2 = \binom{n+2}{3}$$

Montrer que pour tout entier naturel impair n , on a

$$1^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \binom{n+2}{3}.$$

Exercice 4 (Sommes de sommes)

4

On définit par récurrence $S_{m,n}$ par :

- $\forall n \in \mathbb{N}, S_{0,n} = \sum_{k=0}^n 1$;
- $\forall m, n \in \mathbb{N}, S_{m+1,n} = \sum_{k=0}^n S_{m,k}$.

Donner une expression simple de $S_{m,n}$, pour tous $n, m \in \mathbb{N}$.

8.2. SYSTÈMES

Exercice 5 (Systèmes)

3

1 Résoudre, suivant les valeurs du paramètre réel m :

$$\begin{cases} x + (m+1)y = m+2 \\ mx + (m+4)y = 8 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} mx + (m-1)y = m+2 \\ (m+1)x - my = 5m+3 \end{cases}$$

2 Résoudre, suivant les valeurs des paramètres réels λ et a :

$$\begin{cases} 3x + 2y - z + t = \lambda \\ 2x + y - z = \lambda - 1 \\ 5x + 4y - 2z = 2\lambda \\ (\lambda+2)x + (\lambda+2)y - z = 3\lambda + a \end{cases}$$

Exercice 6 (Compatibilité d'un système)

0

Étudier l'existence de solutions des systèmes complexes :

1

$$\begin{cases} x + y + (1-m)z = m+2 \\ (1+m)x - y + 2z = 0 \\ 2x - my + 3z = m+2. \end{cases}$$

2

$$\begin{cases} x - my + m^2z = m \\ mx - m^2y + mz = 1 \\ mx + y - m^3z = -1. \end{cases}$$

3

$$\begin{cases} x + my + z = 1 \\ (m+1)x + 2y + (m-3)z = -1 \\ (m-1)x - 3z = -1. \end{cases}$$

4

$$\begin{cases} 3mx + (3m-7)y + (m-5)z = m-1 \\ (2m-1)x + (4m-1)y + 2mz = m+1 \\ 4mx + (5m-7)y + (2m-5)z = 0. \end{cases}$$

8.3. ÉQUATIONS

Exercice 7 (Équations de puissances, logarithmes, exponentielles)

0

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue réelle x :

1 $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$.

2 $\ln(x^2 - 1) = \ln(2 - x) + \ln(3 - x)$.

3 $\ln(x^2 - 1) = 2 \ln(x - 2)$.

4 $e^x + e^{-x} = \sqrt{13}$.

5 $5^x - 5^{x+1} + 2^{3x-1} = 0$.

Exercice 8 (Équations trigonométriques)

0

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue réelle x :

1 $\cos(x) = \frac{1}{2}$, $\tan(x) = 1$, $\sin(x) + \cos(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

2 $\tan(x) \tan(2x) = 1$.

3 $\arcsin(x+1) - \arcsin(x) = \frac{\pi}{6}$.

4 $\arctan(x) + \arctan(2x) = \frac{\pi}{4}$.

8.4. DÉRIVATION, INTÉGRATION

Exercice 9 (Calculs de dérivées)

0

Calculer les dérivées des fonctions (toujours appelées f) :

1 $x \mapsto \frac{\cos(x)}{1+\cos(x)^2}$.

2 $x \mapsto e^{\sin(x)}$.

3 $x \mapsto \ln(e^{2x} - e^x + 1)$.

4 $x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x^3-2}$.

5 $x \mapsto \frac{7}{(7x-3)^6}$.

6 $x \mapsto \frac{x}{2+(1-x)^3}$.

7 $x \mapsto (3x+4)\sqrt{5x+2}$.

Exercice 10 (Calculs de primitives)

0

1 $\int \frac{dx}{x^2-4x+1}$.

2 $\int_0^{2\pi} \sin px \sin qx dx$, $\int_0^{2\pi} \sin px \cos qx dx$, $\int_0^{2\pi} \cos px \cos qx dx$, où $(p, q) \in \mathbb{N}^2$

3 $\int \cos^2 x \sin^2 x dx$.

4 $\int \cos^2 x \sin^3 x dx$.

5 $\int \frac{\sin(2x)}{1+\cos^2(x)} dx$.

Exercice 11 (Utilisation de la dérivation pour une somme)

2

Soit, pour tout $(n, x) \in \mathbb{N}^* \times (\mathbb{R} \setminus \{1\})$:

$$f_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}.$$

Écrire $f_n(x)$ en fonction de n et calculer $f_{15}(2)$.

Exercice 12 (Calcul d'intégrales)

2

Calculer les intégrales suivantes :

1 $A = \int_0^x e^t \sin(2t) dt$ et $B = \int_0^x e^t \cos(2t) dt$.

2 $I = \int_0^x e^t \sin(t)^2 dt$ et $J = \int_0^x e^t \cos(t)^2 dt$.

3 $C = \int_0^{\pi/4} (2t+1) \cos(t)^2 dt$ et $D = \int_0^{\pi/4} (2t+1) \sin(t)^2 dt$.

Exercice 13 (Changements de variables)

2

Calculer

1 $\int_0^\pi \cos(x)^3 \sin(x) dx.$

2 $\int_0^1 \sqrt{1-u^2} du.$

3 $\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+2} dx.$

4 $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin(x)}. (t = \tan(x/2))$

5 $\int_0^{\pi/6} \frac{dx}{\cos(x)}.$

6 $\int_{1/2}^{3/4} \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}. (t = \sin(u)^2)$

7 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}. (u = e^x \text{ puis } t = \sqrt{1+u^2})$

Exercice 14 (Inégalité intégrale)

2

Soit f une fonction continue et croissante sur $[0, \pi]$. Le but de cet exercice est de montrer que :

$$\int_0^\pi f(x) \sin(x) dx \geq \int_0^2 f(x) dx.$$

1 Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}_+, 1 - \cos(x) \leq x.$ 2 Étudier la fonction $g : x \mapsto \int_0^x f(t) \sin(t) dt - \int_0^{1-\cos(x)} f(t) dt.$ Conclure.Exercice 15 (Suites de rationnels convergeant vers e^2)

3

On définit, pour tout entier naturel non nul n :

$$I_n = \int_0^2 \frac{1}{n!} (2-x)^n e^x dx.$$

1 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}.$$

2 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$e^2 - 1 = \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k!} + I_n.$$

3 En déduire :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{k!} = e^2.$$

Exercice 16 (Étude de suite intégrale)

3

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n t dt$.

1

- i Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$.
- ii Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.
- iii En déduire la limite de (I_n) .
- iv Calculer $f(n) = I_{n+4} - I_n$ en fonction de n , où $n \in \mathbb{N}^*$.

2 Déterminer la limite de la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

8.5. FORMULES

Exercice 17 (Formules particulières avec arctangente)

0

Montrer les formules suivantes :

- 1 $\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$.
- 2 $\frac{\pi}{4} = 2 \arctan \frac{1}{3} + \arctan \frac{1}{7}$.
- 3 $3 \arctan(2 - \sqrt{3}) = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$.

Exercice 18 (Somme de deux arctangentes)

2

Soit a et b des réels tels que $ab \neq 1$. Montrer l'existence de $\varepsilon \in \{-1, 0, +1\}$ tel que :

$$\arctan(a) + \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) + \varepsilon\pi.$$

8.6. SIMPLIFICATIONS

Exercice 19 (Simplifications d'expressions constantes)

0

Simplifier les expressions suivantes :

- 1 $\arctan(1/2) + \arctan(1/5) + \arctan(1/8)$.
- 2 $\arcsin(4/5) + \arcsin(5/13) + \arcsin(16/65)$.

Exercice 20 (Simplifications d'expressions fonctionnelles)

2

Simplifier, quand elles ont un sens, les expressions suivantes :

- 1 $\tan(\arcsin x)$, $\sin(\arccos x)$, $\cos(\arctan x)$, $\cos(2 \arccos(x))$, $\cos(2 \arcsin(x))$, $\tan(2 \arcsin(x))$.
- 2 $\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$, $\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$, $\arcsin\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$, $\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$, $\arccos(4x^3 - 3x)$, $\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$.
- 3 Simplifier, pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\text{sh}(\ln(\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2})))$.
- 4 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\arctan(\text{sh}(x)) = \arccos(1/\text{ch}(x))$.

Exercice 21 (Limite et puissances)

0

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}$.

Exercice 22 (Dérivation d'une fonction s'écrivant comme puissance)

0

On considère deux fonctions $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ et $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dérivables sur \mathbb{R} . Calculer $(u^v)'$.

Exercice 23 (Sommes de fonctions hyperboliques)

1

Pour $(n, a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}^2$, calculer :

$$C_n(a, b) = \sum_{k=0}^n \operatorname{ch}(a + bk) \quad \text{et} \quad S_n(a, b) = \sum_{k=0}^n \operatorname{sh}(a + bk).$$

Exercice 24 (Graphe d'une fonction pas si compliquée)

3

Représenter le graphe de la fonction $f : x \mapsto \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) - 2 \arctan(x)$.

Exercice 25 (Une suite avec arctangente)

3

1 Soit $p \in \mathbb{N}$. Simplifier $\arctan(p+1) - \arctan(p)$.

2 En déduire la limite de la suite de terme général $S_n = \sum_{p=0}^n \arctan\left(\frac{1}{p^2+p+1}\right)$.

Structures algébriques

Sommaire

1. Groupes	121
1.1. Lois de composition interne	121
1.2. Groupes, sous-groupes	123
1.3. Morphismes de groupes	126
2. Anneaux	130
2.1. Définition et propriétés calculatoires	130
2.2. Sous-anneaux	134
2.3. Morphismes d'anneaux	135
3. Corps	136
4. Questionnaire 2 : Structures algébriques	138
5. Feuille de TD 5 : Structures algébriques	139
5.1. Groupes	139
5.2. Anneaux, corps	141
5.3. Compléments sur les groupes	143

1. GROUPES

1.1. LOIS DE COMPOSITION INTERNE

Soit E un ensemble non vide.

Définition (Loi de composition interne)

Une *loi de composition interne* \diamond sur E est une application de $E \times E$ dans E .

La loi \diamond est dite *associative* si

$$\forall x, y, z \in E, \quad (x \diamond y) \diamond z = x \diamond (y \diamond z)$$

La loi \diamond est dite *commutative* si

$$\forall x, y \in E, \quad (x \diamond y) = (y \diamond x)$$

E possède un *élément neutre* pour la loi \diamond s'il existe $e \in E$ tel que

$$\forall x \in E, \quad e \diamond x = x \diamond e = x$$

Si (E, \diamond) possède un élément neutre e , alors un élément $x \in E$ est dit *symétrisable* (pour \diamond) s'il existe $x' \in E$ tel que

$$x \diamond x' = x' \diamond x = e$$

x' est alors appelé *symétrique* de x dans (E, \diamond) .

1.a

Dans ce qui suit, E est muni d'une loi de composition interne \diamond .

Définition (Partie stable)

Une partie A de E est dite *stable* par \diamond si, pour tout $(a, a') \in A^2$, $a \diamond a' \in A$.

1.b

Proposition (Unicité de l'élément neutre, du symétrique)

- (1) E possède au plus un élément neutre, qui est alors son propre symétrique.
- (2) Dans le cas où la loi est associative et où E admet un élément neutre e pour \diamond , chaque élément de E admet au plus un symétrique pour cette loi.

1.a

Démonstration

□

Définition (Élément simplifiable)

Un élément x de E est dit *simplifiable à gauche* (pour \diamond) si, pour tous $y, z \in E$ tels que $x \diamond y = x \diamond z$, on a $y = z$. On définit de même le fait que x soit *simplifiable à droite*. On dit que x est *simplifiable* s'il est simplifiable à gauche et à droite.

1.c

Proposition (Élément simplifiable)

On suppose que \diamond est associative et que E admet un élément neutre e pour \diamond . Tout élément symétrisable de E est alors simplifiable.

1.b

Démonstration

□

Définition (Distributivité)

On suppose E muni d'une seconde loi de composition interne \star . On dit que \star est *distributive à gauche* par rapport à \diamond si :

$$\forall (x, y, z) \in E^3, \quad x \star (y \diamond z) = (x \star y) \diamond (x \star z).$$

On définit de même la *distributivité à droite*.

La loi \star est dite *distributive* par rapport à \diamond si elle l'est à gauche et à droite.

1.d

Exercice (Exemples de distributivité)

Donnez des exemples de lois distributives par rapport à d'autres.

1

1.2. GROUPE, SOUS-GROUPE

Définition (Groupe)

Soit G un ensemble non vide, muni d'une loi de composition interne \star . On dit que la loi \star définit une *structure de groupe*, ou que G (ou plutôt (G, \star)) est un *groupe* relativement à cette loi, si

- \star est associative;
- G admet un élément neutre pour \star (généralement noté e ou e_G);
- tout élément de G admet un symétrique dans G pour la loi \star .

Le groupe (G, \star) est dit *abélien* ou *commutatif* si la loi \star de G est commutative.

1.e

Soit (G, \cdot) un groupe.

D'après 1.a et 1.b, G a un unique élément neutre, tout élément de G a un unique symétrique et est simplifiable.

On note souvent la loi d'un groupe multiplicativement¹ (le symétrique de x est alors noté x^{-1}) ou additivement (le symétrique de x est $-x$). Cette dernière notation est réservée au cas d'un groupe abélien. Dans le cas de la notation multiplicative, on peut définir les puissances n -ièmes (où n est un entier relatif) d'un élément x de G . On a alors, pour tout $x \in G$, tout $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$:

$$x^m x^n = x^{m+n} = x^n x^m$$

et

$$(x^m)^n = x^{mn} = (x^n)^m$$

mais en général

$$(xy)^n \neq x^n y^n$$

(où $y \in G$). On a cependant bien égalité si x et y commutent, *i.e.* $xy = yx$.

Le symétrique du produit xy est $y^{-1}x^{-1}$, mais pas $x^{-1}y^{-1}$ en général (c'est le cas si et seulement si les deux éléments commutent).

En notation additive, on définit de même nx où $(n, x) \in \mathbb{Z} \times G$, et on a, pour tout $(x, y) \in G^2$ et tout $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$:

$$(m + n)x = mx + nx, \quad m(nx) = (mn)x, \quad m(x + y) = mx + my.$$

Exemple (Groupes)

- $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ pour l'addition.
- $(\mathbb{Q}^*, \cdot), (\mathbb{R}^*, \cdot), (\mathbb{C}^*, \cdot)$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{U}_n$ est un groupe.
- Groupe produit (voir l'exercice 8 de TD).

i

1. Si on ne précise pas la loi, c'est d'ailleurs implicitement le cas.

Exemple (Groupe symétrique)

Soit E un ensemble non vide. Notons \mathcal{S}_E l'ensemble des *permutations* de E (i.e. l'ensemble des bijections de E sur E). On vérifie facilement que la composition des applications \circ définit une loi de composition interne sur \mathcal{S}_E , lui conférant une structure de groupe.

Dès que E possède au moins trois éléments a, b et c , ce groupe \mathcal{S}_E n'est pas abélien :

ii

Définition (Sous-groupe)

Une partie H d'un groupe (G, \cdot) est un *sous-groupe* de G si H est

- stable par \cdot ;
- H , muni de la loi induite, est un groupe.

1.f

Nous noterons dans ce cours $H \leq G$ lorsque H est un sous-groupe de G . Si en outre $H \neq G$, on note $H < G$, et on dit que H est un sous-groupe *propre* de G .

Cette définition comporte des propriétés cachées : si H est un sous-groupe de G , alors $e_H = e_G$, et le symétrique d'un élément de H pour \cdot est le même dans H et dans G .

Si G est abélien, alors tous ses sous-groupes le sont aussi.

Cette notion de sous-groupe est très importante, car en général, pour montrer qu'un ensemble est un groupe, on montre qu'il s'agit d'un sous-groupe d'un groupe bien connu. Cette remarque vaut d'ailleurs pour toutes les structures algébriques.

Voici deux critères pratiques pour montrer qu'une partie d'un groupe en est un sous-groupe (H désigne une partie de G) :

Proposition (Première caractérisation des sous-groupes)

H est un sous-groupe de G si et seulement si

- (1) $H \neq \emptyset$;
- (2) H est stable par la loi de G ;
- (3) H est stable par passage au symétrique

1.c

Démonstration

□

Proposition (Seconde caractérisation des sous-groupes)

H est un sous-groupe de G si et seulement si

- (1) $H \neq \emptyset$;
- (2) $\forall x, y \in H, \quad xy^{-1} \in H$.

1.d

Démonstration

□

Exemple (Sous-groupes)

- Si $K \leq H$ et $H \leq G$, alors $K \leq G$.
- Un groupe ayant plus d'un élément admet au moins deux sous-groupes, G lui-même et le sous-groupe réduit à l'élément neutre.
- $\mathbb{Z} \leq \mathbb{Q} \leq \mathbb{R} \leq \mathbb{C}$, mais aussi $\mathbb{U}_n \leq \mathbb{U} \leq \mathbb{C}^*$
- Une intersection quelconque de sous-groupes en est un.
- L'union de deux sous-groupes est un sous-groupe si et seulement si l'un est inclus dans l'autre. L'union de trois sous-groupes sans relations d'inclusion peut très bien être un sous-groupe (donnez un exemple).
- Nous verrons que tous les sous-groupes de \mathbb{Z} sont de la forme $n\mathbb{Z}$.
- Centre d'un groupe : si G est un groupe, alors son *centre*

$$Z(G) = \{g_0 \in G, \forall g \in G, gg_0 = g_0g\}$$

est un sous-groupe commutatif de G .

iii

Exercice (Partie finie stable par multiplication)

Faire l'exercice 3 de TD.

2

1.3. MORPHISMES DE GROUPES

Dans cette section, sauf mention contraire, (G, \cdot) et (G', \cdot) sont deux groupes, d'éléments neutres respectifs e et e' .

Définition (Morphisme de groupe)

Soient (G, T) et (G', ∇) deux groupes. Un (*homo-*)*morphisme* de G vers G' est une application $\varphi : G \rightarrow G'$ vérifiant :

$$\forall x, y \in G, \quad \varphi(xTy) = \varphi(x)\nabla\varphi(y)$$

L'ensemble des morphismes de G vers G' est noté $\text{Hom}(G, G')$.

Un *endomorphisme* est un morphisme d'un groupe vers lui-même, l'ensemble des endomorphismes d'un groupe G est noté $\text{End}(G)$.

Un *isomorphisme* est un morphisme bijectif. S'il existe un isomorphisme entre deux groupes G et G' , on dit alors que les deux groupes sont *isomorphes*.

Un *automorphisme* est un endomorphisme bijectif (ou encore : un isomorphisme d'un groupe vers lui-même).

L'ensemble des automorphismes de G est noté $\text{Aut}(G)$.

1.g

Sauf mention contraire, φ désigne un morphisme de G vers G' .

Proposition (Composition de morphismes)

Soit G, G' et G'' trois groupes. Si $\varphi \in \text{Hom}(G, G')$ et $\psi \in \text{Hom}(G', G'')$, alors $\psi \circ \varphi \in \text{Hom}(G, G'')$.

1.e

Démonstration

□

Proposition (Bijection réciproque d'un isomorphisme)

La bijection réciproque d'un isomorphisme de groupes est un isomorphisme de groupes.

1.f

Démonstration

□

Isomorphie

L'isomorphie est une relation d'équivalence (réflexive, symétrique, transitive).

1.1

Proposition (Propriétés des morphismes de groupes)

Soit H et H' des parties respectives de G et de G' . On a :

- (1) $\varphi(e) = e'$;
- (2) $\forall x \in G, \varphi(x^{-1}) = (\varphi(x))^{-1}$;
- (3) $\forall x \in G, \forall n \in \mathbb{Z}, \varphi(x^n) = (\varphi(x))^n$;
- (4) $(H \leq G) \Rightarrow (\varphi(H) \leq G')$;
- (5) $(H' \leq G') \Rightarrow (\varphi^{-1}(H') \leq G)$.

1.g

Démonstration

□

En notation additive (*i.e.* si G et G' sont des groupes pour l'addition), la troisième propriété s'écrit

$$\forall x \in G, \forall n \in \mathbb{Z}, \varphi(nx) = n\varphi(x).$$

Définition (Image et noyau d'un morphisme de groupes)

$\varphi(G)$ (sous-groupe de G') est appelé *image* de φ , noté $\text{Im } \varphi$. $\varphi^{-1}(\{e'\})$ est appelé *noyau* de φ , et est noté $\text{Ker } \varphi$ (c'est un sous-groupe de G).

1.h

On a donc $\text{Ker}(\varphi) = \{g \in G, \varphi(g) = e'\}$.

Proposition (Injectivité et surjectivité d'un morphisme de groupes)

φ est surjective (resp. injective) si et seulement si $\text{Im } \varphi = G'$ (resp. $\text{Ker } \varphi = \{e\}$).

1.h

Démonstration

□

Exemple (Morphismes de groupes)

- Les endomorphismes de $(\mathbb{Z}, +)$ sont les applications, $n \mapsto an$, où a décrit \mathbb{Z} .
- $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$, $x \mapsto x^n$ (noyau \mathbb{U}_n) (Attention : la puissance n -ième – dans un groupe multiplicatif – n'est pas, en général, un morphisme).
- $\ln : (\mathbb{R}_+^*, \times) \rightarrow (\mathbb{R}, +)$ et $\exp : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}_+^*, \times)$.
- $\theta \mapsto e^{i\theta}$ morphisme de \mathbb{R} dans \mathbb{U} , de noyau $2\pi\mathbb{Z}$
- l'exponentielle est un morphisme surjectif de $(\mathbb{C}, +)$ sur (\mathbb{C}^*, \cdot) .
- Soit I un intervalle non vide, $a \in I$. L'application de \mathbb{R}^I dans \mathbb{R} , qui à f associe $f(a)$ est un morphisme de groupes (morphisme d'évaluation en a).
- $G \rightarrow G'$, $x \mapsto e'$, le morphisme trivial de G dans G' , montre qu'entre deux groupes, il existe toujours un morphisme.

iv

Exercice (Isomorphisme de groupes)

Faire l'exercice 2 de TD.

3

Exercice (Groupe fini commutatif)

Faire l'exercice 4 de TD.

4

2. ANNEAUX

2.1. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS CALCULATOIRES

Définition (Anneau)

Soit A un ensemble muni de deux lois de composition internes, notées $+$ et \times . On dit que $(A, +, \times)$ (ou A) est un *anneau* si

- $(A, +)$ est un groupe commutatif;
- La loi \times est associative, et distributive par rapport à l'addition;
- Il existe un élément neutre pour le produit \times .

Si de plus la loi \times est commutative, on dit que $(A, +, \times)$ est un *anneau commutatif*. L'élément neutre pour l'addition est noté 0 ou 0_A et appelé *élément nul* de A .

L'élément neutre pour la multiplication est souvent noté 1 ou 1_A et appelé *élément unité* de A .

Le symétrique d'un élément pour l'addition est appelé *opposé* (de cet élément).

S'il existe, le symétrique d'un élément pour la multiplication est appelé *inverse* (de cet élément).

2.a

Dans la suite, sauf mention contraire, A désigne un anneau.

Soit $a \in A$. On définit² la notation ma pour tout entier naturel m par la récurrence suivante :

$$(0.a = 0_A) \wedge (\forall m \in \mathbb{N}, \quad (m+1)a = a + ma)$$

On étend alors cette notation au cas d'un entier négatif m , en posant $ma = -((-m)a)$.

On définit la notation a^m pour tout entier naturel m par la récurrence suivante :

$$(a^0 = 1_A) \wedge (\forall m \in \mathbb{N}, \quad a^{m+1} = aa^m)$$

Dans le cas où a est inversible, on étend la notation a^m au cas d'un entier négatif m , en posant $a^m = (a^{-1})^{-m}$.

On a (avec des notations évidentes) $(m+n)a = ma + na$, $m(na) = (mn)a$, $m(a+b) = ma + mb$. Pour la multiplication, on a $a^{m+n} = a^m a^n$, $a^{mn} = (a^m)^n$. En revanche, il n'est pas sûr que $(ab)^m = a^m b^m$.

Proposition (Premières propriétés calculatoires dans un anneau)

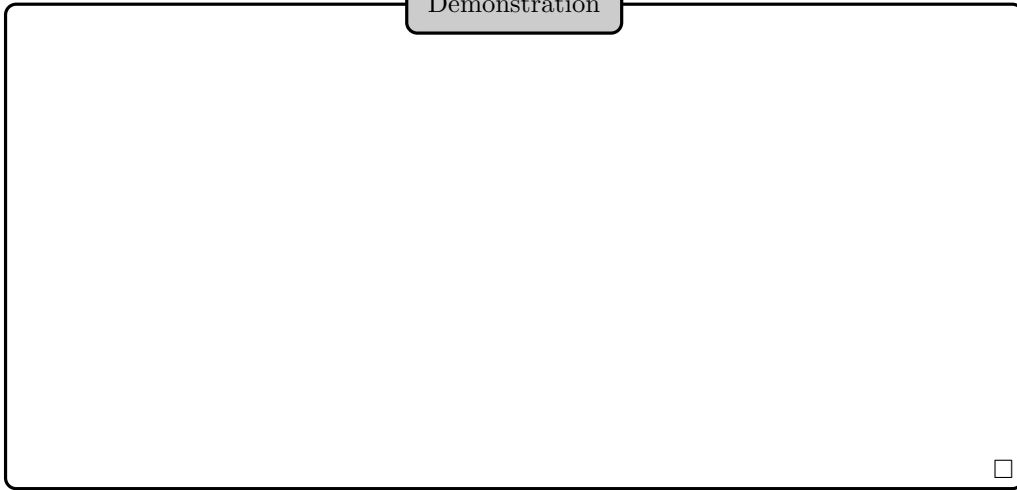
Pour tous $a, b, c \in A$ et tout entier relatif m , on a :

- $a0_A = 0_A a = 0_A$ (on dit que 0_A est *absorbant*);
- $(-a)b = a(-b) = -(ab)$;
- $(-a)(-b) = ab$;
- $(a-b)c = ac - bc$;
- $a(b-c) = ab - ac$;
- $a(mb) = (ma)b = m(ab)$.

2.a

2. On l'a déjà fait dans le cadre des groupes additifs.

Démonstration



Il se peut que $1_A = 0_A$, auquel cas l'anneau est réduit à son élément nul (et dit *nul*).

Exemple (Anneaux)

- (1) $(\mathbb{Z}, +, \times), (\mathbb{Q}, +, \times), (\mathbb{R}, +, \times), (\mathbb{C}, +, \times)$ sont des anneaux commutatifs.
- (2) Si $(A, +, \times)$ est un anneau et X un ensemble non vide, alors $A^X = \mathcal{F}(X, A)$, muni des lois déduites de A est un anneau, d'élément nul l'application nulle et d'élément unité l'application constante de valeur 1. En particulier, il en est ainsi de \mathbb{R}^I et de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (où I désigne un intervalle non vide).
- (3) Si A et B sont deux anneaux, on peut définir un anneau produit (comme pour les groupes). En particulier, $(\mathbb{R}^n, +, \times)$ est un anneau.
- (4) $A[X]$, anneau des polynômes à coefficients dans A à une indéterminée (et donc par exemple $\mathbb{Z}[X], \mathbb{Z}[X, Y]$).
- (5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées de taille n à coefficients réels, muni des lois usuelles, est un anneau, non commutatif si $n \geq 2$.

i

Proposition (Distributivité du produit par rapport au symbole sommatoire)

Soit A un anneau, $n \in \mathbb{N}^*$, $b \in A$ et $(a_i)_{1 \leq i \leq n} \in A^n$.

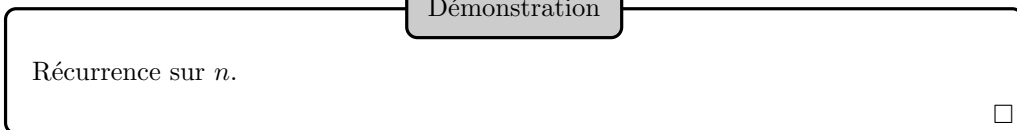
$$b \left(\sum_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} a_i \right) = \sum_{1 \leq i \leq n} (ba_i)$$

et

$$\left(\sum_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} a_i \right) b = \sum_{1 \leq i \leq n} (a_i b).$$

2.b

Démonstration



Récurrence sur n .

Proposition (Formule de Bernoulli)

Soit $a, b \in A$, et $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que a et b commutent. On a :

$$a^n - b^n = (a - b) \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} b^k \right) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} b^k \right) (a - b).$$

2.c

Démonstration

Cette formule se démontre sans récurrence :

$$\begin{aligned} (a - b) \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} b^k \right) &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k} b^k \right) - \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} b^{k+1} \right) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k} b^k \right) - \left(\sum_{k=1}^n a^{n-k} b^k \right) = a^n - b^n. \end{aligned}$$

De même dans l'autre sens. □

Proposition (Formule du binôme de Newton)

Soit $a, b \in A$, et $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que a et b commutent. On a alors les relations :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

2.d

Démonstration

Par récurrence sur n . L'amorçage est clair, détaillons le calcul principal de l'hérédité :

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= (a + b)(a + b)^n \\ &= (a + b) \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \quad (\text{car } ab = ba) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\ &= \binom{n}{0} b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{n} a^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} \end{aligned}$$

□

Pour appliquer ces formules, il faut absolument vérifier au préalable que les éléments commutent. Ce sera par exemple le cas si A est commutatif.

Pour ne pas se tromper dans les exposants, on peut vérifier l'homogénéité de ces formules (voir a et b comme des longueurs).

Exercice (Développement dans un anneau)

Développer $(a - b)(a + b)$, $(a + b)^2$ et $(a + b)^3$ pour a et b ne commutant pas.

5

Exercice (Éléments nilpotents d'un anneau)

Faire l'exercice 18 de TD.

6

Notation (Éléments inversibles d'un anneau)

Soit A un anneau non nul. On note A^\times (ou A^*) l'ensemble des éléments inversibles de A .

2.b

Exemple (Éléments inversibles)

$\mathbb{Q}^\times = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\mathbb{Z}^\times = \{-1, 1\} (\neq \mathbb{Z} \setminus \{0\})$.
L'ensemble des matrices réelles carrées de taille $n \in \mathbb{N}^*$ forme un groupe multiplicatif.
Quels sont les éléments inversibles de \mathbb{R}^X (où X est un ensemble non vide) ?

ii

Proposition (Les inversibles forment un groupe)

Soit A un anneau non nul. L'ensemble A^\times est un groupe pour la loi \times .

2.e

Démonstration

□

Définition (Diviseur de zéro)

Soit A un anneau non nul, et $a \in A \setminus \{0\}$. On dit que a est un *diviseur de zéro* s'il existe b dans A , non nul, tel que $ab = 0$ ou $ba = 0$.

2.c

Un élément non nul est un diviseur de zéro si et seulement si il est non simplifiable. En particulier, il ne peut être inversible, mais un élément peut ne pas être inversible tout en étant simplifiable (exemple : tout nombre distinct de 0, 1 et -1 dans \mathbb{Z}).

Exemple (Diviseurs de zéro)

Dans A^2 (avec $A \neq \{0\}$), \mathbb{R}^X (avec $|X| \geq 2$), on a des diviseurs de zéro.

iii

Définition (Anneau intègre)

Un anneau non nul est dit *intègre* s'il est commutatif et sans diviseur de zéro.

2.d

Exemple (Anneaux intègres)

Les anneaux usuels \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} sont intègres, mais pas A^2 .

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est intègre si et seulement si $n \geq 2$.

Soit $n \geq 2$. L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (hors programma, étudié dans l'un des DM, à ne regarder que plus tard et si on est à l'aise) est intègre si et seulement si c'est un corps, *i.e.* si et seulement si n est premier.

iv

2.2. SOUS-ANNEAUX

B désigne une partie de A .

Définition (Sous-anneau)

On dit que B est un *sous-anneau* de $(A, +, \times)$ si :

- $1_A \in B$;
- B est stable pour $+$;
- B est stable pour \times ;
- muni des lois induites, $(B, +, \times)$ possède une structure d'anneau.

2.e

On voit apparaître ici la condition $1_A \in B$, qui ne résulte pas des suivantes (voyez le contraste avec les sous-groupes).

Donner un exemple de partie non vide de A (non nul) vérifiant toutes les conditions sauf celle-ci.

Proposition (caractérisation des sous-anneaux)

B est un sous-anneau de A si et seulement si

- (1) $1_A \in B$;
- (2) $\forall a, b \in B, \quad a - b \in B$;
- (3) $\forall a, b \in B, \quad ab \in B$.

2.f

Démonstration

□

Exemple (Sous-anneaux)

- (1) Si C est un sous-anneau de B , et B un sous-anneau de A , alors C est un sous-anneau de A .
- (2) On peut appliquer ceci à $(\mathbb{Z}, +, \times)$, $(\mathbb{Q}, +, \times)$, $(\mathbb{R}, +, \times)$, $(\mathbb{C}, +, \times)$.
- (3) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ est un sous-anneau de \mathbb{R} , $\mathbb{Q}(i)$ est un sous-anneau de \mathbb{C} (voir le TD pour des définitions).
- (4) Une intersection de sous-anneaux en est un.

v

2.3. MORPHISMES D'ANNEAUX

A et B désignent des anneaux.

Définition (Morphisme d'anneaux)

On dit qu'une application $f : A \rightarrow B$ est un *morphisme d'anneaux* si :

- $f(1_A) = 1_B$;
- $\forall a, b \in A, \quad f(a + b) = f(a) + f(b)$;
- $\forall a, b \in A, \quad f(ab) = f(a)f(b)$.

2.f

On a les propriétés classiques des morphismes. Par exemple, si a est inversible, alors $f(a)$ l'est, d'inverse $f(a^{-1})$. Plus généralement, $f(a^n) = f(a)^n$ pour tout entier pour lequel cela a un sens. L'image directe ou réciproque d'un sous-anneau est un sous-anneau.

f est donc (plus qu'un) morphisme de groupes. En particulier, f est injectif si et seulement si $\text{Ker } f = \{0_A\}$.

Il est nécessaire de préciser que l'image de l'unité est l'unité (cela ne résulte pas des autres conditions, penser à l'application nulle).

Exemple (Morphismes d'anneaux)

- (1) Dans $(\mathbb{R}^I, +, \cdot)$, évaluation $f \mapsto f(a)$ en $a \in I$.
- (2) Endomorphismes de l'anneau \mathbb{Z} : ce sont des endomorphismes du groupe $(\mathbb{Z}, +)$, donc de la forme $n \mapsto an$. Comme un tel morphisme doit valoir 1 en 1, on en déduit que c'est $\text{Id}_{\mathbb{Z}}$.
- (3) Morphisme naturel d'inclusion $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ (et plus généralement de tout sous-anneau dans un anneau).
- (4) Morphisme de dérivation dans un anneau de polynômes : c'est un morphisme de groupes additifs et d'espaces vectoriels, mais pas d'anneaux (il n'envoie pas l'unité sur l'unité, et ne respecte pas la multiplication).
- (5) Shifts dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (faire attention pour le shift à droite).
- (6) Il n'existe pas de morphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ dans \mathbb{Z} par exemple (plus prosaïquement : de \mathbb{C} dans \mathbb{R} , de \mathbb{Q} dans \mathbb{Z} , etc.).

vi

3. CORPS

Définition (Corps)

Soit K un ensemble muni de deux lois $+$ et \times . On dit que $(K, +, \times)$ est un *corps* si $(K, +, \times)$ est un anneau commutatif non nul, dans lequel tout élément non nul est inversible.

3.a

Tout corps est un anneau intègre (et la réciproque est fausse).

Exemple (Corps)

- (1) $(\mathbb{Q}, +, \times)$, $(\mathbb{R}, +, \times)$, $(\mathbb{C}, +, \times)$ sont des corps.
- (2) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(i)$ sont des corps (on montre que ce sont des sous-corps de \mathbb{C}).
- (3) Pour tout nombre premier p , $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps.
- (4) Le produit cartésien de deux corps n'est pas un corps.

i

Un corps K est donc un anneau commutatif tel que $(K \setminus \{0\}, \times)$ soit un groupe.

Définition (Sous-corps)

Une partie L d'un corps $(K, +, \times)$ est appelée *sous-corps* de K si L est un sous-anneau de K , qui, muni des lois induites, est un corps. On dit alors que K est un *surcorps* de L .

3.b

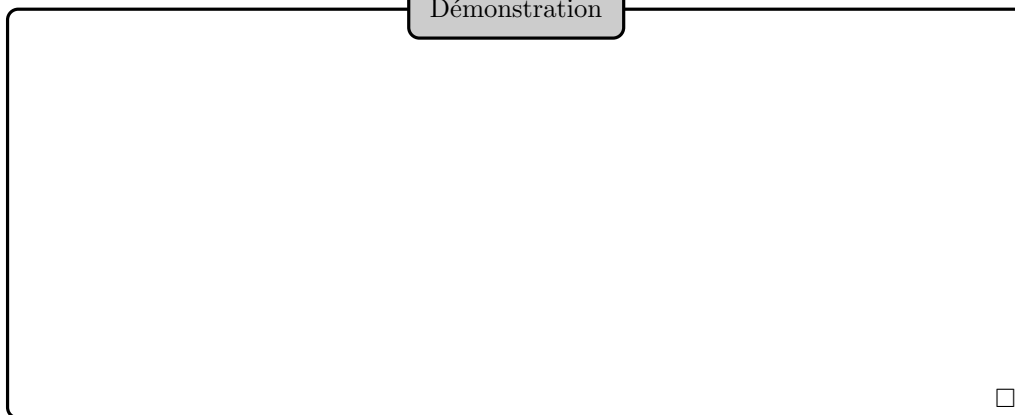
Proposition (Caractérisation des sous-corps)

L est un sous-corps de $(K, +, \times)$ si et seulement si

- $1_K \in L$;
- $\forall x, y \in L, \quad x - y \in L$;
- $\forall (x, y) \in (L - \{0\})^2, \quad xy^{-1} \in L$.

3.a

Démonstration



Définition (Morphisme de corps)

Soient $(K, +, \times)$ et $(L, +, \times)$ deux corps. Une application $f : K \rightarrow L$ est un *morphisme du corps* K vers le corps L si f est un morphisme de l'anneau $(K, +, \times)$ vers $(L, +, \times)$.

3.c

S'il est prouvé que f est non nul, il est superflu de prouver que $f(1_K) = 1_L$:

Exercice (Morphisme de corps)

Faire l'exercice 15 de TD.

7

Exercice (Automorphismes du corps des réels)

Ne faire cet exercice qu'une fois le cours sur les suites fait.
 Montrer que $\text{Id}_{\mathbb{R}}$ est l'unique automorphisme du corps des nombres réels.
Indication : on pourra vérifier qu'un tel automorphisme est croissant.

8

4. QUESTIONNAIRE 2 : STRUCTURES ALGÈBRIQUES

- 1 Soit G et G' deux groupes isomorphes. Tout morphisme de G vers G' est-il un isomorphisme ?
- 2 Existe-t-il une loi distributive avec elle-même ?
- 3 Quels sont les groupes dont toutes les parties non vides sont des sous-groupes ?
- 4 $z \mapsto z^3$ est un automorphisme de (\mathbb{C}^*, \cdot) .
- 5 $x \mapsto x^3$ est un automorphisme de (\mathbb{R}^*, \cdot) .
- 6 On peut conférer à $] - 1, 1[$ une structure de groupe abélien. Même question pour \mathbb{N} , $[-1, 1]$.
- 7 L'ensemble des suites réelles arithmétiques est-il un groupe pour l'addition ? Même question pour les suites réelles géométriques.
- 8 On peut trouver un groupe d'ordre 3 dont tout élément est son propre symétrique.
- 9 On peut trouver un groupe d'ordre 8 dont tout élément est son propre symétrique.
- 10 Soit A un anneau commutatif, $a \in A$. À quelle condition (nécessaire et suffisante) $x \mapsto ax$ de A dans A est-elle une injection ? une surjection ?
- 11 Soit G un groupe quelconque. Tout sous-groupe de G est-il le noyau d'un morphisme de groupes de source G ?
- 12 Soit $\varphi : A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux, $a \in A$. On suppose $\varphi(a)$ inversible. a est-il nécessairement un élément inversible de A ?
- 13 Tout anneau intègre est-il un corps ?
- 14 (Difficile) Existe-t-il un corps de cardinal 6 ?

5. FEUILLE DE TD 5 : STRUCTURES ALGÈBRIQUES

5.1. GROUPES

Exercice 1 (Endomorphismes de \mathbb{Z})

0

Déterminer les endomorphismes de $(\mathbb{Z}, +)$.

Exercice 2 (Isomorphisme de groupes)

0

Montrer que $(\mathbb{R}, +)$ et (\mathbb{R}_+^*, \cdot) sont isomorphes. Les groupes $(\mathbb{R}, +)$ et (\mathbb{R}^*, \cdot) sont-ils isomorphes ?

Exercice 3 (Partie finie stable par multiplication)

0

Soit G un groupe multiplicatif et H une partie finie de G non vide, stable par multiplication. Montrer que H est un sous-groupe de G .

Exercice 4 (Groupe fini commutatif)

1

Soit G un groupe commutatif fini de cardinal n . Montrer que pour tout élément g de G , on a $g^n = e$.

Indication : considérer le produit des éléments de G .

Exercice 5 (Opérations ensemblistes sur des sous-groupes)

1

1 Soit G un groupe. Montrer que l'intersection de sous-groupes de G est encore un sous-groupe de G .

2 Montrer que la réunion de deux sous-groupes H_1 et H_2 de G est un sous-groupe de G si et seulement si l'un de ces sous-groupes est inclus dans l'autre.

3 Donner un exemple de groupe réunion de trois de ses sous-groupes, ces derniers n'étant pas comparables pour la relation d'ordre d'inclusion.

4

i Soit A une partie de G . Montrer que l'intersection des sous-groupes de G contenant A est le plus petit sous-groupe de G (au sens de l'inclusion) contenant A . Le sous-groupe est noté $\langle A \rangle$, et appelé *sous-groupe de G engendré par A* .

ii On rappelle que $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Quel est le sous-groupe de \mathbb{C} additif engendré par $\{i, j\}$?

iii Quel est le sous-groupe de \mathbb{C}^* multiplicatif engendré par $\{i, j\}$?

Exercice 6 (Centre et commutant)

2

Soit G un groupe multiplicatif. On note $Z(G) = \{a \in G, \forall b \in G, ab = ba\}$ (c'est le *centre* de G), et pour $a \in G$: $C(a) = \{b \in G, ab = ba\}$ (c'est le *commutant* de a).

Montrer que $Z(G)$ et $C(a)$ sont des sous-groupes de G .

Exercice 7 (Théorème de Cayley)

1

Soit G un groupe, et a un élément de G .

1 Montrer que les applications $\alpha_a : g \mapsto ag$ et $\beta_a : g \mapsto ga$ – appelées respectivement applications de *multiplication (ou de translation) à gauche et à droite par a* – sont des permutations de G .

2 Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une telle application soit un endomorphisme de G .

3 Montrer que l'application $\phi : a \mapsto \alpha_a$ est un morphisme injectif de G vers \mathcal{S}_G . En déduire que tout groupe est isomorphe à un sous-groupe d'un groupe de permutations (théorème de Cayley).

Exercice 8 (Structure de groupe produit)

1

Soient (G, T) et $(G', *)$ deux groupes. Montrer que la loi ∇ sur $G \times G'$ définie par

$$\forall (g_1, g'_1), (g_2, g'_2) \in G \times G', \quad (g_1, g'_1) \nabla (g_2, g'_2) = (g_1 T g_2, g'_1 * g'_2)$$

confère à $G \times G'$ une structure de groupe, appelée structure de *groupe produit*, déduite (ou héritée) de celles de G et G' .

Exercice 9 (Caractérisation de la commutativité)

1

Soit G un groupe.

1 Montrer l'équivalence des conditions suivantes :

- (1) G est abélien.
- (2) L'application carré de G dans G est un endomorphisme de G .
- (3) L'application inverse de G dans G est un automorphisme de G .

2 On suppose que $g^2 = 1$ pour tout $g \in G$. Montrer que G est abélien.

Exercice 10 (Transfert de structure)

1

Soit G un groupe multiplicatif, E un ensemble et $\phi : G \rightarrow E$ une bijection. On définit une opération $*$ sur E par :

$$\forall x, y \in E, x * y = \phi(\phi^{-1}(x)\phi^{-1}(y))$$

Montrer que $*$ confère à E une structure de groupe, et que les groupes G et E sont isomorphes.

Exercice 11 (Groupe d'automorphismes d'un groupe)

1

Soit G un groupe. On note $\text{Aut}(G)$ l'ensemble des automorphismes de G .

1 Montrer que $\text{Aut}(G)$ est un groupe pour la loi \circ .

2 Déterminer $\text{Aut}(\mathbb{Z})$.

3 Pour $a \in G$ on note ϕ_a l'application de G dans G telle que $\phi_a(x) = axa^{-1}$, pour tout élément x de G : ϕ_a est appelée *conjugaison par a* (dans G). Montrer que ϕ_a est un automorphisme de G , (on dit que ϕ_a est un automorphisme *intérieur*).

4 Montrer que l'application $\psi : a \mapsto \phi_a$ est un morphisme de groupes. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que ce morphisme soit injectif.

Exercice 12 (Sous-groupes finis de \mathbb{C}^*)

2

Déterminer tous les sous-groupes finis de (\mathbb{C}^*, \times) .

Indication : on pourra utiliser l'exercice 4 de cette feuille de TD.

Exercice 13 (Structure de groupe)

4

1 Soit G un ensemble muni d'une loi de composition interne associative, admettant un élément neutre à gauche et tel que chaque élément de G admette un symétrique à gauche. Montrer que G est un groupe.

2 Soit G un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne associative \cdot telle que :

$$\forall a, b \in G, \exists x, y \in G : a = x \cdot b = b \cdot y \quad (\star)$$

Montrer que (G, \cdot) est un groupe.

3 Soit G un ensemble fini non vide muni d'une loi de composition interne \cdot associative pour laquelle tout élément est régulier à droite et à gauche. Montrer que G est un groupe.

5.2. ANNEAUX, CORPS

Exercice 14 (Morphisme d'anneaux)

0

Étant donné deux anneaux A et B quelconques, existe-t-il au moins un morphisme d'anneaux de A vers B ?

Exercice 15 (Morphisme de corps)

0

Montrer que tout morphisme de corps est injectif.

Exercice 16 (Anneau intègre fini)

1

Montrer que tout anneau intègre fini est un corps.

Exercice 17 (Anneau des endomorphismes d'un groupe commutatif)

1

Soit $(G, +)$ un groupe commutatif. On note $\text{End}(G)$ l'ensemble des endomorphismes de G , sur lequel on définit la loi (notée abusivement) $+$ par :

$$\forall f, g \in \text{End}(G), \forall x \in G, (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

Montrer que $(\text{End}(G), +, \circ)$ est un anneau.

Exercice 18 (Éléments nilpotents d'un anneau)

1

Soit $(A, +, \times)$ un anneau non nul. On dit que $x \in A$ est *nilpotent* s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n = 0$.

- 1 Donner un exemple de matrice nilpotente non nulle.
- 2 Montrer qu'un élément de A ne peut pas être à la fois nilpotent et inversible.
- 3 Donner un exemple d'élément nilpotent non nul dans l'anneau des endomorphismes de $(\mathbb{C}, +)$ (voir 17 pour une définition de cet anneau).
- 4 Montrer qu'il peut exister des éléments ni inversibles ni nilpotents.
- 5 Montrer que si x est nilpotent, alors $1 - x$ est inversible.
- 6 Montrer que si x et y sont nilpotents et commutent, alors xy et $x + y$ sont nilpotents.

Exercice 19 (Centre d'un anneau)

2

Soit $(A, +, \times)$ un anneau. On appelle *centre* de A l'ensemble $C = \{x \in A, \forall y \in A, xy = yx\}$. Montrer que C est un sous-anneau de A .

Exercice 20 (Idéaux)

3

Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif non nul. Un *idéal* \mathcal{I} de A est un sous-ensemble de A vérifiant :

- $(\mathcal{I}, +)$ est un groupe ;
- $\forall a \in A, \forall y \in \mathcal{I}, ay \in \mathcal{I}$.

- 1 Montrer que pour tout $\alpha \in A$, $\alpha A = \{\alpha x, x \in A\}$ est un idéal de A . Montrer en particulier que $\{0\}$ et A sont deux idéaux de A .
- 2 Montrer que A est un corps si et seulement si ses seuls idéaux sont $\{0\}$ et A .
- 3 Trouver tous les idéaux de \mathbb{Z} .

Exercice 21 (Anneau des entiers de Gauss)

3

On pose $\mathbb{Z}[i] = \{z \in \mathbb{C}, \exists (a, b) \in \mathbb{Z}^2, z = a + ib\}$. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau intègre pour les lois d'addition et de multiplication déduites de celles de \mathbb{C} . Déterminer les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.

Exercice 22 (Groupe d'automorphismes d'une extension quadratique de \mathbb{Q})

3

On pose $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{z \in \mathbb{R}, \exists (a, b) \in \mathbb{Q}^2, z = a + b\sqrt{3}\}$. Établir que $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ est un corps pour les lois déduites de celles de \mathbb{R} .

Déterminer le groupe des automorphismes du corps $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

Exercice 23 (Radical d'un idéal)

3

Soit A un anneau commutatif, I un idéal de A . On appelle *radical* de I et on note \sqrt{I} l'ensemble :

$$\sqrt{I} = \{x \in A, \exists n \in \mathbb{N}, x^n \in I\}.$$

Dans \mathbb{Z} , calculer $\sqrt{12\mathbb{Z}}$, $\sqrt{72\mathbb{Z}}$.

Exercice 24 (Une caractérisation des corps)

3

Soit A un anneau commutatif non nul dont tout idéal est premier, c'est-à-dire vérifie, pour tout $(x, y) \in A^2$:

$$xy \in I \Rightarrow x \in I \text{ ou } y \in I.$$

Montrer que A est un corps.

Exercice 25 (Corps algébriquement clos)

5

Un corps K est dit *algébriquement clos* si tout polynôme non constant à coefficients dans K admet une racine dans K . Montrer qu'un corps algébriquement clos est de cardinal infini.

5.3. COMPLÉMENTS SUR LES GROUPES

Exercice 26 (Théorème de Lagrange)

5

Le cardinal d'un groupe fini est également appelé *ordre* de ce groupe.

Soit G un groupe fini, et H un sous-groupe de G . On considère l'ensemble Ω des translatés à gauche de H par un élément de G :

$$\Omega = \{gH, g \in G\}$$

(pour $g \in G$ fixé, gH désigne l'ensemble $\{gh, h \in H\}$).

- 1 Montrer que la réunion des éléments de Ω est G .
- 2 Montrer que chaque élément de Ω est de même cardinal que H .
- 3 Montrer que deux éléments distincts de Ω sont disjoints.
- 4 En déduire que l'ordre de H divise celui de G : c'est le théorème de Lagrange.

Exercice 27 (Ordre d'un élément d'un groupe)

5

On appelle *ordre* d'un élément g d'un groupe G le plus petit entier naturel non nul k tel que $g^k = e$, s'il existe. On dit alors que g est d'ordre fini.

- 1 Montrer que pour tout élément g d'un groupe fini G , g est d'ordre fini (facile), divisant l'ordre de G (moins facile).
- 2 Montrer que tout groupe d'ordre pair admet un élément d'ordre 2.
- 3 Donner un exemple de groupe infini dont tout élément est d'ordre fini.
- 4 Montrer que si m est l'ordre de $g \in G$, alors $g^k = e$ si et seulement si m divise k .

Exercice 28 (Résultats élémentaires sur les ordres)

5

1 Soit G et G' deux groupes et f un morphisme de G dans G' . Pour $a \in G$, comparer l'ordre de a et celui de $f(a)$.

2 Soit $a, b \in G$. Comparer les ordres de a et de bab^{-1} .

3 Soit $a, b \in G$. Comparer les ordres de ab et de ba .

Soit G un groupe fini de cardinal impair. Montrer que :

$$\forall x \in G, \exists ! y \in G \text{ tel que } x = y^2.$$

Indication : montrer que l'application carrée est surjective grâce au travail précédent. En déduire qu'elle est bijective.

Équations différentielles

Sommaire

1. Introduction aux équations différentielles linéaires	145
2. Fonction exponentielle complexe	146
3. Équations linéaires du premier ordre	148
3.1. Définition	148
3.2. Résolution de l'équation homogène associée	148
3.3. Recherche d'une solution particulière	149
3.4. Résolution générale	151
3.5. Problème de Cauchy pour l'ordre 1	151
4. Équations linéaires du second ordre	153
4.1. Définition	153
4.2. Résolution de l'équation homogène	153
4.3. Recherche d'une solution particulière de \mathcal{E}	155
4.4. Résolution de \mathcal{E}	156
5. Problème de raccord pour l'ordre 1 (hors-programme)	159
6. Questionnaire 3 : Équations différentielles	160
7. Feuille de TD 6 : Équations différentielles	161
7.1. Équations différentielles linéaires d'ordre un	161
7.2. Équations différentielles linéaires d'ordre deux à coefficients constants	161
7.3. Équations différentielles d'un autre type	161
7.4. Équations fonctionnelles ou problèmes se ramenant à des équations différentielles	162

Dans tout ce chapitre, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Tous les intervalles considérés seront d'intérieur non vide, c'est-à-dire non vides et non réduits à un point, et I désignera un tel intervalle. Par défaut, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

1. INTRODUCTION AUX ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

Une équation différentielle est une équation fonctionnelle \mathcal{E} d'inconnue $f : I \rightarrow \mathbb{K}$, reliant f à une ou plusieurs de ses dérivées. Si \mathcal{E} relie f à f' (resp. f à f' et/ou f''), on dit que \mathcal{E} est d'ordre 1 (resp. d'ordre 2).

Les équations différentielles apparaissent dans la plupart des branches de la physique, en biologie, en économie, etc. Ces équations sont en général très difficiles à résoudre, et nous nous contenterons d'étudier des cas simples.

En cours, nous étudierons surtout des équations différentielles dites *linéaires*. Une particularité remarquable de ces équations linéaires (et pas des autres), et que nous reverrons plus tard dans un cadre géométrico-algébrique, réside en la structure de l'ensemble de leurs solutions.

La structure algébrique associée à la notion de linéarité est celle d'*espace vectoriel sur un corps* \mathbb{K} . Cette notion, compliquée en apparence, nous occupera d'ailleurs une bonne partie de l'année. Plutôt que d'en donner une définition précise, je préfère la présenter de manière informelle : un espace vectoriel sur un corps \mathbb{K} consiste en la donnée d'un ensemble E , muni d'une loi d'addition lui conférant une structure de groupe abélien, et d'une loi externe de $\mathbb{K} \times E$ dans E , dite de multiplication par un scalaire, vérifiant en outre certaines conditions naturelles de compatibilité. Les éléments de E sont appelés *vecteurs*, ceux de \mathbb{K} sont appelés *scalaires*.

Comme pour toute structure algébrique, on dispose d'une notion de morphisme, « respectant » les lois de la structure (ici, l'addition et la multiplication par un scalaire) et les éléments distingués (éléments neutres, ici le vecteur nul). Une *application linéaire* n'est rien d'autre qu'un morphisme d'espaces vectoriels.

Exemple (Premiers exemples d'applications linéaires)

Par exemple, dans \mathbb{R}^2 , l'échange $(x, y) \mapsto (y, x)$ des composantes d'un vecteur est linéaire, mais pas la translation par un vecteur non nul. L'application partie réelle $z \mapsto \operatorname{Re}(z)$ est un endomorphisme du \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{C} , mais pas du \mathbb{C} -espace vectoriel \mathbb{C} . Les applications partie paire et partie impaire sont linéaires.

i

L'intérêt de la linéarité apparaît clairement dans la résolution d'équations linéaires. Soit E et F deux espaces vectoriels sur un corps \mathbb{K} , $b \in F$, φ une application linéaire de E dans F . On cherche à résoudre l'équation linéaire $\mathcal{E} : \varphi(a) = b$ d'inconnue $a \in E$, *i.e.* on cherche à décrire l'ensemble des antécédents du second membre b par φ dans E (autrement dit, on veut expliciter $\varphi^{-1}(\{b\})$). Supposons disposer d'une solution particulière a_0 . Un élément a de E est alors solution de \mathcal{E} si et seulement si $\varphi(a) = \varphi(a_0)$, soit encore, par linéarité de φ : $\varphi(a - a_0) = 0_F$. Autrement dit, la solution générale de \mathcal{E} s'écrit $a_0 + h$, où h est la solution générale de l'équation

$$\mathcal{H} : \varphi(a) = 0_F,$$

d'inconnue $a \in E$, appelée *équation homogène associée* (ou *sans second membre*) à \mathcal{E} .

Soit N un entier naturel non nul, $\alpha_0, \dots, \alpha_N, \beta$ des fonctions continues de I dans \mathbb{K} .

Une fonction f de I dans \mathbb{K} est dite *solution* de l'équation différentielle (d'ordre N si α_N n'est pas identiquement nulle)

$$\mathcal{E} : \alpha_N(x)y^{(N)} + \alpha_{N-1}(x)y^{(N-1)} + \dots + \alpha_1(x)y' + \alpha_0(x)y = \beta(x)$$

si f est N fois dérivable sur I , et si

$$\alpha_N(x)f^{(N)}(x) + \alpha_{N-1}(x)f^{(N-1)}(x) + \dots + \alpha_1(x)f'(x) + \alpha_0(x)f(x) = \beta(x),$$

pour tout point x de I .

La dérivation est linéaire, de même que la multiplication par une fonction donnée, et que la somme d'applications linéaires, de sorte que l'application

$$\varphi : f \mapsto \alpha_N f^{(N)} + \alpha_{N-1} f^{(N-1)} + \dots + \alpha_1 f' + \alpha_0 f$$

est linéaire : l'équation différentielle \mathcal{E} est donc également linéaire. Pour résoudre une telle équation, nous résoudrons l'équation homogène associée, et nous en chercherons une solution particulière, obtenant ainsi sa solution générale.

Dans ce cours, nous nous contenterons d'une étude très modeste : nous nous limiterons en effet aux équations différentielles linéaires du premier ordre, et aux équations différentielles linéaires d'ordre deux à coefficients constants, et avec un second membre simple.

2. FONCTION EXPONENTIELLE COMPLEXE

I désigne un intervalle d'intérieur non vide (*i.e.* comprenant au moins deux points), f et g sont des applications de I dans \mathbb{C} .

Définition (Parties réelle et imaginaire d'une fonction à valeurs complexes)

La fonction *partie réelle* (resp. *partie imaginaire*) de f , notée $\operatorname{Re}(f)$ (resp. $\operatorname{Im}(f)$), est l'application de I dans \mathbb{R} valant $\operatorname{Re}(f(x))$ (resp. $\operatorname{Im}(f(x))$) en tout $x \in I$.

2.a

Définition (Continuité et dérivabilité d'une fonction à valeurs complexes)

On dit que f est *continue* (resp. *dérivable*) si les fonctions $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ le sont. Si f est dérivable, sa dérivée, notée f' , est par définition : $f' = \operatorname{Re}(f)' + i \operatorname{Im}(f)'$.

2.b

Dérivation et parties réelle et imaginaire

On suppose f dérivable. On a $\operatorname{Re}(f)' = \operatorname{Re}(f')$ et $\operatorname{Im}(f)' = \operatorname{Im}(f')$.

2.1

Proposition (Opérations sur les fonctions dérivables à valeurs complexes)

On suppose f et g dérivables sur I .

- (1) $f + g$ est dérivable sur I , de dérivée $f' + g'$;
- (2) fg est dérivable sur I , de dérivée $f'g + fg'$;
- (3) Pour tout nombre complexe λ , λf est dérivable sur I , de dérivée $\lambda f'$.

2.a

Démonstration

Notons f_r et f_i (resp. g_r et g_i) les parties réelle et imaginaire de f (resp. de g).

- (1) On a $f + g = (f_r + g_r) + i(f_i + g_i)$, donc $f + g$ est dérivable sur I , et

$$(f + g)' = (f_r + g_r)' + i(f_i + g_i)' = f' + g'.$$

- (2) En notant que $fg = (f_r g_r - f_i g_i) + i(f_r g_i + f_i g_r)$, on constate que fg est dérivable sur I , et que

$$\begin{aligned} (fg)' &= (f_r g_r - f_i g_i)' + i(f_r g_i + f_i g_r)' \\ &= (f_r' g_r + f_r g_r' - f_i' g_i - f_i g_i') + i(f_r' g_i + f_r g_i' + f_i' g_r + f_i g_r') \\ &= (f_r' g_r - f_i' g_i) + i(f_r' g_i + f_i' g_r) + (f_r g_r' - f_i g_i') + i(f_r g_i' + f_i g_r') \\ &= f'g + fg'. \end{aligned}$$

- (3) On applique le résultat précédent dans le cas où g est constante de valeur λ . □

Proposition (Dérivation de l'exponentielle d'une fonction)

On suppose f dérivable sur I . L'application e^f est alors dérivable sur I , et :

$$(e^f)' = f' e^f.$$

2.b

Démonstration

En notant f_r (resp. f_i) la partie réelle (resp. imaginaire) de f , on a :

$$e^f = e^{f_r} e^{if_i} = e^{f_r} (\cos(f_i) + i \sin(f_i)).$$

D'après le résultat précédent (sur le produit), on constate que e^f est dérivable sur I , et que

$$\begin{aligned} (e^f)' &= f_r' e^{f_r} (\cos(f_i) + i \sin(f_i)) + f_i' e^{f_r} (-\sin(f_i) + i \cos(f_i)) \\ &= (f_r' + i f_i') e^{f_r} (\cos(f_i) + i \sin(f_i)) = f' e^f. \end{aligned}$$
□

3. ÉQUATIONS LINÉAIRES DU PREMIER ORDRE

3.1. DÉFINITION

Définition (Équation différentielle linéaire d'ordre un)

On appelle *équation différentielle linéaire d'ordre 1 sur I* une équation du type :

$$\mathcal{E} : \alpha(x)y' + \beta(x)y = \gamma(x),$$

où α , β et γ sont des fonctions continues sur I , à valeurs dans \mathbb{K} .

γ (ou $\gamma(x)$) est appelé *second membre* de \mathcal{E} . On dit que \mathcal{E} est *homogène* si son second membre est nul.

On dit qu'une fonction f , de I dans \mathbb{K} , est une solution de \mathcal{E} (sur I) si :

- (1) f est dérivable sur I ;
- (2) $\forall x \in I, \alpha(x)f'(x) + \beta(x)f(x) = \gamma(x)$.

On appelle *équation différentielle homogène (ou sans second membre) associée à \mathcal{E}* l'équation

$$\mathcal{H} : \alpha(x)y' + \beta(x)y = 0$$

3.a

On se place dans cette section dans le cas particulier où α est la fonction constante égale à 1. Noter que si α ne s'annule pas sur I , on peut toujours se ramener à une équation de ce type en posant $a = \frac{\beta}{\alpha}$ et $b = \frac{\gamma}{\alpha}$. Si α s'annule, l'équation est bien plus compliquée à résoudre, et on dit qu'il y a *problème de raccord*, voir la partie 5 (cette partie est un complément de cours, qui peut être oublié dans une première lecture).

Pour résoudre $\mathcal{E} : y' + a(t)y = b(t)$, on résout d'abord l'équation homogène associée $\mathcal{H} : y' + a(t)y = 0$.

3.2. RÉOLUTION DE L'ÉQUATION HOMOGENE ASSOCIEE

Proposition (Équation différentielle d'ordre un sans problème de raccord)

Soit $A : I \rightarrow \mathbb{K}$ une primitive de la fonction a sur l'intervalle I . L'ensemble $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ des solutions de l'équation homogène \mathcal{H} est :

$$\mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \{t \mapsto Ce^{-A(t)}, C \in \mathbb{K}\}.$$

3.a

Démonstration

On montre d'abord, par un calcul simple, que toute fonction de la forme $t \mapsto Ce^{-A(t)}$, où $C \in \mathbb{K}$, est solution de \mathcal{H} , prouvant une première inclusion.

Réciproquement, on montre que toute solution φ de \mathcal{H} est de ce type, en introduisant la fonction auxiliaire :

$$\begin{aligned} \Phi : I &\rightarrow \mathbb{K} \\ t &\mapsto \varphi(t)e^{A(t)} \end{aligned}$$

On vérifie que Φ est dérivable, de dérivée nulle sur l'intervalle I , et qu'elle est donc constante. □

L'idée derrière cette preuve et ce résultat est celle de *facteur intégrant* : étant donné une fonction f , il n'est pas facile de déterminer une primitive de $f' - af$. En revanche, en multipliant par le facteur e^{-A} , on obtient $(f' - af)e^{-A}$, qui admet fe^{-A} pour primitive. Ce facteur a permis d'*intégrer* la relation $f' - af = 0$ (de plus, on a bien procédé par équivalence puisque ce facteur ne s'annule jamais).

Notons pour la suite que la seule solution de \mathcal{H} s'annulant au moins une fois est la fonction identiquement nulle.

Ordre un homogène sans problème de raccord

On vérifie que $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ est un espace vectoriel sur \mathbb{K} . En fait, on peut aisément montrer que, pour toute solution non nulle φ_0 de \mathcal{H} , on a :

$$\mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \mathbb{K}\varphi_0 (= \{\lambda\varphi_0, \lambda \in \mathbb{K}\}).$$

On dit que $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ est une *droite vectorielle* (ici, la droite vectorielle engendrée par φ_0).

3.1

Exercice (Équations différentielles d'ordre 1)

Résoudre, sur l'intervalle précisé :

1 $y' - \frac{x}{1+x^2}y = 0$ sur \mathbb{R} .

2 $y' + y \cotan(x) = 0$ sur $]0, \pi[$.

1

Exercice (Une première équation fonctionnelle)

Résoudre l'équation fonctionnelle

$$\mathcal{E} : \quad \forall (u, t) \in \mathbb{R}^2, f(t+u) = f(t)f(u)$$

d'inconnue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dérivable.

2

3.3. RECHERCHE D'UNE SOLUTION PARTICULIÈRE

Comment faire pour trouver une solution particulière, si on n'en trouve pas d'évidente ?

Méthode (Méthode de la variation de la constante)

Pour chercher une solution particulière f de \mathcal{E} , connaissant une solution particulière non nulle φ_0 de \mathcal{H} , on la cherche sous la forme :

$$f : t \mapsto C(t)\varphi_0(t),$$

où C est une fonction de I dans \mathbb{K} que l'on détermine pour que f soit solution de \mathcal{E} .

3.2

Méthode de variation de la constante

- (1) On trouvera C comme primitive d'une certaine fonction. Il s'agit en l'occurrence de la fonction $t \mapsto \frac{b(t)}{\varphi_0(t)}$, mais, plutôt que d'apprendre cette formule par cœur, il faut savoir la retrouver par un calcul immédiat.
- (2) Le nom de cette méthode provient de ce que si C était une constante, f serait solution de \mathcal{H} : nous avons remplacé la constante C paramétrant les solutions de \mathcal{H} en une fonction. En retenant ce fait, on peut déterminer très rapidement $f'(t) + a(t)f(t)$, puisque les termes où nous ne dérivons pas C vont nécessairement s'annuler.
- (3) Si la résolution est trop difficile, on pourra toujours exprimer les solutions sous forme intégrale.
- (4) Certains oublient, lorsqu'ils donnent la solution trouvée, de multiplier C avec φ_0 !

3.3

Exercice (Ordre un avec second membre)

- 1 Trouver une solution particulière de $y' + y \cotan(x) = \sin x$ sur $]0, \pi[$.
- 2 Trouver les solutions de l'équation différentielle

$$y' - \frac{x}{1+x^2}y = \frac{x}{1+x^2} + \frac{3}{\sqrt{1+x^2}}.$$

3

Proposition (Principe de superposition, ordre un)

Si b_1 et b_2 sont des fonctions continues sur I telles que $b = b_1 + b_2$, et si f_1 et f_2 sont respectivement solutions de

$$y' + a(x)y = b_1(x) \text{ et } y' + a(x)y = b_2(x),$$

alors $f_1 + f_2$ est solution de \mathcal{E} .

3.b

Démonstration

La vérification est facile, et provient de la linéarité de l'équation différentielle considérée :

□

Plus généralement, si $b = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i$, où b_1, \dots, b_n sont continues de I dans \mathbb{K} , et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des scalaires, et si pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, f_i est une solution de $y' + a(x)y = b_i$, alors $f = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$ est une solution de \mathcal{E} .

Proposition (Passage d'une solution complexe à une solution réelle, ordre un)

Si a est une fonction à valeurs réelles, et si f est une solution de \mathcal{E} , alors $\operatorname{Re}(f)$ (resp. $\operatorname{Im}(f)$) est une solution de $y' + a(x)y = \operatorname{Re}(b)(x)$ (resp. de $y' + a(x)y = \operatorname{Im}(b)(x)$).

3.c

Démonstration

□

Cette méthode est surtout pratique lorsque figurent des termes trigonométriques dans le second membre.

Proposition (Second membre en exponentielle-polynôme, ordre un)

On se place dans le cas particulier d'une équation différentielle de la forme $y' - \mu y = P(x)e^{\lambda x}$, où μ et λ sont deux complexes, et P un polynôme de degré n .

- (1) Si $\mu \neq \lambda$, cette équation admet une unique solution de la forme $x \mapsto Q(x)e^{\lambda x}$, où Q est un polynôme de degré n .
- (2) Si $\mu = \lambda$, alors $x \mapsto Q(x)e^{\lambda x}$ est une solution de cette équation, où Q est un polynôme tel que $Q' = P$.

3.d

En pratique, pour le premier cas, on procède par « identification ».

Nous admettons (provisoirement) ce résultat, mais on peut observer que la seconde situation est un cas particulier de variation de la constante.

Exercice (Ordre un et second membre en exponentielle-polynôme)

Déterminer les solutions sur \mathbb{R} et à valeurs réelles de :

1 $y' - 2y = (x^2 + 1)e^{4x} + (x^3 - x^2 + x + 1)e^{2x}$.

2 $y' + y = xe^{3x} \cos(x) + (x - 1)e^{-x}$.

4

3.4. RÉOLUTION GÉNÉRALE

La résolution pratique d'une équation du type

$$\mathcal{E} : y' + a(x)y = b(x)$$

se déroule donc de la façon suivante :

Étape 1 : résolution de l'équation homogène associée \mathcal{H} ;

Étape 2 : recherche d'une solution particulière :

Étape 2.1 : recherche d'une solution particulière évidente ;

Étape 2.2 (si 2.1 échoue) : recherche d'une solution particulière à l'aide des méthodes exposées ci-dessus, la méthode de la variation de la constante ne venant en principe qu'en dernier recours ;

Étape 3 : solution générale de \mathcal{E} , exprimée comme somme de la solution particulière trouvée, et de la solution générale de \mathcal{H} .

3.5. PROBLÈME DE CAUCHY POUR L'ORDRE 1

De manière informelle, on appelle *problème de Cauchy* la donnée d'une équation différentielle sur I d'ordre n , et de valeurs imposées pour la fonction ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre $n - 1$ en un point donné x_0 de I . Dans les cas « favorables », il y aura existence et unicité d'une solution à un problème de Cauchy.

Définition (Problème de Cauchy pour l'ordre un)

Soit $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$. On appelle *solution au problème de Cauchy* associé à l'équation différentielle

$$\mathcal{E} : y' + a(t)y = b(t)$$

et la condition initiale $y(x_0) = y_0$ toute solution f de \mathcal{E} sur I telle que $f(x_0) = y_0$.

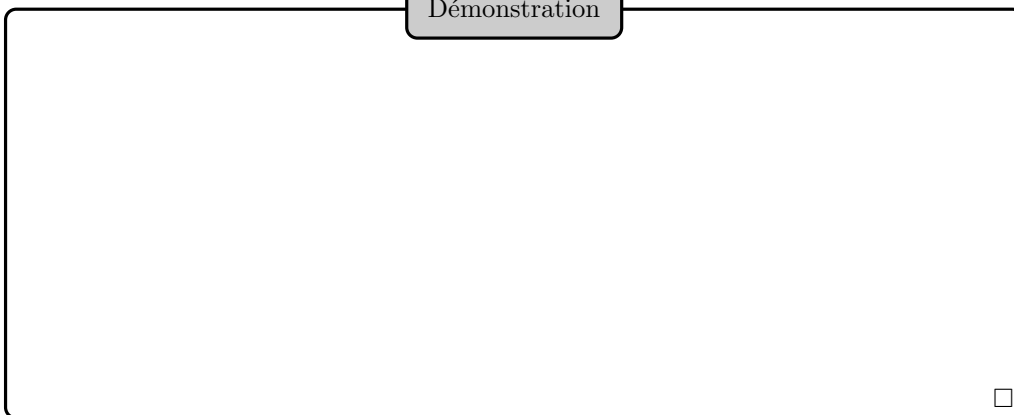
3.b

Proposition (Problème de Cauchy pour l'ordre un)

Soit $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$. Il existe une unique solution f de \mathcal{E} sur I telle que $f(x_0) = y_0$.

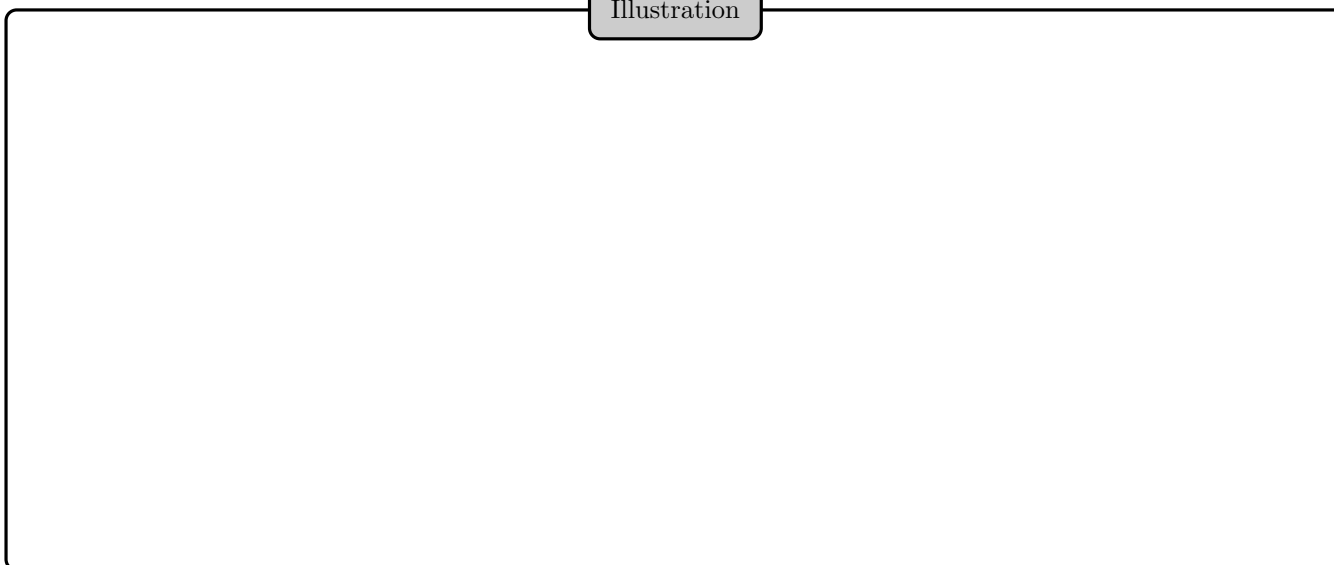
3.e

Démonstration



Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, le graphe de toute solution de \mathcal{E} est appelé *courbe intégrale*. L'assertion précédente montre que par un point quelconque de $I \times \mathbb{R}$ passe une unique courbe intégrale.

Illustration



4. ÉQUATIONS LINÉAIRES DU SECOND ORDRE

4.1. DÉFINITION

Définition (Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants)

On appelle *équation différentielle linéaire du second ordre* une équation du type :

$$\mathcal{E} : \alpha(x)y'' + \beta(x)y' + \gamma(x)y = \delta(x),$$

où α, β, γ et δ sont des fonctions continues sur I , à valeurs dans \mathbb{K} .

δ (ou $\delta(x)$) est appelé *second membre* de \mathcal{E} , et on dit que \mathcal{E} est *homogène* si son second membre est nul.

Une fonction f de I dans \mathbb{K} est une *solution* de \mathcal{E} si :

- (1) f admet une dérivée seconde sur I ;
- (2) $\forall x \in I, \alpha(x)f''(x) + \beta(x)f'(x) + \gamma(x)f(x) = \delta(x)$.

On appelle *équation différentielle homogène (ou sans second membre) associée à \mathcal{E}* l'équation

$$\mathcal{H} : \alpha(x)y'' + \beta(x)y' + \gamma(x)y = 0.$$

4.a

Ces équations sont en général trop difficiles à résoudre. On se contentera d'étudier le cas où α, β, γ sont des fonctions constantes (égales respectivement à a, b, c , où $a \neq 0$). De même, on ne résoudra \mathcal{E} que dans le cas de seconds membres d'un type particulier.

Dans toute la suite, on s'intéresse aux équations

$$\mathcal{E} : ay'' + by' + cy = \delta(x)$$

et

$$\mathcal{H} : ay'' + by' + cy = 0.$$

4.2. RÉOLUTION DE L'ÉQUATION HOMOGENÈNE

Définition (Équation caractéristique)

L'équation $az^2 + bz + c = 0$ (d'inconnue complexe z) est appelée *équation caractéristique de \mathcal{H} (et \mathcal{E})*, et sera notée \mathcal{C} dans la suite. Le polynôme $aX^2 + bX + c$ est appelé *polynôme caractéristique* de \mathcal{E} .

4.b

Pourquoi introduire cette équation caractéristique ? On montre aisément que pour tout $r \in \mathbb{C}$, l'application $t \mapsto e^{rt}$ est solution de \mathcal{H} si et seulement si r est solution de \mathcal{C} .

La résolution diffère selon que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Proposition (Résolution de l'équation homogène pour l'ordre 2, cas complexe)

- (1) si \mathcal{C} admet deux solutions distinctes r_1 et r_2 , l'ensemble $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ des solutions de \mathcal{H} est :

$$\mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \{t \mapsto C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}, (C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2\}$$

- (2) si \mathcal{C} admet une solution double r , l'ensemble $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ des solutions de \mathcal{H} est :

$$\mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \{t \mapsto (\lambda t + \mu) e^{rt}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\}$$

4.a

Démonstration

Soit r une solution de \mathcal{C} . On cherche les solutions de \mathcal{H} sous la forme $f : t \mapsto C(t)e^{rt}$, où C est une fonction deux fois dérivable sur \mathbb{R} (toute solution peut bien s'écrire sous cette forme, car $t \mapsto e^{rt}$ est deux fois dérivable et ne s'annule pas).

La fonction f est deux fois dérivable, et, pour tout réel t :

$$\begin{cases} f'(t) &= (C'(t) + rC(t))e^{rt}, \\ f''(t) &= (C''(t) + 2rC'(t) + r^2C(t))e^{rt}, \end{cases}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} af''(t) + bf'(t) + cf(t) &= (aC''(t) + (2ra + b)C'(t) + (ar^2 + br + c)C(t))e^{rt} \\ &= (aC''(t) + (2ra + b)C'(t))e^{rt}. \end{aligned}$$

Ainsi, f est solution de \mathcal{H} si et seulement si C' est solution de :

$$ay' + (2ra + b)y = 0.$$

- (1) Supposons que \mathcal{C} admette deux solutions distinctes $r = r_1$ et r_2 (telles que $r_1 + r_2 = -b/a$), i.e. $2ra + b \neq 0$.

f est solution de \mathcal{H} si et seulement si il existe un complexe A tel que, pour tout réel t : $C'(t) = A \exp(-(2ra + b)t/a)$, ce qui revient, en intégrant, à l'existence de complexes A' et B' tels que :

$$C(t) = A' \exp(-(2r + b/a)t) + B',$$

pour certains complexes A' et B' .

Finalement, la solution générale de \mathcal{H} est bien

$$t \mapsto (A' \exp(-(2r + b/a)t) + B') e^{rt} = A' e^{r_2 t} + B' e^{r_1 t},$$

où A' et B' décrivent \mathbb{C} .

- (2) Supposons que \mathcal{C} admette une unique solution r : la condition sur C signifie que C est affine, et on trouve donc bien la solution générale voulue. □

En pratique, le discriminant Δ de l'équation caractéristique permet de déterminer le type de l'ensemble des solutions. Le premier cas se produit lorsque $\Delta \neq 0$, le second lorsque $\Delta = 0$.

On peut retenir dans cette démonstration l'idée de faire, à nouveau, varier la constante, ce qui a eu effet de « baisser » l'ordre de l'équation différentielle (On cherche C comme primitive d'une solution d'une équation différentielle d'ordre 1).

Exercice (Ordre deux homogène, cas complexe)

Donner les solutions complexes de : $y'' - 6y' + 25y = 0$

5

Proposition (Résolution de l'équation homogène pour l'ordre 2, cas réel)

- (1) si \mathcal{C} admet deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2 , l'ensemble $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ des solutions de \mathcal{H} est :

$$\mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \{t \mapsto C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}, (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

- (2) si \mathcal{C} admet une solution double r , l'ensemble $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ des solutions de \mathcal{H} est :

$$\mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \{t \mapsto (\lambda t + \mu) e^{rt}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

4.b

- (3) si \mathcal{C} admet deux solutions complexes non réelles et conjuguées r et \bar{r} (écrivons $r = \gamma + i\omega$ sous sa forme algébrique), l'ensemble $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ des solutions de \mathcal{H} est :

$$\mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \{t \mapsto e^{\gamma t} (\lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)), \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

Démonstration

Montrons seulement le dernier cas, qui est le plus compliqué. Tout d'abord, on constate que toute fonction de cet ensemble est bien solution de \mathcal{H} , d'après le cas complexe et la formule d'Euler, et à valeurs réelles.

Réciproquement, soit f une solution de \mathcal{H} à valeurs réelles. D'après le cas complexe, il existe des nombres réels A, B, C, D tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$f(t) = (A + iB)(\cos(\omega t) + i \sin(\omega t))e^{\gamma t} + (C + iD)(\cos(\omega t) - i \sin(\omega t))e^{\gamma t}$$

La fonction f étant à valeurs réelles, $f = \text{Re}(f)$, et il vient alors

$$f(t) = ((A + C) \cos(\omega t) + (-B + D) \sin(\omega t))e^{\gamma t}.$$

La fonction f s'écrit donc bien sous la forme souhaitée. □

Encore une fois, le discriminant Δ de l'équation caractéristique permet de déterminer dans quelle situation on se trouve. Le premier cas se produit lorsque $\Delta > 0$, le deuxième lorsque $\Delta = 0$, le dernier lorsque $\Delta < 0$.

Dans le troisième cas, la solution générale de \mathcal{H} peut également s'écrire

$$t \mapsto A \cos(\omega(t - t_0))e^{\gamma t},$$

où A et t_0 décrivent \mathbb{R} .

Exercice (Ordre deux homogène, cas réel)

Donner les solutions réelles de : $y'' - 6y' + 25y = 0$.

6

Exercice (Équations différentielles physiques)

Soit $\omega \in \mathbb{R}_+^*$. Résoudre $y'' + \omega^2 y = 0$ et $y'' - \omega^2 y = 0$.

7

Ensemble des solutions et plan vectoriel

Dans tous les cas, une solution générale de \mathcal{H} s'écrit donc

$$t \mapsto C_1 h_1(t) + C_2 h_2(t),$$

où h_1 et h_2 sont deux solutions particulières non proportionnelles de \mathcal{H} , et C_1 et C_2 sont des scalaires quelconques.

On dit que toute solution est *combinaison linéaire* des deux fonctions h_1 et h_2 , et que $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ est un *plan vectoriel* de base (h_1, h_2) . 4.1

4.3. RECHERCHE D'UNE SOLUTION PARTICULIÈRE DE \mathcal{E}

Comme dans le cas d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, une solution générale de \mathcal{E} s'écrit comme la somme d'une solution particulière de \mathcal{E} , et d'une solution générale de l'équation homogène associée \mathcal{H} . Comment faire pour trouver une solution particulière, si on n'en trouve pas d'évidente ?

Proposition (Principe de superposition, ordre deux)

Si δ_1 et δ_2 sont des fonctions continues sur I telles que $\delta = \delta_1 + \delta_2$, et si f_1 et f_2 sont respectivement solutions de

$$ay'' + by' + cy = \delta_1(x) \quad \text{et} \quad ay'' + by' + cy = \delta_2(x),$$

où δ_1 et δ_2 sont des fonctions continues, alors $f_1 + f_2$ est solution de \mathcal{E} . 4.c

Démonstration

□

Proposition (Passage d'une solution complexe à une solution réelle)

Si a, b, c sont réels, et si f est solution de \mathcal{E} , alors $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont respectivement solutions de

$$ay'' + by' + cy = \operatorname{Re}(\delta(x)) \quad \text{et} \quad ay'' + by' + cy = \operatorname{Im}(\delta(x))$$

4.d

Si on emploie cette méthode, bien penser à préciser que les coefficients a, b et c sont réels. On admet¹ le résultat suivant, souvent utile :

Méthode (Second membre en exponentielle-polynôme, ordre deux)

On se place dans le cas où δ est de la forme $t \mapsto P(t)e^{\alpha t}$, pour un certain polynôme P de degré n , et un certain nombre complexe α .

- (1) si α n'est pas solution de l'équation caractéristique, \mathcal{E} admet une unique solution de la forme $t \mapsto Q(t)e^{\alpha t}$, où Q est de degré n ;
- (2) si α est l'une des deux solutions de l'équation caractéristique, \mathcal{E} admet une unique solution de la forme $f : t \mapsto tQ(t)e^{\alpha t}$, où Q est un polynôme de degré n ;
- (3) si α est l'unique solution de l'équation caractéristique, alors $f : t \mapsto Q(t)e^{\alpha t}$ tel que $aQ'' = P$ est solution de \mathcal{E} ,

4.2

Combiné au principe de superposition et au passage d'une solution complexe à une solution réelle, cette méthode permet de résoudre une équation où le second membre est du type $\delta : t \mapsto e^{\nu t} (P_1(t) \sin(\omega t) + P_2(t) \cos(\omega t))$.

4.4. RÉOLUTION DE \mathcal{E}

Proposition (Résolution pour l'ordre deux)

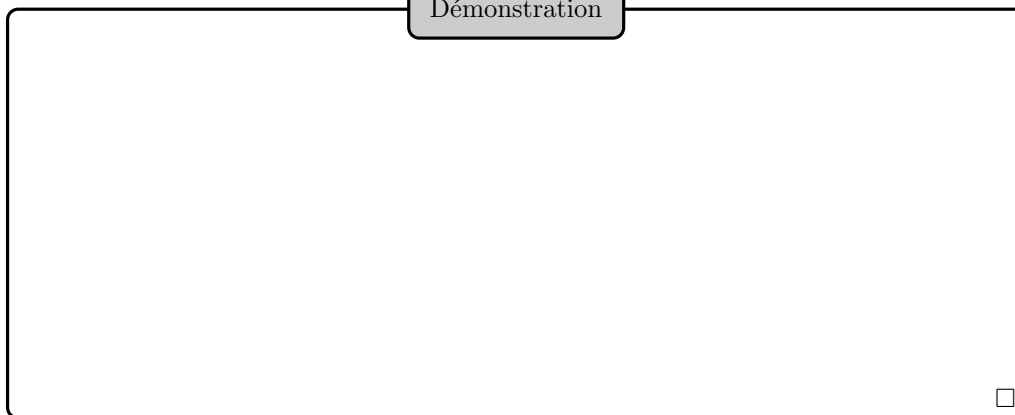
Soit ϕ une solution particulière de \mathcal{E} , et soit h_1 et h_2 deux solutions non multiples de \mathcal{H} . L'ensemble $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}$ des solutions de \mathcal{E} sur I est :

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}} = \{t \mapsto \phi(t) + C_1 h_1(t) + C_2 h_2(t), C_1, C_2 \in \mathbb{K}\}.$$

4.e

1. on peut cependant aisément montrer à la main la dernière affirmation

Démonstration



Nous admettons le résultat suivant d'algèbre linéaire :

Lemme Système de Cramer d'ordre deux

Si a, b, c, d sont quatre scalaires vérifiant $ad - bc \neq 0$, alors, pour tout choix préalable de scalaires α et β , le système linéaire

$$\begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta \end{cases}$$

admet un unique couple solution de \mathbb{K}^2 .

4.f

Proposition (Problème de Cauchy pour l'ordre 2)

Soit $(x_0, y_0, y'_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$. Il existe une unique solution f de \mathcal{E} telle que $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = y'_0$.

4.g

On admet cette proposition. Pour ceux qui le souhaitent, voici une esquisse de démonstration, à compléter.

Démonstration

Traiter d'abord le cas complexe, en prenant h_1 et h_2 comme dans 4.a page 153 :

Expliquer pourquoi le cas complexe permet de traiter le cas réel :

□

Problème de Cauchy pour l'ordre 2, cas réel

Pour toute donnée d'un point (x_0, y_0) du plan et d'un réel m , il passe une unique courbe intégrale passant en (x_0, y_0) avec une pente m .

Illustration

4.3

Exercice (Équations d'ordre deux, second membre en exponentielle-polynôme)

Résoudre sur \mathbb{R}

1 $y'' + 2y' + 5y = \cos^2 t.$

2 $y'' - 4y' + 4y = (t^2 + t \cos(2t) + 1)e^{2t}.$

8

Nous avons donc un plan de résolution des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants, analogue à celui donné plus haut dans le cas de l'ordre un.

5. PROBLÈME DE RACCORD POUR L'ORDRE 1 (HORS-PROGRAMME)

On revient ici au cas d'une équation linéaire d'ordre 1 :

$$\alpha(x)y' + \beta(x)y = \gamma(x).$$

La grande différence est que cette fois ci, le coefficient devant y' , à savoir $\alpha(x)$, peut s'annuler pour certaines valeurs de x , ce qui fait qu'on perd le fil conducteur en un tel point. On dit qu'il y a *problème de raccord*.

Pour résoudre une telle équation, on la résout d'abord sur tout intervalle où α ne s'annule pas, puis on étudie les problèmes de raccord, en prenant notamment garde à la condition de dérivabilité.

Exercice (Problèmes de raccord)

Faire l'exercice 14.

9

6. QUESTIONNAIRE 3 : ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

1 Le principe de superposition stipule que si f_1 et f_2 sont des solutions respectives de $a_1y'' + b_1y' + c_1y = 0$ et $a_2y'' + b_2y' + c_2y = 0$, alors $(f_1 + f_2)$ est solution de $(a_1 + a_2)y'' + (b_1 + b_2)y' + (c_1 + c_2)y = 0$.

2 Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, tel que $b^2 - 4ac < 0$. La seule solution réelle de $ay'' + by' + cy = 0$ est la fonction identiquement nulle.

3 Une base de l'ensemble des solutions sur \mathbb{R} de $y'' - y = 0$ est (ch, sh) .

4 Une équation différentielle linéaire admettant deux solutions distinctes sur I en admet une infinité.

5 Soit f et g , solutions d'équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 2 à coefficients constants. Il existe une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants, dont f et g sont solutions.

6 Une équation différentielle linéaire inhomogène (*i.e.* dont le second membre est non nul) n'admet pas la fonction nulle pour solution.

7 Soit a, b des applications continues de I dans \mathbb{R} . L'ensemble des solutions sur I et à valeurs réelles de $\mathcal{E} : a(t)y' + b(t)y = 0$ est une droite vectorielle, *i.e.* est l'ensemble des multiples par un scalaire de l'une des solutions non nulles de \mathcal{E} .

8 Si λ et μ sont deux scalaires distincts, et si δ est une fonction continue de I dans \mathbb{R} , alors les équations $y' - \lambda y = \delta(t)$ et $y' - \mu y = \delta(t)$ ont une unique solution commune (sur I).

9 Si J est un intervalle inclus dans I , alors toute solution sur J d'une équation différentielle \mathcal{E} est la restriction d'une solution sur I de \mathcal{E} .

10 Soit x_0, x_1 deux réels distincts, $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$. Soit a, b, c des réels, $a \neq 0$. L'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ admet une unique solution valant y_0 en x_0 et y_1 en x_1 .

11 Expliquer pourquoi l'équation différentielle $y' - y^2 = 1$ n'est pas linéaire. Donner une solution réelle de cette équation sur un intervalle.

7. FEUILLE DE TD 6 : ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Dans tous les exercices, on demande de trouver des solutions réelles.

7.1. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES D'ORDRE UN

Exercice 1 (Ordre un sans problème de raccord)

0

Résoudre :

1 $y' - \frac{x}{1+x^2}y = \frac{1}{1+x^2} + \frac{3}{\sqrt{1+x^2}}$.

2 $y' + y \cotan(x) = \sin x$.

3 $y' + y = xe^{3x} \cos(x) + (x-1)e^{-x}$.

4 $y' - 2y = (x^2+1)e^{4x} + (x^3 - x^2 + x + 1)e^{2x}$.

5 $y' + y = \cos x + \sin x$

6 $y' - 2xy = \operatorname{sh} x - 2x \operatorname{ch} x$

7 $y' + y \sin x = \sin 2x$.

7.2. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES D'ORDRE DEUX À COEFFICIENTS CONSTANTS

Exercice 2 (Ordre deux à coefficients constants)

0

Résoudre

1 $y'' - 2y' + y = \cos(mx)e^x$, où $m \in \mathbb{R}$.

2 $y'' - 2y' + y = x^3 e^x + 2x \cos(x) + x^3 + 3$.

3 $y'' + y = x \cos(x)^3$.

Exercice 3 (Exemple de problème de Cauchy pour l'ordre deux)

2

Soit $m \in \mathbb{R}$. Déterminer la solution f de l'équation :

$$y'' - 2y' + (1 + m^2)y = (1 + 4m^2) \cos(mx)$$

qui vérifie $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

Exercice 4 (Centrale MP 08)

2

Résoudre l'équation différentielle $x'' + x = \sin(t)$, puis l'équation différentielle $x'' + x = |\sin(t)|$.

7.3. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES D'UN AUTRE TYPE

Exercice 5 (Une équation de Bernoulli)

2

Résoudre l'équation de Bernoulli $x^2 y^2 - xy' - 3y = 0$ en supposant que y ne s'annule pas et en posant $z = \frac{1}{y}$.

Exercice 6 (Centrale MP 07)

2

1 Résoudre sur \mathbb{R}_+^* l'équation

$$(\mathcal{E}) \quad y'' + \frac{1}{x^2}y = 0.$$

Indication : on pourra utiliser le changement de variable $t = \ln(x)$.2 L'équation différentielle (\mathcal{E}) possède-t-elle des solutions non bornées? Déterminer les solutions bornées de (\mathcal{E}) .

Exercice 7 (Équation différentielle linéaire d'ordre trois)

2

Résoudre l'équation $y''' = y$.

Exercice 8 (Équation différentielle non linéaire d'ordre 2)

3

Trouver les solutions sur \mathbb{R}_+^* de l'équation différentielle $xy' = y + \sin(x)y^2$ ne s'annulant pas.**Indication :** on pourra poser $z = 1/y$.

Exercice 9 (Équation différentielle à variables séparées)

3

Résoudre l'équation $y' = e^{x+y}$.

7.4. ÉQUATIONS FONCTIONNELLES OU PROBLÈMES SE RAMENANT À DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Exercice 10 (Équation fonctionnelle)

0

On se propose de montrer qu'il existe une seule fonction f dérivable sur \mathbb{R} telle que

$$(f(0) = -4) \wedge (\forall x \in \mathbb{R}, f(-x)f'(x) = 1)$$

et de trouver cette fonction.

1 On suppose disposer d'une telle fonction f . On considère $g : x \mapsto f(-x)f(x)$.i Montrer que f ne s'annule pas sur \mathbb{R} .ii Montrer que g est constante et trouver sa valeur.iii Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y' = \frac{1}{16}y$ et qu'elle vérifie $f(0) = -4$.

2 En déduire le résultat voulu.

Exercice 11 (Équations pseudo différentielles)

2

1 Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dérivables sur \mathbb{R} , telles que

$$f'(x) + f(-x) = e^x,$$

pour tout réel x .2 Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivables sur \mathbb{R} , telles que

$$f''(x) + f(-x) = 0,$$

pour tout réel x .

Exercice 12 (Équation fonctionnelle avec deux variables)

2

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, deux fois dérivables sur \mathbb{R} , telles que :

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y),$$

pour tous réels x et y .

Exercice 13 (Équation fonctionnelle avec intégrale)

2

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues sur \mathbb{R} telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) + \int_0^x (x-t)f(t)dt = 1.$$

Exercice 14 (Problèmes de raccord)

0

Résoudre sur \mathbb{R} :

1 $xy' + y = x^3$.

2 $xy' - y = 0$.

3 $x^2y' + y = 0$.

4 $xy' - 2y = 0$.

Exercice 15 (Toujours des problèmes de raccord)

3

Résoudre sur \mathbb{R}

1 $x(x^2 - 1)y' + 2y = x^2$.

2 $xy' - 2y = x^4$.

3 $(e^x - 1)y' + (e^x + 1)y = 3 + 2e^x$.

Arithmétique

Sommaire

1. Divisibilité dans l'anneau des entiers relatifs	165
2. Plus grand diviseur commun	168
3. Plus petit commun multiple	170
4. Nombres premiers	171
5. Questionnaire 4 : Arithmétique	174
6. Feuille de TD 7 : Arithmétique	175
6.1. Congruences, équations diophantiennes, division euclidienne	175
6.2. Diviseurs, pgcd, ppcm	176
6.3. Nombres premiers, nombres composés, divers	176

L'arithmétique consiste (à notre niveau) en l'étude de l'anneau des entiers relatifs \mathbb{Z} . Passez du temps à bien démontrer (au moins de tête) les affirmations non prouvées.

Pour ceux qui envisagent la MP, il est fortement recommandé de travailler le DM sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

1. DIVISIBILITÉ DANS L'ANNEAU DES ENTIERS RELATIFS

Définition (Diviseur, multiple)

Soient a et b deux entiers relatifs. On dit que b est un *diviseur* de a , ou que a est un *multiple* de b , s'il existe un entier relatif q tel que $a = qb$. On note alors $b|a$.

1.a

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, l'ensemble $n\mathbb{Z}$ est l'ensemble des multiples de n , et $\mathcal{D}(n)$ l'ensemble des diviseurs de n . Pour tous a et b entiers relatifs, on a donc $b|a \Leftrightarrow a \in b\mathbb{Z} \Leftrightarrow b \in \mathcal{D}(a)$.

Exemple (Diviseurs et multiples)

- (1) $\mathcal{D}(0) = \mathbb{Z}$, $0\mathbb{Z} = \{0\}$.
- (2) $\mathcal{D}(1) = \{-1, 1\}$, $1\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$.
- (3) $\mathcal{D}(2) = \{-2, -1, 1, 2\}$, $2\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers pairs.

i

Soit m et n deux entiers relatifs.

- (1) $m\mathbb{Z} \subset n\mathbb{Z} \Leftrightarrow n|m \Leftrightarrow \mathcal{D}(n) \subset \mathcal{D}(m)$.
- (2) Si n est un multiple non nul de m , alors $|n| \geq |m|$.
- (3) On a $m\mathbb{Z} = n\mathbb{Z}$ si et seulement si $\mathcal{D}(m) = \mathcal{D}(n)$ si et seulement si $m = n$ ou $m = -n$.

Sur la relation de divisibilité

La relation de divisibilité est réflexive et transitive, mais pas antisymétrique. Cependant, sa restriction à \mathbb{N} est antisymétrique, et il s'agit donc d'une relation d'ordre. Bien sûr, il s'agit d'un ordre partiel.

1.1

Proposition (Divisibilité)

Soient a, b, c, d, u et v des entiers relatifs. On a :

(1) $(d|a \wedge d|b) \Rightarrow d|au + bv$.

(2) Si b est non nul, alors :

$$d|a \Leftrightarrow db|ab$$

(3) Si a divise b et c divise d , alors ac divise bd .

(4) Pour tout entier naturel k ,

$$b|a \Rightarrow b^k|a^k$$

1.a

Démonstration

□

Théorème (Division euclidienne)

Soit a un entier relatif et b un entier naturel *non nul*. Il existe un unique couple d'entiers relatifs (q, r) tels que

$$a = bq + r \text{ et } 0 \leq r < b$$

1.b

Définition (Division euclidienne)

Dans ce contexte, q est appelé *quotient de la division euclidienne* de a par b , et r est appelé *reste de la division euclidienne* de a par b .

1.b

Démonstration

L'unicité se montre en constatant que si (q, r) et (q', r') conviennent, alors $r - r' = b(q' - q)$. Il s'ensuit que $r - r'$ est un multiple de b , vérifiant également $|r - r'| < b$ par hypothèse : c'est donc 0, d'où $r = r'$ puis, par simplification par l'élément non nul b , $q = q'$.

Pour l'existence, on exhibe un couple convenable, à savoir celui où $q = \lfloor \frac{a}{b} \rfloor$, et $r = a - bq$.

□

Exercice (Sous-groupes d'entiers relatifs)

Montrer que les sous-groupes de \mathbb{Z} sont les $n\mathbb{Z}$, où n décrit \mathbb{N} .

1

Si G est un sous-groupe de \mathbb{Z} , il existe donc un unique entier naturel n tel que $G = n\mathbb{Z}$.

Idéaux d'entiers relatifs

Soit n un entier relatif. $n\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$. De plus, $n\mathbb{Z}$ est stable par multiplication par *tout* entier relatif. On dit que $n\mathbb{Z}$ est un *idéal* de \mathbb{Z} .

Réciproquement, tout idéal de l'anneau \mathbb{Z} est de cette forme :

1.2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit une relation, la *relation de congruence modulo n* , par

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, \quad y \equiv x[n] \Leftrightarrow y - x \in n\mathbb{Z} \quad (\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, y = x + kn)$$

(on dit alors que y est *congru* à x modulo n , et on note également $y \equiv x \pmod{n}$).

La congruence modulo n est une relation d'équivalence :

La congruence est compatible avec la somme et la multiplication : pour tous entiers a, b, c, d , si $a \equiv b[n]$ et $c \equiv d[n]$, alors $a + c \equiv b + d[n]$, $ac \equiv bd[n]$, et, pour tout entier naturel k , $a^k \equiv b^k[n]$:

Congruence et reste de la division euclidienne

Soit a un entier relatif, b un entier naturel non nul, et r le reste de la division euclidienne de a par b . Le reste r est donc l'unique élément de $[[0, b - 1]]$, congru à a modulo b . Il est nul si et seulement si b divise a .

Pour Python, $a\%b$ désigne r . Une autre notation standard pour r en informatique est $a \bmod b$.

1.3

Exercice (Parité d'une somme)

Soit n un entier naturel non nul. Trouver le reste de la division de $\sum_{k=1}^n k$ par 2.

2

Exercice (Reste d'une puissance)

Trouver le reste de la division euclidienne de 234^{122} par 7.

3

Exercice (Une équation diophantienne)

Montrer qu'il n'existe pas de couple d'entiers $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que

$$x^2 - 5y^2 = 3$$

4

2. PLUS GRAND DIVISEUR COMMUN

Proposition (Somme de sous-groupes d'un groupe additif)

Soit $(G, +)$ un groupe abélien. Soient H et K deux sous-groupes de G . On note

$$H + K = \{h + k, h \in H, k \in K\}$$

$H + K$ le plus petit sous-groupe de G qui contient H et K (pour la relation d'ordre d'inclusion), appelé sous-groupe de G engendré par $H \cup K$.

2.a

Démonstration

On vérifie aisément que $H + K$ est un sous-groupe de G , contenant H et K . De plus, tout sous-groupe de G contenant H et K est stable par $+$, et doit donc contenir $H + K$.

□

Définition (Plus grand commun diviseur)

Soient a et b deux entiers relatifs. Il existe un unique entier naturel n tel que

$$a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = n\mathbb{Z}.$$

On dit que n est le *plus grand commun diviseur* (ou pgcd) de a et de b . On note $n = \text{pgcd}(a, b)$, ou $n = a \wedge b$ (ou parfois (a, b)).

2.a

Démonstration

Justification de la définition : $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de \mathbb{Z} , et peut donc s'écrire de manière unique sous la forme annoncée.

□

Exemple (PGCD)

Pour tout entier relatif m , $0 \wedge m = |m|$.

$$24 \wedge (-30) = 6.$$

i

Fixons deux entiers relatifs a et b .

Par définition, il existe des entiers relatifs u et v tels que $a \wedge b = au + bv$. Réciproquement, tout entier qui s'écrit $au + bv$ est un multiple de $a \wedge b$.

Le pgcd de a et b est donc l'unique entier naturel divisant a et b , et divisible par tout diviseur de a et b : il s'agit donc bien du plus grand diviseur de a et b , pour la relation d'ordre de divisibilité sur \mathbb{N} (et même pour l'ordre naturel si a ou b est non nul).

Bien sûr $a \wedge b = b \wedge a = |a| \wedge |b|$.

Pour tout entier relatif k , $(ka) \wedge (kb) = |k|(a \wedge b)$, car $k(a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}) = (ka)\mathbb{Z} + (kb)\mathbb{Z}$.

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $a \wedge b = (a - kb) \wedge b$. En particulier si b est un entier naturel non nul, $a \wedge b = b \wedge r$, où r est le reste de la division euclidienne de a par b . Cette dernière remarque est le fondement de l'algorithme d'Euclide.

Proposition (Algorithme d'Euclide)

On se donne deux entiers naturels a et b . L'algorithme suivant donne la valeur de $a \wedge b$.

- (1) Si $b = 0$, renvoyer a et terminer l'algorithme.
- (2) Poser $r \leftarrow a \bmod b$, $a \leftarrow b$, $b \leftarrow r$ et retourner à l'étape 1.

2.b

Démonstration

(Justification de l'algorithme d'Euclide)

Si $b = 0$, on a bien $a \wedge b = |a| = a$. Sinon, on applique une ou plusieurs fois l'étape 2. Remarquons qu'à chaque application de la seconde étape, le couple (a, b) est changé en (b, r) , où r est le reste de la division euclidienne de a par b (licite puisque $b \neq 0$), et que le pgcd est inchangé. Comme la suite des couples obtenue est finie (car la suite des secondes composantes est une suite strictement décroissante d'entiers naturels), de dernier couple $(a, 0)$, et comme $a \wedge 0 = a$, l'algorithme renvoie bien $a \wedge b$. \square

Exercice (Calcul de pgcd par l'algorithme d'Euclide)

Calculer, avec l'algorithme d'Euclide, le pgcd de 2114 et 2567.

5

Définition (Entiers premiers entre eux)

Soient a et b deux entiers relatifs. On dit que a et b sont *premiers entre eux* (ou *étrangers*) si $a \wedge b = 1$.

2.b

a et b sont premiers entre eux si et seulement si les seuls diviseurs communs à a et b sont 1 et -1 , si et seulement si $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$.

1 et -1 sont premiers avec tout entier.

Théorème de Bézout

Soient a et b deux entiers relatifs. a et b sont premiers entre eux si et seulement si il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$.

2.c

Démonstration

Si a et b sont premiers entre eux, alors $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$. En particulier $1 \in a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$, ce qui prouve une première implication.

Si réciproquement on peut écrire $1 = au + bv$ pour certains entiers u et v , alors tout diviseur commun d à a et b divise 1, et donc $a \wedge b = 1$. \square

Si a et b sont premiers entre eux, toute relation (il n'y a pas unicité) du type $1 = au + bv$ est appelée *relation de Bézout*. Plus généralement, pour tous $a, b \in \mathbb{Z}$, toute relation $au + bv = a \wedge b$ (où $u, v \in \mathbb{Z}$) est appelée *relation de Bézout*.

Pour trouver une relation de Bézout, on peut appliquer l'algorithme d'Euclide, puis « remonter » les calculs. On verra plus tard une méthode plus propre, fondée sur le calcul matriciel.

Théorème de Gauss

Soient a, b, c trois entiers relatifs. Si a divise bc et si a est premier avec b , alors a divise c .

2.d

Démonstration

□

Si $d = a \wedge b$, alors il existe des entiers a' et b' premiers entre eux tels que $a = da'$ et $b = db'$: le cas où a ou b est nul est aisé. Si a et b sont non nuls, on est conduit à poser $a' = \frac{a}{a \wedge b}$ et $b' = \frac{b}{a \wedge b}$, et, de la relation $d = au + bv$ (pour certains entiers u et v), on déduit la relation de Bézout $1 = a'u + b'v$ entre a' et b' .

Écriture d'un nombre rationnel sous forme irréductible : tout nombre rationnel r s'écrit de manière unique sous la forme $\frac{p}{q}$, où $(p, q) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$, et où p et q sont premiers entre eux. L'unicité peut se montrer avec le théorème de Gauss. Donnez les formes irréductibles de $\frac{30}{-24}$ et de 0 :

Exercice (Entier premier avec un produit)

Soit $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Montrer que a est premier avec b et avec c si et seulement si il est premier avec bc .

6

Ceci se généralise à un produit de plusieurs termes. En particulier, si a et b sont premiers entre eux, toute puissance de a est étrangère à toute puissance de b (même si un exposant est nul).

Exercice (Nombres premiers entre eux en divisant un troisième)

Soit a et b deux entiers relatifs premiers entre eux, divisant chacun un entier c . Montrer que ab divise c .

7

3. PLUS PETIT COMMUN MULTIPLE

Définition (Plus petit commun multiple)

Soient a et b deux entiers. Il existe un unique entier naturel n tel que $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = n\mathbb{Z}$. Cet entier est appelé *plus petit commun multiple* de a et b , et est noté $\text{ppcm}(a, b)$ ou $a \vee b$.

3.a

Démonstration

Justification de la définition : $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de \mathbb{Z} , et peut donc s'écrire de manière unique sous la forme annoncée.

□

Exemple (PPCM)

- (1) $0 \vee 0 = 0$.
- (2) Pour tout entier relatif m , $0 \vee m = 0$.
- (3) $24 \vee (-30) = 120$.

i

Soit a et b deux entiers relatifs.

L'entier $a \vee b$ est le plus petit entier naturel pour la divisibilité¹ qui soit multiple de a et de b .

On a $a \vee b = b \vee a = |a| \vee |b|$.

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $(ka) \vee (kb) = |k|(a \vee b)$.

Exercice (Entiers premiers entre eux et ppcm)

Soit $a, b \in \mathbb{Z}$.

1 Montrer que si a et b sont premiers entre eux, alors $a \vee b = |ab|$, et que la réciproque est vraie si a et b sont non nuls.

2 Montrer : $(a \wedge b)(a \vee b) = |ab|$.

8

On peut définir le pgcd et le ppcm de plusieurs entiers, de la même façon qu'avec deux entiers : le pgcd de a_1, \dots, a_r (où $r \geq 3$) est l'unique entier naturel d tel que $d\mathbb{Z} = a_1\mathbb{Z} + \dots + a_r\mathbb{Z}$, et le ppcm de a_1, \dots, a_r est l'unique entier naturel n tel que $n\mathbb{Z} = a_1\mathbb{Z} \cap \dots \cap a_r\mathbb{Z}$.

On dit que les entiers a_1, \dots, a_r sont *premiers entre eux (dans leur ensemble)* si leur pgcd vaut 1. L'identité de Bézout est encore valable, et caractérise la primalité globale.

On dit que les entiers a_1, \dots, a_r sont *premiers entre eux deux à deux* si, pour tous $i, j \in \{1, \dots, r\}$ tels que $i \neq j$, on a $a_i \wedge a_j = 1$.

Si les a_1, \dots, a_r sont premiers entre eux deux à deux, ils sont premiers dans leur ensemble (il suffit même que deux de ces entiers soient premiers entre eux), mais la réciproque est fautive, comme le montre l'exemple de 6, 10, 15.

4. NOMBRES PREMIERS

Définition (Nombre premier)

Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dit que p est *premier* si les seuls diviseurs naturels de p sont 1 et p . Sinon, il est dit *composé*. On note \mathcal{P} l'ensemble des nombres premiers.

4.a

1 n'est pas premier.

Si $p \in \mathcal{P}$ ne divise pas $a \in \mathbb{Z}$, alors $a \wedge p = 1$. En particulier, p est premier avec $1, \dots, p-1$, et deux nombres premiers distincts sont premiers entre eux.

Si $p \in \mathcal{P}$ divise ab (où $a, b \in \mathbb{Z}$), alors p divise a ou b .

Lemme (Existence d'un diviseur premier)

Tout entier naturel $n \geq 2$ est divisible par (au moins) un nombre premier.

4.a

1. Cela reste-t-il vrai pour l'ordre usuel ?

Démonstration

En effet, $\mathcal{D}(n) \cap (\mathbb{N} \setminus \{0, 1\})$ n'est pas vide (il comprend n), et son plus petit élément est nécessairement premier. □

Si n ($n \geq 2$) n'est divisible par aucun entier compris (au sens large) entre 2 et \sqrt{n} , alors il est premier. Par exemple, 113 est premier car $113 = 5! - 7$, et $11^2 > 113$.

Proposition (Infinité du nombre de nombres premiers)

L'ensemble des nombres premiers est infini. 4.b

Démonstration

On peut démontrer ce résultat par l'absurde, en supposant disposer d'une énumération p_1, \dots, p_m de l'ensemble des nombres premiers. Le nombre $N = 1 + p_1 \dots p_m$, bien que supérieur ou égal à 2, n'admet pas de diviseur premier (puisque l'on a une relation de Bézout entre N et chaque nombre premier), ce qui contredit le lemme précédent. □

Théorème (Décomposition en produit de facteurs premiers)

Tout entier $n \geq 2$ s'écrit sous la forme

$$n = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_r^{m_r}$$

où $r \in \mathbb{N}^*$, p_1, \dots, p_r sont des nombres premiers distincts deux à deux, et m_1, \dots, m_r sont des entiers strictement positifs. 4.c

Une telle décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

Définition (Décomposition en produit de facteurs premiers)

Dans le contexte du théorème précédent, la décomposition trouvée est appelée *décomposition de n en produit de facteurs premiers*. 4.b

Démonstration

Unicité : si $n = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_r^{m_r} = p_1^{m'_1} p_2^{m'_2} \dots p_{r'}^{m'_{r'}}$ sont deux décompositions de n en produit de facteurs premiers, on doit avoir $\{p_1, \dots, p_r\} = \{p'_1, \dots, p'_{r'}\}$ (si par exemple $p_1 \notin \{p'_1, \dots, p'_{r'}\}$, le théorème de Gauss itéré nous ferait aboutir à l'absurdité $p_1 | 1$). En particulier, on a $r = r'$. Quitte à réordonner les nombres $p'_1, \dots, p'_{r'}$, on peut donc supposer que pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $p_i = p'_i$. S'il existe un $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ pour lequel $m_i \neq m'_i$, par exemple $m_1 > m'_1$ pour fixer les idées, alors

$$p_1^{m_1 - m'_1} p_2^{m_2} \dots p_r^{m_r} = p_2^{m'_2} \dots p_{r'}^{m'_{r'}}$$

p_1 divise un produit d'entiers qui lui sont étrangers : c'est absurde. □

Démonstration

Existence : par récurrence forte sur n ($n \geq 2$). Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose l'hypothèse :

(\mathcal{H}_n) : tout entier $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ admet une décomposition du type annoncé.

L'amorçage est aisé ($2 = 2^1$).

Fixons $n \geq 2$, \mathcal{H}_n , et déduisons-en \mathcal{H}_{n+1} . Il ne reste qu'à prouver que $n+1$ admet une telle décomposition. Si $n+1$ est premier, c'est facile ($n+1 = (n+1)^1$). Sinon, il admet un diviseur premier p , $p < n+1$. D'après \mathcal{H}_n , $\frac{n+1}{p}$ admet une telle décomposition, soit

$$\frac{n+1}{p} = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_r^{m_r}$$

Par conséquent, si p n'est pas l'un des p_1, \dots, p_r , alors

$$n+1 = pp_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_r^{m_r}$$

est une décomposition de $n+1$ en produit de facteurs premiers. Si $p = p_i$ pour un certain $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, alors

$$n+1 = p_1^{m'_1} p_2^{m'_2} \dots p_r^{m'_r},$$

où, pour tout $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $m'_j = m_j$ si $j \neq i$, et $m'_i = m_i + 1$, est une décomposition de $n+1$ en produit de facteurs premiers.

En conclusion, \mathcal{H}_n est vraie pour tout entier naturel supérieur ou égal à 2, ce qui prouve l'existence. □

Définition (Valuation p -adique)

Pour chaque nombre premier p , et pour tout entier naturel non nul n , on appelle *valuation p -adique* de n le plus grand entier k tel que p^k divise n . Elle est notée $\nu_p(n)$.

4.c

Exercice (Calculs de valuations p -adiques)

Calculer les valuations p -adiques de $2^3 3^{15} 11^{12}$, pour p décrivant \mathcal{P} .
Pour $m, n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\nu_p(mn) = \nu_p(m) + \nu_p(n)$.

9

Pour tout entier naturel non nul, on a $n = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\nu_p(n)}$.

Soient m et n deux entiers naturels non nuls. m divise n si et seulement si, pour tout nombre premier p , $\nu_p(m) \leq \nu_p(n)$.

Pour calculer le pgcd ou le ppcm de deux entiers m et n , on a les relations suivantes :

$$\nu_p(m \wedge n) = \min\{\nu_p(m), \nu_p(n)\} \text{ et } \nu_p(m \vee n) = \max\{\nu_p(m), \nu_p(n)\}.$$

On peut décomposer un entier relatif (différent de 0, 1 et -1), en rajoutant $\epsilon \in \{-1, +1\}$ devant le produit).

Exercice (Calculs de pgcd et ppcm à l'aide des décompositions)

Calculer les pgcd et ppcm de 30^5 et de 42^{20} .

10

Exercice (Petit théorème de Fermat)

Soit $p \in \mathcal{P}$. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{Z}$,

$$a^p \equiv a[p]$$

11

5. QUESTIONNAIRE 4 : ARITHMÉTIQUE

1. **1** Si $a \equiv b[m]$ et $c \equiv d[n]$, alors $ac \equiv bd[mn]$.
- 2** Si $a \wedge b = 1$, alors $a + b$ est premier.
- 3** Si $a \wedge b = 1$, alors a^2 et b^2 sont premiers entre eux.
- 4** Si $a \wedge b = 1$, alors $a + b$ et ab sont premiers entre eux.
- 5** Si $m \neq 0$ et $am \Leftrightarrow bm[mn]$, alors $a \equiv b[n]$.
- 6** Pour tout nombre premier p différent de 2 et de 5, il existe un multiple de p dont tous les chiffres valent 1.
- 7** Soit $a, b, c \in \mathbb{Z}$. A-t-on toujours $(a \wedge b \wedge c)(a \vee b \vee c) = |abc|$?
- 8** Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. On note $b|a$ lorsque b divise a . Les assertions suivantes sont-elles équivalentes ?
- (1) $b|a$
 - (2) $(\forall k \in \mathbb{N}, b^k | a^k)$
 - (3) $(\exists k \in \mathbb{N}, b^k | a^k)$
 - (4) $(\exists k \in \mathbb{N}, b^k | a^k)$
- 9** A-t-on $(\forall k \in \mathbb{N}, b^k | a^k) \Leftrightarrow b|a$
- A-t-on $\forall k \in \mathbb{N}, (b^k | a^k \Leftrightarrow b|a)$

6. FEUILLE DE TD 7 : ARITHMÉTIQUE

6.1. CONGRUENCES, ÉQUATIONS DIOPHANTIENNES, DIVISION EUCLIDIENNE

Exercice 1 (Divisibilité)

0

- 1 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 3 ne divise jamais $n^2 + 1$.
- 2 Montrer que le produit de quatre entiers consécutifs est divisible par 24.
- 3 Montrer que 39 divise $7^{37} + 13^{37} + 19^{37}$.
- 4 Soit $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Si 9 divise $a^3 + b^3 + c^3$, alors 3 divise a ou b ou c .
- 5 Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. Montrer que $a^2 + b^2$ est divisible par 7 si et seulement si a et b le sont.

Exercice 2 (Calculs de restes)

0

- 1 Trouver, pour tout entier naturel non nul n , le reste de la division de $\sum_{k=1}^n k$ par 2.
- 2 Trouver le reste de la division euclidienne de 234^{122} par 7.
- 3 Trouver le reste de la division de $(a^2 + (a-1)^2)^2$ par $4a^2$ ($a \in \mathbb{N}^*$).

Exercice 3 (Chiffres en base 10)

0 à 4

- 1 Trouver le chiffre des unités de 7^{7^7} .
- 2 Trouver les deux derniers chiffres de la représentation décimale de $19^{19^{19}}$.
- 3 Montrer que chaque nombre du type

$$2^{2^n} + 1$$
 (où $n \geq 2$) se termine par 7.
- 4 Montrer qu'un nombre entier positif de six chiffres dont la représentation décimale est de la forme « abcabc » est nécessairement divisible par 13.
- 5 On admet que 2^{29} est un nombre de 9 chiffres, tous différents (en base 10). Quel est le chiffre manquant ?
- 6 Trouver la somme des chiffres de la somme des chiffres de la somme des chiffres de 4444^{4444} .

Exercice 4 (Équations diophantiennes)

2

- 1 Montrer qu'il n'existe pas de couple d'entiers $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que

$$x^2 - 5y^2 = 3.$$

- 2 L'équation diophantienne

$$x^3 + 2y^3 = 4z^3$$

possède-t-elle dans \mathbb{Z}^3 une autre solution que le triplet nul ?

Exercice 5 (Centrale MP 08)

2

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Calculer le reste de la division euclidienne de $(n-1)!$ par n .

6.2. DIVISEURS, PGCD, PPCM

Exercice 6 (Une fraction irréductible)

0

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fraction $\frac{n^3+n}{2n^2+1}$ est irréductible.

Exercice 7 (Autour de la relation de Bézout)

2

1 Soit a et b deux entiers relatifs non nuls et premiers entre eux. Montrer qu'il existe une infinité de couples (x, y) de \mathbb{Z}^2 tels que $ax + by = 1$. Montrer que si (x_0, y_0) est l'un d'eux, les autres sont donnés par $x = x_0 + kb$ et $y = y_0 - ka$, k décrivant \mathbb{Z} .

2 En déduire que si a et b sont deux entiers relatifs non nuls, il existe une infinité de couples d'entiers (x, y) tels que $ax + by = a \wedge b$. Expliquer comment calculer les solutions d'une telle équation (appliquer scrupuleusement l'algorithme d'Euclide à $|a|$ et $|b|$).

3 En déduire la résolution générale d'une équation du type $ax + by = c$.

4 Résoudre $2520x - 3960y = 6480$ ($x, y \in \mathbb{Z}$).

Exercice 8 (Égalité de ppcm)

3

Montrer que $\text{ppcm}(1, 2, \dots, 2n) = \text{ppcm}(n + 1, n + 2, \dots, 2n)$.

Exercice 9 (Une caractérisation des carrés parfaits)

3

Soit n un entier strictement positif, et soit $d(n)$ le nombre d'entiers positifs divisant n . Prouver que $d(n)$ est impair si et seulement si n est un carré parfait (c'est-à-dire le carré d'un nombre entier).

Exercice 10 (Somme des diviseurs)

3

Pour tout entier naturel non nul n , on note $S(n)$ la somme de ses diviseurs naturels. Montrer que si m et n sont deux entiers naturels non nuls premiers entre eux, alors $S(mn) = S(m)S(n)$.

Exercice 11 (Entiers premiers entre eux dans leur ensemble)

3

Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}^*$ et $b_i = \prod_{j \neq i} a_j$. Montrer que a_1, \dots, a_n sont deux à deux premiers entre eux si et seulement si b_1, \dots, b_n sont premiers entre eux dans leur ensemble.

6.3. NOMBRES PREMIERS, NOMBRES COMPOSÉS, DIVERS

Exercice 12 (Nombres premiers)

0

Montrer que si p et $8p - 1$ sont premiers, alors $8p + 1$ est composé (on pourra considérer la congruence de p modulo 3).

Exercice 13 (Une petite partie du théorème de Dirichlet)

1

Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $4n + 3$.

Exercice 14 (Nombres de Mersenne et de Fermat)

1

Trouver une condition nécessaire sur $n \in \mathbb{N}^*$ pour que $2^n - 1$ soit premier. Même question avec $2^n + 1$.

Exercice 15 (Nombre composé dans toute base)

3

Montrer que, peu importe la base, le nombre 10101 est composé.

Exercice 16 (Nombres composés consécutifs)

3

Montrer que pour tout entier strictement positif n , il existe n nombres consécutifs composés.

Exercice 17 (ENS Lyon 08))

3

On pose $F_n = 2^{(2^n)} + 1$.

1 Montrer que $\prod_{k=0}^{n-1} F_k = F_n - 2$.

2 Si $n \neq m$, quel est le pgcd de F_n et de F_m ?

3 À l'aide de ce qui précède, montrer que l'ensemble des nombres premiers est infini.

Exercice 18 (Irrationalité de $\sqrt{2}$, preuve originale)

5

En observant que $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$, et en considérant une suite géométrique de raison $\sqrt{2} - 1$, montrer par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice 19 (Transfert d'information)

5

Deux mathématiciens, P et S , cherchent deux nombres entre 2 et 200. P connaît leur produit, et S leur somme. Tous les deux réfléchissent, puis s'ensuit la discussion suivante :

1 P : Je ne peux pas déterminer ces deux nombres.

2 S : Je le savais.

3 P : Alors je les ai trouvés.

4 S : Alors moi aussi.

Trouver ces nombres.

Nombres réels, suites numériques

Sommaire

1. Le corps des nombres réels	179
1.1. La propriété de la borne supérieure	179
1.2. Caractérisation des intervalles	181
1.3. Valeurs approchées, densité des rationnels	181
2. Suites de nombres réels : premières définitions	183
3. Limite d'une suite de nombres réels	185
4. Limites et ordre	187
5. Opérations algébriques sur les limites	189
6. Suites extraites	191
7. Suites monotones. Théorèmes des segments emboîtés et de Bolzano-Weierstrass.	192
8. Relations de comparaison	196
9. Brève extension aux suites complexes	200
10. Questionnaire 5 : Suites	203
11. Feuille de TD 8 : Nombres réels, suites numériques	204
11.1. Borne supérieure, corps des nombres réels	204
11.2. Convergence, divergence	205
11.3. Relations de comparaison, comportement à l'infini	206
11.4. Suites extraites	208
11.5. Suites adjacentes	209
11.6. Suite de nombres complexes	209

Le corps des nombres réels comble certaines « insuffisances » du corps des nombres rationnels. Par exemple, l'ensemble

$$\{x \in \mathbb{Q}, |x| \leq \sqrt{2}\}$$

(qui est aussi $\{x \in \mathbb{Q}, x^2 \leq 2\}$) est une partie non vide et majorée de \mathbb{Q} , mais n'admet pas de borne supérieure dans \mathbb{Q} . Cet ensemble en admet une dans \mathbb{R} .

Les suites constituent une fausse retrouvaille : le cours est beaucoup plus approfondi qu'en Terminale, et il s'agit du premier vrai cours d'analyse de l'année. Il faudra notamment vous méfier de votre intuition !

1. LE CORPS DES NOMBRES RÉELS

1.1. LA PROPRIÉTÉ DE LA BORNE SUPÉRIEURE

Soit A une partie de \mathbb{R} . On dit que A est *majorée* (dans \mathbb{R}) s'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $a \in A$, on ait $a \leq c$.

Supposons A majorée, et soit $b \in \mathbb{R}$. On dit que b est la borne supérieure de A (dans \mathbb{R}) si b est le plus petit des majorants de A , *i.e.* b majore A et pour tout réel c majorant A , on a : $b \leq c$. L'ordre sur \mathbb{R} étant total, cela revient à écrire :

$$(\forall a \in A, a \leq b) \wedge (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists a \in A, b - \varepsilon < a)$$

\mathbb{R} se distingue de \mathbb{Q} par la propriété fondamentale suivante :

Fait (Propriété fondamentale du corps des réels)

Toute partie non vide majorée de \mathbb{R} admet une borne supérieure.

Corollaire (Propriété de la borne inférieure)

Toute partie non vide minorée de \mathbb{R} admet une borne inférieure.

1.a

Démonstration

Soit A une partie non vide et minorée de \mathbb{R} , mettons par a . L'ensemble $-A$ est non vide et majoré (par $-a$), donc admet une borne supérieure b . On vérifie aisément que $-b$ est un minorant de A , et que pour tout réel ε strictement positif, $-b + \varepsilon$ n'est pas un minorant de A : A admet $-b$ pour borne inférieure dans \mathbb{R} .

□

Proposition (Le corps des réels est archimédien)

\mathbb{R} est *archimédien* : soit $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe un entier naturel n tel que : $na > x$.

1.b

Démonstration

On raisonne par l'absurde, en supposant qu'il n'existe pas de tel entier n . L'ensemble $A = \{na, n \in \mathbb{N}\}$ est non vide, majoré par x , et admet donc une borne supérieure b . Comme b est un majorant de A , pour tout entier naturel n , on a :

$$na \leq b$$

En particulier, pour tout entier naturel n ,

$$(n+1)a \leq b$$

$b - a$ est donc un majorant de A , ce qui est absurde.

□

Corollaire (Puissances d'un nombre supérieur à un)

Étant donnés deux réels a et x , avec $a > 1$, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $a^n > x$.

1.c

Démonstration

Écrivons $a = 1 + h$ ($h > 0$). D'après la formule du binôme de Newton^a, on a, pour tout entier naturel n :

$$(1+h)^n \geq nh$$

Comme \mathbb{R} est archimédien, il existe un entier n tel que $nh > x$, d'où le résultat.

^a. Ou par récurrence, entraînez-vous à le montrer ainsi.

□

Exercice (Borne supérieure)

Faire l'exercice 6 de TD.

1

1.2. CARACTÉRISATION DES INTERVALLES

Définition (Partie réelle convexe)

Une partie X de \mathbb{R} est dite *convexe* si elle contient le segment joignant deux quelconques de ses points.

1.a

Proposition (Intervalles et convexes)

Les intervalles de \mathbb{R} sont les convexes de \mathbb{R} .

1.d

Démonstration

Tout intervalle de \mathbb{R} est convexe : le montrer pour $[a, b[$.

Réciproquement, soit I un convexe de \mathbb{R} . Si I est de cardinal 0 ou 1, c'est un intervalle : supposons que I comprenne au moins deux éléments. Si I est borné, soit $a = \inf I$ et $b = \sup I$. On a $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$. On va montrer que $]a, b[\subset I$. Soit $c \in]a, b[$: par définition de a et de b , il existe deux éléments x et y de I tels que $x < c < y$. Par convexité de I , $c \in [x, y] \subset I$. On a donc $]a, b[\subset I \subset [a, b]$: dans les quatre cas possibles, I est bien un intervalle.

Si par exemple I est minoré et non majoré, soit $a = \inf I$. On montre que $]a, +\infty[\subset I$. Soit $c \in]a, +\infty[$: il existe deux éléments x et y de I tels que $x < c < y$. Par convexité de I , $c \in I$. Dès lors, I vaut $]a, +\infty[$ ou $[a, +\infty[$: dans tous les cas, c'est un intervalle. De même dans les autres cas. □

1.3. VALEURS APPROCHÉES, DENSITÉ DES RATIONNELS

Proposition (Partie entière)

Étant donnés $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}_+^*$, il existe un unique entier relatif n tel que $na \leq x < (n + 1)a$.

1.e

Démonstration

Existence : comme \mathbb{R} est archimédien, on peut trouver un entier k tel que $x < ka$. L'ensemble $\Omega = \{k' \in \mathbb{Z}, k'a \leq x\}$ est donc majoré par k , et le caractère archimédien de \mathbb{R} montre encore qu'il est non vide. Son plus grand élément n est tel que $na \leq x < (n + 1)a$.

Unicité :

□

On définit la *relation de congruence modulo a* sur \mathbb{R} par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x \equiv y [a]) \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z}, y = x + na).$$

D'après la proposition précédente, pour tout réel x , il existe un unique $y \in [0, a[$ tel que $x \equiv y[a]$.

Définition (Partie entière)

Si x est un réel, l'unique entier relatif n vérifiant $n \leq x < n + 1$ s'appelle la *partie entière* de x , et se note $E(x)$, $[x]$, ou $\lfloor x \rfloor$.

1.b

Définition (Approximations décimales)

Soit x un réel, et n un entier naturel. Il existe un unique entier relatif m_n tel que

$$m_n 10^{-n} \leq x < (m_n + 1) 10^{-n}$$

Le réel $\alpha_n = m_n 10^{-n}$ (resp. $\beta_n = (m_n + 1) 10^{-n}$) est appelé *approximation décimale* de x à 10^{-n} près par *défaut* (resp. par *excès*).

1.c

La fonction $n \mapsto \alpha_n$ (resp. $n \mapsto \beta_n$) est croissante (resp. décroissante) :

Nous verrons plus tard que ces deux suites sont adjacentes, et que leur limite commune est x .

Définition (Partie dense de réels)

Soit A une partie de \mathbb{R} . On dit A *dense* dans \mathbb{R} si A rencontre tout intervalle de longueur non nulle.

1.d

A est dense dans \mathbb{R} si et seulement si pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, où $a < b$, $A \cap]a, b[\neq \emptyset$, ou encore : entre deux réels quelconques, on peut trouver un élément de A .

Illustration

Proposition (Densité des rationnels dans les réels)

\mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} .

1.f

Démonstration

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, où $a < b$.

Soit n un entier naturel tel que $10^{-n} < b - a$, et m_n l'entier tel que :

$$m_n 10^{-n} \leq a < (m_n + 1) 10^{-n}$$

On a $a < (m_n + 1) 10^{-n} \leq a + 10^{-n} < b$.

□

Proposition (Densité des irrationnels dans les réels)

L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ des nombres irrationnels est dense dans \mathbb{R} .

1.g

Démonstration

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, où $a < b$. Il existe un nombre rationnel r dans l'intervalle $]a - \sqrt{2}, b - \sqrt{2}[$. Le nombre irrationnel $r + \sqrt{2}$ appartient à $]a, b[$. □

Exercice (Sous-groupes additifs réels)

Faire l'exercice 3 de TD.

2

2. SUITES DE NOMBRES RÉELS : PREMIÈRES DÉFINITIONS

Définition (Suite de nombres réels)

On appelle *suite de nombres réels* toute famille d'éléments de \mathbb{R} indexée par \mathbb{N} . Leur ensemble est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Une suite sera le plus souvent notée sous forme indicée, *i.e.* on écrira $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

u_n est appelé le *terme* de rang (ou d'*indice*) n de u , ou *terme général*.

u_0 est appelé *terme initial*.

2.a

Définition (Suite stationnaire)

Une suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels est dit *constante* si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n.$$

La suite u est dite *stationnaire* si elle est constante à partir d'un certain rang, *i.e.*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad u_{n+1} = u_n.$$

2.b

Notre étude portant principalement sur le comportement à l'infini, nous ne faisons pas de grande différence entre une suite constante et une suite stationnaire. Plus généralement, il faut bien comprendre que le comportement à l'infini d'une suite n'a aucun lien avec son comportement en un nombre fini d'indices fixés. En particulier, le comportement à l'infini d'une suite n'est pas modifié si on en change ou même supprime un nombre fini de termes.

Définition (Opérations sur les suites)

Si u et v sont deux suites de nombres réels, la *somme* $u + v$ de ces suites est la suite de terme général $u_n + v_n$. On définit ainsi une loi de composition interne d'addition sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit la suite λu , suite dont le terme général est λu_n . Cela définit une loi de multiplication scalaire $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2.c

Si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, et $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, alors $\lambda u + \mu v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, *i.e.* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est stable par combinaison linéaire.

Théorème (Structure d'espace vectoriel sur les suites)

L'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, muni de la loi de composition interne d'addition et de la loi externe de multiplication scalaire est un espace vectoriel réel : pour toutes suites réelles u et v , tous réels λ et μ , on a :

- (1) $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +)$ est un groupe commutatif;
- (2) $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$;
- (3) $1.u = u$;
- (4) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$;
- (5) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$.

2.a

Définition (Produit de suites)

Soit u et v deux suites réelles. Le *produit* uv de u et de v est la suite réelle de terme général $u_n v_n$.

2.d

Proposition (Structure d'anneau sur les suites)

$(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \times)$ est un anneau commutatif.

2.b

En outre, pour tout réel λ , toutes suites réelles u et v , on a :

$$(\lambda u)v = \lambda(uv).$$

On dit alors que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est une \mathbb{R} -algèbre (c'est une sorte de super-structure combinant espaces vectoriels et anneaux).

Définition (Ordre sur les suites)

Soit $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On écrit $u \leq v$ lorsque $u_n \leq v_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.e

Selon nos conventions, $u < v$ signifie $u \leq v$ et $u \neq v$. En particulier, $0 < u$ (ou $u > 0$) signifie que la suite est à termes positifs ou nuls, non tous nuls : elle n'est pas forcément à termes tous strictement positifs.

Cet ordre n'est pas total :

On définit comme on l'a fait plus généralement dans le chapitre sur les relations d'ordre les notions de suites majorées, minorées, bornées, de suites monotones, strictement monotones. Au passage, on peut noter qu'une suite u est bornée si et seulement si $|u|$ est majorée.

Pour la croissance d'une suite u , la définition est

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, \quad (m \leq n) \Rightarrow (u_m \leq u_n).$$

On lui préfère souvent l'assertion équivalente suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq u_{n+1}.$$

Exercice (Stabilité de sous-ensembles de suites)

Déterminer si les sous-ensembles suivants de suites réels sont des sous-espaces vectoriels (parties non vides stables par combinaisons linéaires) ou des sous-anneaux (parties comprenant l'élément unité, stables par différence et par produit) de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

- (1) L'ensemble $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ des suites réelles bornées.
- (2) L'ensemble des suites réelles majorées.
- (3) L'ensemble des suites réelles majorées ou minorées.
- (4) L'ensemble des suites réelles croissantes.
- (5) L'ensemble des suites réelles monotones.
- (6) L'ensemble des suites réelles sommes d'une suite croissante et d'une suite décroissante.

3

3. LIMITE D'UNE SUITE DE NOMBRES RÉELS

Définition (Limite d'une suite de nombres réels)

On dit que la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge (ou tend) vers un réel $l \in \mathbb{R}$ lorsque

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N) \Rightarrow (|u_n - l| \leq \varepsilon).$$

S'il existe un réel l tel que la suite converge vers l , on dit que la suite est *convergente*, ou encore qu'elle *admet une limite finie*. Une suite non convergente est dite *divergente*.

3.a

Exercice (Convergence d'une suite réelle)

Proposer des réécritures variées du fait qu'une suite réelle u converge vers le réel l .

4

Illustration

Exercice (Divergence d'une suite réelle)

Écrire dans le registre formel le fait qu'une suite réelle u diverge.

5

Changer la valeur de la suite u en un nombre fini d'indices ne change rien à son éventuelle convergence. Cette définition traduit donc bien le caractère asymptotique de cette notion.

Définition (Divergence d'une suite réelle vers plus ou moins l'infini)

On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *diverge* (ou *tend*) vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) si :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq M$$

$$\text{(resp. } \forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \leq M)$$

3.b

Dans le

cas où la suite u tend vers une limite $l \in \bar{\mathbb{R}}$, on note indifféremment $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l, u_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} l, u \rightarrow l$, ou encore $\lim u = l$.

Exercice (Divergence d'une suite réelle vers l'infini)

Proposer des réécritures variées du fait qu'une suite réelle u diverge vers $+\infty$.

6

Proposition (Unicité de la limite)

Une suite admet au plus une limite.

3.a

Démonstration

□

Ne pas oublier qu'« en général », une suite réelle n'admet pas de limite (finie ou non). La notation $\lim_n u_n$ ne peut être employée que si on a établi (ou supposé) l'existence de cette limite. Pour bien distinguer le type de divergence, on dit parfois qu'une suite réelle divergeant vers $+\infty$ ou $-\infty$ est *divergente de première espèce*, et que les suites n'admettant pas de limite sont *divergentes de seconde espèce*.

Exemple (de limites pour des suites classiques)

- (1) La suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)$ tend vers 0 : en effet, soit ε un réel strictement positif. Il existe un entier N à partir duquel $n+1 \geq \frac{1}{\varepsilon} (> 0)$, et donc $0 \leq \frac{1}{n+1} \leq \varepsilon$.
- (2) Toute suite stationnaire est convergente. Dans ce cas précis, on peut même exceptionnellement remplacer $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ par $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+$, et inverser $\forall \varepsilon, \exists N$ en $\exists N, \forall \varepsilon$.
- (3) La suite (a^n) est constante de valeur 1 si $a = 1$, tend vers $+\infty$ si $a > 1$ (pour tout réel M , il existe un entier N tel que $a^N \geq M$. Pour tout entier $n \geq N$, on aura $a^n \geq M$), et tend vers 0 si $|a| < 1$: en effet, c'est évident si $a = 0$. Si, $a \neq 0$, et si on fixe un réel strictement positif ε , il existe un entier N à partir duquel $\frac{1}{|a|^n} \geq \frac{1}{\varepsilon}$, i.e. $|a|^n \leq \varepsilon$.
- (4) La suite (\sqrt{n}) tend vers $+\infty$. En effet, si M est un réel fixé, il existe un rang N à partir duquel $n \geq M^2$, et donc $\sqrt{n} \geq M$.

i

Exercice (Caractérisation séquentielle de la densité)

Faire l'exercice 2 de TD.

7

4. LIMITES ET ORDRE

Proposition (Toute suite convergente est bornée)

Toute suite convergente est bornée.

4.a

Démonstration

Soit u une suite convergente, vers un réel l . On prend $\varepsilon = 1$ dans l'assertion de convergence de u vers l : il existe un rang N à partir duquel u_n est compris entre $l-1$ et $l+1$. Bien sûr, l'ensemble $\{u_k, k \in \llbracket 0, N \rrbracket\}$ est borné, car fini, mettons minoré par m et majoré par M . La suite u est alors majorée par $\max(M, l+1)$, et minorée par $\min(m, l-1)$.

□

Proposition (Suite convergeant vers un réel strictement positif)

Toute suite de nombres réels, convergeant vers un nombre réel strictement positif, est minorée à partir d'un certain rang par un nombre réel strictement positif.

4.b

Démonstration

Soit u une telle suite, de limite $l > 0$. Appliquons l'assertion de convergence de u vers l pour $\varepsilon = \frac{l}{2} > 0$. Il existe un rang N à partir duquel u_n est compris entre $\frac{l}{2}$ et $\frac{3l}{2}$, et est donc en particulier minorée par le nombre strictement positif $\frac{l}{2}$.

□

Ce résultat est relativement fin. La suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est à termes strictement positifs, mais il n'existe pas de rang à partir duquel son terme général est minoré par un nombre strictement positif.

Proposition (De l'ordre de deux suites à l'ordre de leurs limites)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles, de limites respectives l et l' dans $\overline{\mathbb{R}}$. On suppose $u \leq v$. On a alors $l \leq l'$.

4.c

Démonstration

Il n'y a rien à montrer si $l = -\infty$ ou $l' = +\infty$. Si $l = +\infty$, alors nécessairement $l' = +\infty$. De même si $l' = -\infty$.

On se place désormais dans le cas où l et l' sont finis. Soit $\varepsilon > 0$. À partir d'un certain rang N (resp. N'), on a $|u_n - l| \leq \varepsilon$ (resp. $|v_n - l'| \leq \varepsilon$). Cela nous donne, pour $n \geq \max(N, N')$:

$$l - \varepsilon \leq u_n \leq v_n \leq l' + \varepsilon$$

et donc $l \leq l' + 2\varepsilon$. Ceci étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, on a $l \leq l'$. □

Le cas le plus utile est celui où l'une des deux suites (u_n) ou (v_n) est constante (souvent la constante nulle). Si par exemple (u_n) est majorée par M et de limite l , alors $l \leq M$ (notez qu'avoir plus précisément $u_n < M$ pour tout n conduirait à la même conclusion)

Une inégalité stricte ne nous apporterait rien : si $u_n < v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors la conclusion est toujours $l \leq l'$, l'égalité pouvant se produire :

Proposition (Principe des gendarmes)

Soient u, v, w trois suites réelles. On suppose que $v \leq u \leq w$, et que v et w convergent vers un même réel a . La suite u est alors convergente, vers a .

4.d

Démonstration

Soit ε un réel strictement positif quelconque. Il existe un rang N_v (resp. N_w) à partir duquel $|v_n - a| \leq \varepsilon$ (resp. $|w_n - a| \leq \varepsilon$). À partir du rang $\max(N_v, N_w)$, on aura :

$$a - \varepsilon \leq v_n \leq u_n \leq w_n \leq a + \varepsilon$$

La suite u converge donc vers a . □

Notez que la convergence de u ne fait pas partie des hypothèses. Il reste en revanche valable si v et w divergent toutes deux vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), mais on a plus généralement :

Exercice (Ordre et limites infinies)

Soit u et v deux suites réelles. On suppose $u \leq v$. Montrer que si u tend vers $+\infty$ (resp. v tend vers $-\infty$), alors v tend vers $+\infty$ (resp. u tend vers $-\infty$).

8

Exercice (Convergence vers 0)

Soit $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Montrer que si $|u| \leq w$ et si $w_n \rightarrow 0$, alors $u_n \rightarrow 0$.

9

On en déduit que tout réel est limite d'une suite de nombres rationnels¹ (avec des notations précédentes, $|x - \alpha_n| \leq 10^{-n}$).

5. OPÉRATIONS ALGÈBRIQUES SUR LES LIMITES

Dans la pratique, on utilise très souvent ces résultats pour prouver l'existence de certaines limites, plutôt que de revenir à la définition.

Lemme (Opérations algébriques lorsqu'une suite tend vers l'infini)

Soit u une suite réelle tendant vers $+\infty$:

- (1) Si v est minorée, alors $u + v$ tend vers $+\infty$;
- (2) Si v est minorée par un nombre strictement positif à partir d'un certain rang, alors uv tend vers $+\infty$.

5.a

Démonstration

- (1) Soit M un réel quelconque. Si v est minorée par m_v , et que u tend vers $+\infty$, il existe un rang N à partir duquel $u_n \geq M - m_v$. À partir de ce rang, on a $(u + v)_n \geq M$.
- (2) Soit M un réel positif quelconque. Si v est minorée par un nombre strictement positif m_v à partir d'un certain rang N_v , et que u tend vers $+\infty$, il existe un rang N_u à partir duquel $u_n \geq \frac{M}{m_v}$. À partir du rang $\max(N_u, N_v)$, on a $u_n \geq \frac{M}{m_v}$ et $v_n \geq m_v > 0$, et donc $u_n v_n \geq \frac{M v_n}{m_v} \geq M$.

□

Lemme (Produit d'une suite de limite nulle et d'une suite bornée)

Le produit d'une suite convergeant vers 0 et d'une suite bornée est une suite convergeant vers 0.

5.b

Démonstration

Soit u tendant vers 0 et v bornée (disons $|v| \leq M$, où $M > 0$). Soit $\varepsilon > 0$: il existe un rang N à partir duquel $|u_n| \leq \frac{\varepsilon}{M}$, et donc $|u_n v_n| \leq \varepsilon$.

□

1. En fait, il s'agit d'une reformulation de la densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} .

Théorème (Opérations algébriques sur les limites)

On considère deux suites u et v de limites respectives l et l' , éléments de $\overline{\mathbb{R}}$.

- (1) La suite $|u|$ tend vers $|l|$ (en notant $|\pm\infty| = +\infty$).
- (2) Si $l + l'$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors $u + u'$ tend vers $l + l'$.
- (3) Si ll' existe dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors uv tend vers ll' .
- (4) Si $\lambda \in \mathbb{R}^*$, alors λu tend vers λl (la limite vaut 0 si $\lambda = 0$).
- (5) Si $l \neq 0$, alors il existe un rang à partir duquel u_n ne s'annule pas, et $\lim_n \frac{1}{u_n} = \frac{1}{l}$ (en posant $\frac{1}{\pm\infty} = 0$).
- (6) Si $\frac{l'}{l}$ n'est pas une forme indéterminée, alors la suite $\frac{v_n}{u_n}$, définie à partir d'un certain rang, tend vers $\frac{l'}{l}$.

5.c

Démonstration

- (1) Si l est infini, c'est immédiat. Si l est fini, cela résulte clairement de la seconde inégalité triangulaire ($||u_n| - |l|| \leq |u_n - l|$).
- (2) Si l ou l' est infini, et que $l + l'$ n'est pas une forme indéterminée, par exemple si $l = +\infty$ et l' est fini ou vaut $+\infty$: u tend vers $+\infty$, et v est minorée, donc un résultat précédent prouve que $u + v$ tend vers $+\infty$.

Si l et l' sont finis : fixons $\varepsilon > 0$. Il existe un rang N_u (resp. N_v) à partir duquel $|u_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ (resp. $|v_n - l'| \leq \frac{\varepsilon}{2}$). À partir du rang $\max(N_u, N_v)$, on a $|(u_n + v_n) - (l + l')| \leq |u_n - l| + |v_n - l'| \leq \varepsilon$.

- (3) Si par exemple $l = +\infty$, on écarte le cas où $l' = 0$. Si par exemple l' est un réel strictement positif ou vaut $+\infty$, v est minorée à partir d'un certain rang par un réel strictement positif, et le produit tend donc vers $+\infty$ (de même si $l' < 0$).

Si l et l' sont finis, il suffit d'observer que $uv = (u - l)v + l(v - l') + ll'$ (et d'utiliser un lemme précédent).

- (4) Cas particulier du résultat précédent.
- (5) Si $l = \pm\infty$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang à partir duquel $|u_n| \geq \frac{1}{\varepsilon}$, i.e. $|\frac{1}{u_n}| \leq \varepsilon$.
Si $l \neq 0$, on écrit $|\frac{1}{u} - \frac{1}{l}| = |\frac{u-l}{ul}|$. Il existe un rang à partir duquel $|\frac{1}{ul}|$ est majorée par un réel strictement positif, donc bornée.
- (6) On écrit $\frac{v}{u} = \frac{1}{u}v$.

□

On en déduit la limite de $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$, pour u et v tendant vers l et l' respectivement ($l' \neq 0$). Dans les cas indéterminés, on ne peut rien dire :

Corollaire (Somme d'une suite convergente et d'une suite divergente)

Si u converge et v diverge, alors $u + v$ diverge.

5.d

Démonstration

Sachant que u converge, on a l'implication : si $u + v$ converge, alors v converge (car $v = (u + v) - u$). C'est la contraposée de l'assertion cherchée. □

Il se peut très bien que $u + v$ (ou uv) admette une limite sans que ni u ni v en admettent ² :

Exercice (Stabilité de sous-ensembles de suites et limite)

L'ensemble des suites convergentes (resp. convergentes de limite nulle) est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (et de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$) ?

10

Lemme (Suite tendant vers 0 par valeurs supérieures)

Si $\lim u = 0^+$, i.e. si u admet 0 pour limite, et si tous les termes de u sont strictement positifs à partir d'un certain rang, alors $\frac{1}{u}$ (définie à partir d'un certain rang éventuellement) tend vers $+\infty$.

5.e

Démonstration

Soit $M > 0$: il existe un rang N à partir duquel $0 < u_n \leq \frac{1}{M}$, donc $\frac{1}{u_n} \geq M$. □

On a une assertion analogue si $\lim u = 0^-$.

6. SUITES EXTRAITES

Définition (Suite extraite)

Soit u et v deux suites réelles indexées par \mathbb{N} . On dit que v est *extraite* de u (ou que v est une *sous-suite* de u) s'il existe une application φ de \mathbb{N} dans \mathbb{N} , strictement croissante, appelée *extractrice*, telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_{\varphi(n)}$$

6.a

On rappelle que si $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante, alors on a $\varphi(n) \geq n$, pour tout entier naturel n .

Exemple (Suites extraites)

Pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, la suite $(u_{n_0+n})_{n \in \mathbb{N}}$ est extraite de u .
Les suites (u_{2n}) , (u_{2n+1}) , (u_{3n}) sont extraites de u , grâce aux extractrices respectives :

i

². D'une manière générale, si une partie d'un ensemble est stable par une opération, il est fréquent que son complémentaire ne le soit pas

Théorème (Suite extraite d'une suite convergente)

Supposons qu'une suite u converge vers un réel l . Toute suite extraite de u converge également vers l .

6.a

Démonstration

Soit ε un réel strictement positif quelconque. Il existe un rang N à partir duquel $|u_n - l| \leq \varepsilon$. À partir de ce rang N , on a $|v_n - l| \leq \varepsilon$, d'après le rappel.

□

Un raisonnement analogue montre que toute suite extraite d'une suite divergeant vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) est une suite divergeant vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Corollaire (Condition suffisante de divergence)

Une suite admettant une suite extraite divergente (resp. divergente de seconde espèce) est divergente (resp. divergente de seconde espèce).

6.b

Corollaire (Condition suffisante de divergence de seconde espèce)

Une suite admettant deux suites extraites convergeant vers deux limites différentes est divergente de seconde espèce.

6.c

Par exemple, la suite $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente de seconde espèce.

En revanche, si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers une même limite, alors u tend vers cette limite.

Exercice (De la convergence de sous-suites à la convergence)

Faire l'exercice 27 de TD.

11

7. SUITES MONOTONES. THÉORÈMES DES SEGMENTS EMBOÎTÉS ET DE BOLZANO-WEIERSTRASS.

Théorème de la limite monotone (pour les suites)

Soit u une suite réelle croissante. Si cette suite est majorée, alors elle est convergente, vers $\sup\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$. Sinon, elle tend vers $+\infty$.

Soit u est une suite réelle décroissante. Si cette suite est minorée, elle est convergente, vers $\inf\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$. Sinon, elle tend vers $-\infty$.

7.a

Démonstration

Supposons u croissante non majorée. Si M est un réel fixé, il existe donc un entier N tel que $u_N \geq M$. Par croissance de u , on aura $u_n \geq M$ à partir du rang N : u diverge vers $+\infty$.

Supposons u croissante majorée, et soit l la borne supérieure de son image (l est réelle). Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Par définition de l , il existe un entier N tel que $l - \varepsilon \leq u_N \leq l$.

À partir du rang N , on aura $|u_n - l| \leq \varepsilon$, par croissance de u .

Le cas où u est décroissante se ramène au précédent en considérant $-u$.

□

Définition (Suites adjacentes)

Deux suites u et v sont *adjacentes* si l'une est croissante, l'autre décroissante, et si leur différence tend vers 0

7.a

Lemme (Suites adjacentes)

Supposons u croissante, v décroissante, et $u - v$ de limite nulle. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.

7.b

Démonstration

□

Proposition (Suites adjacentes)

Soit u et v deux suites adjacentes, avec u croissante et v décroissante. Les suites u et v sont alors convergentes, et ont même limite l . De plus l est l'unique réel x tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq x \leq v_n$$

7.c

Démonstration

La suite u (resp. v) est croissante majorée (par v_0) (resp. décroissante minorée (par u_0)). Chacune de ces suites est donc convergente, mettons vers l_u et l_v respectivement. Comme $\lim(v - u) = 0$, $l_u = l_v$.

l vérifie bien les inégalités de l'énoncé. Réciproquement, par passage à la limite dans ces inégalités, seul l peut vérifier ces inégalités.

□

À nouveau, tout réel x est limite d'une suite de nombres rationnels, puisque les suites des approximations de x à 10^{-n} près par défaut et par excès sont adjacentes, et encadrent x à tout rang.

Théorème des segments emboîtés

On considère une suite $(I_n)_n$ de segments de \mathbb{R} . On suppose que cette suite est décroissante pour l'inclusion, et que la suite (d_n) (où d_n est la longueur du segment I_n) tend vers 0. Alors l'intersection des segments I_n est un singleton.

7.d

Démonstration

Pour chaque entier naturel n , on écrit $I_n = [\alpha_n, \beta_n]$ (avec $\alpha_n \leq \beta_n$). Notons en particulier que $d_n = \beta_n - \alpha_n$. D'après les hypothèses de l'énoncé, les suites $\alpha = (\alpha_n)$ et $\beta = (\beta_n)$ sont respectivement croissante et décroissante, et $\lim(\beta - \alpha) = 0$. Ces suites sont adjacentes, elles admettent donc admettent une limite commune l .

Par définition, l'intersection des segments I_n est l'ensemble des réels x tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_n \leq x \leq \beta_n$$

Cette intersection est donc le singleton $\{l\}$.

□

Voici maintenant un résultat fondamental d'analyse (vous pouvez d'ailleurs essayer de suivre sa longue descendance tout au long de l'année) :

Théorème de Bolzano-Weierstrass

De toute suite bornée de nombres réels, on peut extraire une suite convergente.

7.e

Le grand principe de cette démonstration est d'exploiter la notion de suite dichotomique d'intervalles. Par suite d'intervalles, on entend une famille d'intervalles indexée par \mathbb{N} : à chaque entier naturel n , on va associer un intervalle I_n . La suite (I_n) de ces intervalles sera dite *dichotomique* car, pour tout entier naturel, I_{n+1} sera obtenu à partir de I_n en coupant ce dernier en deux. Pour chaque entier naturel n , I_n sera un segment $[\alpha_n, \beta_n]$, $\alpha_n \leq \beta_n$.

Démonstration

Première étape : Considérons une suite réelle bornée $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, disons majorée par M , et minorée par m . On pose $\alpha_0 = m$, et $\beta_0 = M$ (et donc $I_0 = [m, M]$). Notons

$$\Omega_0 = \{n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in I_0\}$$

Bien sûr, $\Omega_0 = \mathbb{N}$.

On introduit l'ensemble

$$\left\{ n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in \left[\alpha_0, \frac{\alpha_0 + \beta_0}{2} \right] \right\}$$

(attention, c'est une partie de \mathbb{N} , et non une partie de I_0 (penser au cas des suites constantes)).

Si cet ensemble est infini, on pose $I_1 = \left[\alpha_0, \frac{\alpha_0 + \beta_0}{2} \right]$. S'il est fini, on pose $I_1 = \left[\frac{\alpha_0 + \beta_0}{2}, \beta_0 \right]$. Dans tous les cas, l'ensemble

$$\Omega_1 = \{n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in I_1\}$$

est infini.

On construit ainsi, par récurrence, une suite d'intervalles $(I_p)_{p \in \mathbb{N}}$, telle que pour tout $p \in \mathbb{N}$, l'ensemble

$$\Omega_p = \{n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in I_p\}$$

soit infini : si, pour un certain entier naturel p , I_p est supposé construit, on introduit l'ensemble

$$\left\{ n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in \left[\alpha_p, \frac{\alpha_p + \beta_p}{2} \right] \right\}$$

Cet ensemble peut être infini, auquel cas on pose $I_{p+1} = \left[\alpha_p, \frac{\alpha_p + \beta_p}{2} \right]$, ou fini, auquel cas on pose $I_{p+1} = \left[\frac{\alpha_p + \beta_p}{2}, \beta_p \right]$. Dans tous les cas, Ω_{p+1} est infini.

Pour tout entier naturel p , le diamètre de I_p est $\frac{M-m}{2^p}$, donc tend vers 0 lorsque p tend vers $+\infty$.

D'après le théorème des segments emboîtés, l'intersection $\bigcap_{p \in \mathbb{N}} I_p$ est un singleton $\{l\}$.

□

Démonstration

Seconde étape : construisons maintenant une suite extraite de u , tendant vers l . Pour tout entier naturel n , on formule l'hypothèse de récurrence suivante :

(\mathcal{H}_n) : on a trouvé une suite strictement croissante d'entiers naturels $(i_k)_{0 \leq k \leq n}$, telle que $i_k \in \Omega_k$, pour tout entier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

L'amorçage de cette propriété est immédiat (on peut prendre n'importe quel entier pour i_0).

Fixons un entier naturel n , supposons \mathcal{H}_n , et déduisons-en \mathcal{H}_{n+1} : l'ensemble Ω_{n+1} étant infini, l'ensemble $\Omega_{n+1} \setminus \llbracket 0, i_n \rrbracket$ n'est pas vide (il est même infini). On choisit un élément i_{n+1} dans cet ensemble, et l'hypothèse \mathcal{H}_{n+1} s'en déduit aisément.

Ainsi, en considérant l'application $\varphi : n \mapsto i_n$, on dispose d'une suite extraite $v = (v_n)$ de u , telle que, pour tout entier naturel n , $\alpha_n \leq v_n \leq \beta_n$. Encadrée par deux suites de limite l , la suite v , extraite de u , converge (vers l) : le théorème de Bolzano-Weierstrass est prouvé.

□

Corollaire (Compacité de tout segment)

Soit un segment $[a, b]$ et une suite (x_n) de points de ce segment. Il existe alors une suite extraite de (x_n) qui converge vers un point l du segment $[a, b]$.

7.f

Démonstration

Étant bornée, on peut extraire de la suite (x_n) une suite convergente $(x_{\varphi(n)})$. La limite de cette suite est comprise (au sens large), entre a et b , et $(x_{\varphi(n)})$ converge donc vers un point du segment $[a, b]$. \square

Sur la compacité

Ce résultat exprime la *compacité* de tout segment de \mathbb{R} . Aucun autre intervalle non vide ne vérifie cette propriété.

7.1

8. RELATIONS DE COMPARAISON

La première question que l'on se pose devant une suite réelle est celle de sa convergence, ou de sa divergence vers $+\infty$ ou $-\infty$. En admettant que cela soit le cas, il peut être intéressant de savoir *comment* cette suite tend vers sa limite, « à quelle vitesse ». Par exemple, les suites (n) , $(n + 12)$ et (n^2) tendent toutes les trois vers $+\infty$, mais les deux premières semblent aller « à la même allure », beaucoup plus lentement que la troisième. L'objectif de cette partie est de formaliser et exploiter tout cela.

On considère une suite (b_n) de nombres réels *tous non nuls*, et une suite de réels (a_n) .

Définition (Suite négligeable devant une autre)

La suite (a_n) est dite *négligeable* devant (b_n) s'il existe une suite (ε_n) tendant vers 0, telle que $a_n = b_n \varepsilon_n$ pour tout entier naturel n . On note alors $a_n = o(b_n)$.

8.a

Cela revient donc à dire que la suite de terme général $\frac{a_n}{b_n}$ tende vers 0.

Définition (Suite dominée par une autre)

La suite (a_n) est dite *dominée* par (b_n) (on dit également que b_n *domine* a_n) s'il existe un réel M tel que $|a_n| \leq M|b_n|$ pour tout entier naturel n . On note alors $a_n = O(b_n)$.

8.b

Cela revient à dire que la suite de terme général $\frac{a_n}{b_n}$ soit bornée.

Définition (Équivalence des suites)

On suppose que (a_n) est à termes tous non nuls. La suite (a_n) est dite *équivalente* à la suite (b_n) si $a_n - b_n = o(b_n)$, *i.e.* il existe une suite (ε_n) tendant vers 0, telle que $a_n = b_n(1 + \varepsilon_n)$ pour tout entier naturel n . On note alors $a_n \sim b_n$.

8.c

Cela revient à dire que la suite de terme général $\frac{a_n}{b_n}$ tende vers 1. L'équivalence des suites est une relation d'équivalence.

Lien entre les relations de comparaison

Toute suite convergente étant bornée, si $a_n = o(b_n)$ ou $a_n \sim b_n$, alors $a_n = O(b_n)$.

8.1

Cas d'une suite s'annulant

On peut rencontrer ces notations pour une suite (b_n) s'annulant (c'est le cas des suites (n) et (n^2) de l'introduction). On remplace alors souvent la condition « pour tout entier naturel n » par « à partir d'un certain rang », ce qui conforte le caractère asymptotique de ces relations.

Attention cependant, ces notions n'ont pas grand intérêt si la suite (b_n) est nulle à partir d'un certain rang, car alors la suite (a_n) (dominée par, négligeable devant ou équivalente à (b_n)) est nulle à partir d'un certain rang. C'est pourquoi vous ne verrez jamais l'expression $a_n \sim 0$ par exemple. En pratique, on n'utilise ces notions que pour des suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

8.2

Exemple (Relations de comparaison)

- (1) Dire que $a_n = O(1)$ signifie qu'elle est bornée. Dire que $a_n = o(1)$ signifie qu'elle est de limite nulle.
- (2) $n \sim n + 12$ et $n = o(n^2)$.
- (3) Si une suite (a_n) tend vers $l \in \mathbb{R}^*$, alors $a_n \sim l$.
- (4) On considère $p, q \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_p, b_0, \dots, b_q \in \mathbb{R}$, où a_p et b_q sont non nuls.

On a :

$$\frac{a_p n^p + \dots + a_1 n + a_0}{b_q n^q + \dots + b_1 n + b_0} \sim \frac{a_p}{b_q} n^{p-q}$$

i

Aspect formel de ces relations

Il faut bien comprendre que les notations $o(b_n)$ et $O(b_n)$ ne désignent pas des suites précises, mais plutôt des ensembles de suites. C'est pourquoi certains préfèrent écrire par exemple $a_n \in o(b_n)$. Cependant, nous conservons la notation consacrée, afin par exemple d'effectuer des opérations algébriques. Par exemple, on écrira

$$n^2 + n + \cos(n) + o(n^2) = n^2 + o(n^2),$$

mais on ne peut pas simplifier par « $o(n^2)$ », puisque ce symbole désigne deux suites différentes.

Autre exemple : s'il est vrai qu'un « $o(1/n)$ » est un « $o(1)$ », la réciproque est fautive :

8.3

L'emploi de ces relations nécessite un temps d'adaptation, et recèle quelques dangers. Par chance, les formules qui suivent se démontrent très facilement de tête, il suffit donc de procéder à une vérification simple pour éviter les erreurs.

Proposition (Propriétés des relations de comparaison)

Si $a_n = o(b_n)$ et $b_n = O(c_n)$ (ou si $a_n = O(b_n)$ et $b_n = o(c_n)$), alors $a_n = o(c_n)$. La relation o est transitive, et O est réflexive, transitive.

8.a

Si les deux suites (a_n) et (b_n) sont équivalentes, et si (b_n) admet une limite l (finie ou infinie), alors la suite (a_n) tend vers l .

Proposition (Équivalence de suites et signe)

On considère deux suites (a_n) et (b_n) équivalentes de nombres réels non nuls. Alors, à partir d'un certain rang, a_n et b_n ont même signe.

8.b

Démonstration

Une suite tendant vers 1 est à termes strictement positifs à partir d'un certain rang. □

Proposition (Opérations algébriques sur les relations de comparaison)

Si $a_n \sim b_n$, et si $a'_n \sim b'_n$, alors

$$a_n a'_n \sim b_n b'_n$$

et

$$\frac{a_n}{a'_n} \sim \frac{b_n}{b'_n}$$

Si (a_n) et (b_n) sont deux suites équivalentes de réels strictement positifs, et si $\alpha \in \mathbb{R}$ est fixé, alors

$$a_n^\alpha \sim b_n^\alpha$$

8.c

Démonstration

Le produit et le quotient de deux suites tendant vers 1 est une suite tendant vers 1. Si α est un réel quelconque, et u de limite 1, alors u^α est de limite 1. □

Sommation des équivalents

Attention ! Il n'y a pas de résultat général sur la somme (ou différence) d'équivalents. Ce n'est pas parce que $a_n \sim b_n$ et $a'_n \sim b'_n$ que $a_n + a'_n \sim b_n + b'_n$. Cela peut être vrai comme faux :

Pour cette raison, il n'y a aucun intérêt à écrire par exemple $\cos \frac{1}{n} \sim 1 - \frac{1}{2n^2}$ (bien que ce soit vrai), mais il est beaucoup plus intéressant d'écrire $\cos \frac{1}{n} - 1 \sim -\frac{1}{2n^2}$. En revanche, si $u_n = \alpha_n + w_n$, où $w_n = o(\alpha_n)$, alors $u_n \sim \alpha_n$:

8.4

Composition des relations de comparaison

Si $a_n \sim b_n$, et si f est une fonction telles que $(f(a_n))$ et $(f(b_n))$ soient définies, il n'y a aucune raison que ces suites soient équivalentes :

8.5

Il est notamment interdit de prendre des logarithmes ou exponentielles d'équivalents sans précaution.

Exercice (Logarithme d'un équivalent)

On considère deux suites équivalentes de réels strictement positifs (a_n) et (b_n) . On suppose qu'elles tendent vers une limite (commune) $l \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{1\}$. Montrer qu'alors $(\ln(a_n))$ et $(\ln(b_n))$ sont équivalentes. Montrer que ce résultat tombe en défaut si la limite commune vaut 1.

12

Proposition (Comparaison des suites de référence)

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$, $a \in]1, +\infty[$. On a :

$$(\ln n)^\beta = o(n^\alpha), n^\alpha = o(a^n), a^n = o(n!)$$

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_-^*$, $a \in]0, 1[$. On a :

$$\frac{1}{n!} = o(a^n), a^n = o(n^\alpha), n^\alpha = o((\ln n)^\beta)$$

8.d

Démonstration

Tout est connu depuis le cours sur les fonctions usuelles, sauf les assertions portant sur $n!$. Soit a un réel, $a > 1$. Il existe un entier naturel N non nul tel que $N \geq 2a$. Bien sûr, on aura $n \geq 2a$ dès le rang N , et par conséquent, pour tout entier $n \geq N$:

$$\prod_{k=N}^n k \geq \prod_{k=N}^n (2a) = 2^{n-N+1} a^{n-N+1}$$

Il vient donc :

$$\frac{a^n}{n!} \leq \frac{(2a)^{N-1}}{(N-1)!} \frac{1}{2^n}$$

pour tout entier naturel $n \geq N$, ce qui montre que $(\frac{a^n}{n!})$ est de limite nulle. □

Exercice (Équivalents simples de suites)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels non nuls tendant vers 0. Montrer qu'alors $\sin u_n \sim u_n$, $\tan u_n \sim u_n$, $\ln(1 + u_n) \sim u_n$, $1 - \cos(u_n) \sim \frac{u_n^2}{2}$, $e^{u_n} - 1 \sim u_n$.

13

9. BRÈVE EXTENSION AUX SUITES COMPLEXES

Définition (Suites complexes)

Une suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs complexes est une famille de nombres complexes indexée par \mathbb{N} .

La partie réelle (resp. partie imaginaire) de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite réelle, notée $\operatorname{Re}(u)$ (resp. $\operatorname{Im}(u)$), de terme général $\operatorname{Re}(u_n)$ (resp. $\operatorname{Im}(u_n)$).

La suite conjuguée de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, notée \bar{u} , est la suite de terme général \bar{u}_n .

La suite des modules de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, notée $|u|$, est la suite réelle de terme général $|u_n|$.

9.a

Opérations sur les suites complexes

On définit bien sûr des opérations sur l'ensemble $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ des suites complexes, qui lui confèrent une structure d'anneau commutatif et de \mathbb{C} -espace vectoriel (et même de \mathbb{C} -algèbre).

9.1

Définition (Suite complexe bornée)

Une suite complexe $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite *bornée* s'il existe un réel positif M tel que $|u_n| \leq M$, pour tout entier naturel n .

9.b

Suites bornées : reformulations

Cela revient à dire que la suite des modules soit bornée, ou encore à ce que les suites des parties imaginaire et réelle le soient (d'après les encadrements $|z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|$, $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$, et $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$, valables pour tout nombre complexe z).

9.2

Définition (Convergence d'une suite complexe)

On dit qu'une suite complexe $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge (ou tend) vers un nombre complexe l si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - l| \leq \varepsilon.$$

On note alors $\lim_n u_n = l$, ou $\lim u = l$.

9.c

Proposition (Convergence d'une suite complexe)

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l si et seulement si ses parties réelle et imaginaire convergent respectivement vers $\operatorname{Re}(l)$ et $\operatorname{Im}(l)$.

9.a

Démonstration

Cela résulte clairement des encadrements :

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|, \quad |\operatorname{Re}(z)| \leq |z| \quad \text{et} \quad |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|.$$

□

Convergence d'une suite complexe

- (1) La définition est exactement la même que pour une suite réelle, le module remplaçant la valeur absolue (et les disques remplaçant les segments). Bien des propriétés des suites réelles sont encore valables pour les suites complexes ;
- (2) Dire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l revient à dire que la suite *réelle* de terme général $|u_n - l|$ tend vers 0 ;
- (3) Si u converge vers l , alors sa suite conjuguée converge vers \bar{l} ;
- (4) Si u converge vers l , alors sa suite des modules converge vers $|l|$ (d'après la seconde inégalité triangulaire), mais la réciproque est évidemment fausse (on peut prendre l'indéfectible exemple $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$;
- (5) Toute suite complexe convergente est bornée (la réciproque est fausse) ;
- (6) Nous ne définissons pas de notion de suite complexe divergeant vers l'infini (que serait cet infini dans le cas complexe ?)

9.3

Théorème (Opérations algébriques, suites complexes)

On considère deux suites complexes u et v de limites complexes respectives l et l' .

- (1) $|u|$ converge vers $|l|$ et \bar{u} converge vers \bar{l} .
- (2) $(u + v)$ converge vers $l + l'$.
- (3) uv converge vers ll' .
- (4) si $\lambda \in \mathbb{C}$, alors λu converge vers λl .
- (5) si $l \neq 0$, alors il existe un rang à partir duquel u_n ne s'annule pas, et $\frac{v}{u}$ converge vers $\frac{l'}{l}$.

9.b

Démonstration

Tout est facile, et résulte de ces mêmes propriétés pour le cas réel, et de la proposition 9. Vérifions-le pour le produit (cas le plus « compliqué ») : les parties réelle et imaginaire de la suite produit uv sont de termes généraux respectifs :

$$\operatorname{Re}(u_n) \operatorname{Re}(v_n) - \operatorname{Im}(u_n) \operatorname{Im}(v_n) \quad \text{et} \quad \operatorname{Re}(u_n) \operatorname{Im}(v_n) + \operatorname{Im}(u_n) \operatorname{Re}(v_n).$$

D'après les résultats algébriques sur les suites réelles, ces suites convergent respectivement vers :

$$\operatorname{Re}(l) \operatorname{Re}(l') - \operatorname{Im}(l) \operatorname{Im}(l') \quad \text{et} \quad \operatorname{Re}(l) \operatorname{Im}(l') + \operatorname{Im}(l) \operatorname{Re}(l').$$

La suite uv converge donc vers ll' . □

Pas d'ordre sur les suites complexes

N'ayant pas d'ordre agréable sur \mathbb{C} , nous n'avons donc pas défini la croissance d'une suite de nombres complexes, et le principe des gendarmes ou le théorème de la limite monotone par exemple sont inutilisables dans \mathbb{C} . Cela dit, on peut se ramener au cas réel en évaluant $|u_n - l|$ (si on connaît l). On ne parle pas non plus de suites complexes adjacentes.

9.4

Théorème de Bolzano-Weierstrass complexe

Néanmoins, le théorème de Bolzano-Weierstrass est encore valable pour les suites complexes.

9.5

Relations de comparaison pour les suites complexes

On peut également définir des relations de comparaison sur $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

9.6

10. QUESTIONNAIRE 5 : SUITES

Dans ce qui suit, $u = (u_n)$, $v = (v_n)$ et $w = (w_n)$ désignent des suites réelles, l un réel.

- 1 Si A est une partie de \mathbb{R} , alors
 - a A admet des bornes supérieure et inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}$.
 - b $\inf A \leq \sup A$.
- 2 Si A est une partie non vide de \mathbb{R} , bornée, alors
 - a elle admet des bornes supérieure et inférieure.
 - b $\inf A \leq \sup A$.
 - c $\inf A < \sup A$.
 - d $\sup A \in A$.
 - e $\sup A \notin A$.
- 3 Si une suite réelle est minorée par 0 et non majorée, alors elle diverge vers $+\infty$.
- 4 Si uv converge, alors u ou v converge.
- 5 Si $|u|$ converge, alors u converge.
- 6 Si u et v admettent une limite, alors $u + v$ admet une limite.
- 7 Si u et w convergent, et si $u \leq v \leq w$, alors $\lim u \leq \lim v \leq \lim w$.
- 8 Si u ne tend pas vers $+\infty$, alors on peut en extraire une suite majorée.
- 9 Si u tend vers $+\infty$, alors on peut en extraire une suite croissante.
- 10 Si u est bornée, et si toutes ses sous-suites convergentes tendent vers un même réel, alors u est convergente.
- 11 Si $(u_{n+1} - u_n)$ tend vers 0, alors u est bornée.
- 12 Si u est croissante, majorée, non constante, alors elle converge vers un réel l , et $u_n < l$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 13 Si toutes les suites extraites de u convergent, la suite u converge-t-elle ?
- 14 Si pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, l'assertion $|u_n - l| \leq \varepsilon$ est vraie pour une infinité d'entiers naturels n , la suite u converge-t-elle vers l ?
- 15 La convergence de u vers l équivaut-elle à

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N) \Rightarrow \left(|u_n - l| \leq \frac{1}{N} \right) ?$$

- 16 Une suite convergente est-elle équivalente à toutes ses suites extraites ?
- 17 Si u tend vers 0 et si $u_{n+1} \sim u_n$, u est-elle équivalente à toutes ses suites extraites ?
- 18 Si $w \leq u \leq v$ et $w_n \sim v_n$, a-t-on $u_n \sim v_n$?
- 19 Si $u + v$ et uv convergent, u et v convergent-elles ?
- 20 Si $u_n \sim v_n$, a-t-on $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - v_n) = 0$?
- 21 Si φ et ψ sont deux applications de \mathbb{N} dans \mathbb{N} , et si u converge vers un réel non nul, a-t-on $u_{\varphi(n)} \sim u_{\psi(n)}$?
- 22 Si la suite de terme général $\sum_{k=0}^n u_k$ converge, la suite u converge-t-elle vers 0 ?
- 23 Si u tend vers 0, la suite de terme général $\sum_{k=0}^n u_k$ converge-t-elle ?
- 24 Si une suite complexe est bornée et croissante pour l'ordre lexicographique, est-elle convergente ?
- 25 Si une suite complexe est bornée et croissante pour un ordre total sur \mathbb{C} , est-elle convergente ?

11. FEUILLE DE TD 8 : NOMBRES RÉELS, SUITES NUMÉRIQUES

11.1. BORNE SUPÉRIEURE, CORPS DES NOMBRES RÉELS

Exercice 1 (Borne supérieure et suites)

0

Soit A une partie non vide de \mathbb{R} . Montrer l'existence d'une suite (a_n) d'éléments de A , de limite $\sup(A)$.

Exercice 2 (Caractérisation séquentielle de la densité)

1

Soit A une partie de \mathbb{R} . Montrer que A est dense dans \mathbb{R} si et seulement si pour tout réel x , il existe une suite d'éléments de A , de limite x .

Exercice 3 (Sous-groupes de \mathbb{R})

1

Soit G un sous-groupe de \mathbb{R} additif, non réduit à 0. Notons a la borne inférieure de $G \cap \mathbb{R}_+^*$. Montrer que si $a > 0$, alors $G = a\mathbb{Z}$ (on dit que G est *discret*). Montrer que si $a = 0$, alors G est dense dans \mathbb{R} (*i.e.* rencontre tout intervalle $] \alpha, \beta[$, où $\alpha < \beta$).

Exercice 4 (Automorphismes de corps classiques)

1

1 Montrer que tout endomorphisme du groupe $(\mathbb{Q}, +)$ est linéaire, *i.e.* de la forme $x \mapsto \alpha x$ pour un certain rationnel α .

2 Montrer que $\text{Id}_{\mathbb{Q}}$ est l'unique automorphisme du corps des nombres rationnels.

3 Montrer que $\text{Id}_{\mathbb{R}}$ est l'unique automorphisme du corps des nombres réels.

Exercice 5 (Caractérisation séquentielle des fermés de \mathbb{R})

2

Une partie U de \mathbb{R} est dite *ouverte* si pour tout élément u de U , il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]u - \varepsilon, u + \varepsilon[\subset U$. Une partie F de \mathbb{R} est dite *fermée* si son complémentaire dans \mathbb{R} est ouvert.

Montrer qu'une partie F de \mathbb{R} est fermée si et seulement si la limite de toute suite convergente d'éléments de F appartient à F .

Exercice 6 (Autour de la borne supérieure)

2

Soit A et B deux parties non vides de \mathbb{R} .

1 On suppose B bornée et A incluse dans B . Montrer que A et B admettent des bornes supérieures et inférieures (dans \mathbb{R}), et que

$$\inf(B) \leq \inf(A) \leq \sup(A) \leq \sup(B).$$

2 On suppose que, pour tout couple $(a, b) \in A \times B$, $a \leq b$. Montrer que A admet une borne supérieure, B une borne inférieure, et que $\sup(A) \leq \inf(B)$.

3 On suppose A et B majorées. On note $A + B$ l'ensemble des réels s'écrivant comme somme d'un élément de A et d'un élément de B . Montrer que $A + B$ admet une borne supérieure, et que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

11.2. CONVERGENCE, DIVERGENCE

Exercice 7 (Expression formelle de la convergence)

0

Soit l un réel, et (u_n) une suite réelle. Les assertions suivantes sont-elles équivalentes à la convergence de la suite (u_n) vers l ?

- 1 $\forall \varepsilon \in]0, 1[, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - l| \leq \varepsilon.$
- 2 $\forall \varepsilon > 1000, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - l| \leq \varepsilon.$
- 3 $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \llbracket 1000, +\infty[, \forall n \geq N, |u_n - l| \leq \varepsilon.$
- 4 $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - l| \leq \varepsilon.$
- 5 $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - l| < \varepsilon.$
- 6 $\exists N \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \geq N, |u_n - l| \leq \varepsilon.$

Exercice 8 (Étude élémentaire de convergence ou de divergence)

0

1 Étudier la convergence des suites suivantes : $u = (n - \sqrt{n^2 - n})_{n \in \mathbb{N}}$, $v = ((-1)^n + \frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $w = \left(\frac{n \sin(n)}{n^2 + 1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

2 On considère k réels A_1, \dots, A_k , avec $A_1 \geq A_2 \geq \dots \geq A_k \geq 0$. Évaluer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (A_1^n + \dots + A_k^n)^{\frac{1}{n}}$$

3 Étant donné x réel, étudier la suite indexée par \mathbb{N}^* , de terme général

$$u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n E(kx)$$

4 Montrer que la suite de terme général $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^2}$ ($n \in \mathbb{N}$) converge (on pourra considérer la suite de terme général $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$ ($n \geq 1$)).

5 Étudier la convergence de la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{E(\sqrt{k+1}) - E(\sqrt{k})}{k+1}.$$

6 Soit α un nombre irrationnel positif, et (p_n, q_n) une suite de couples d'entiers naturels non nuls, telle que $\lim_n \frac{p_n}{q_n} = \alpha$. Montrer que les suites (p_n) et (q_n) divergent vers $+\infty$.

Exercice 9 (Suite convergente d'entiers relatifs)

0

Montrer que toute suite de nombres entiers relatifs convergente est stationnaire.

Exercice 10 (Taux comparés)

0

Soient u et v deux suites à valeurs strictement positives, telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$. Montrer les implications suivantes :

$$(\lim v_n = 0 \Rightarrow \lim u_n = 0) \text{ et } (\lim u_n = +\infty \Rightarrow \lim v_n = +\infty).$$

Exercice 11 (Série harmonique)

1

Montrer que la suite de terme général $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ tend vers $+\infty$.

Exercice 12 (Théorème de Cesàro)

1

On considère une suite $u = (u_n)_{n \geq 1}$ et la suite des moyennes $v = (v_n)_{n \geq 1}$, de terme général

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$$

1 Montrer que si la suite u croît, il en est de même de v .

2 Montrer que si u tend vers une limite finie ou infinie $l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors v tend vers l (c'est le théorème de Cesàro).

3 Montrer, en donnant un contre-exemple, que la réciproque est fautive.

4 Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs, telle que la suite de terme général $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tende vers un réel λ . Montrer que la suite de terme général $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers λ .

Exercice 13 (Image des entiers par la fonction sinus)

3

1 Montrer que le sous-groupe $\mathbb{Z} + \pi\mathbb{Z}$ de \mathbb{R} est dense dans \mathbb{R} (on admettra que π est irrationnel). En déduire que la suite $(\sin(n))_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

2 Retrouver ce résultat par un raisonnement élémentaire.

Exercice 14 (Suite d'entiers naturels)

4

1 Montrer que si l'application $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est injective, alors la suite $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

2 Soit φ une permutation de \mathbb{N}^* telle que la suite $\left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)_n$ soit convergente. Que dire alors de $\lim_n \frac{\varphi(n)}{n}$?

11.3. RELATIONS DE COMPARAISON, COMPORTEMENT À L'INFINI

Exercice 15 (Équivalents simples)

0

Trouver des équivalents simples des suites de termes généraux $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, de $\frac{e^n + n!}{n+1}$, $\frac{e^n + e^{-n} + n}{\sqrt{n^2 + n} - n}$, $e^{n^2 + n! + \frac{1}{n}}$.

Exercice 16 (Équivalents et convergence)

0

1 Montrer que la suite de terme général $\frac{n+3 \sin(n)}{2n+(-1)^n}$ converge.

2 Montrer que la suite de terme général $\frac{E(\ln(n))}{\ln(n^2+n)}$ converge.

Exercice 17 (Algorithme de Babylone, ou de Héron d'Alexandrie)

1

On définit la suite $u = (u_n)$ par son terme initial $u_0 = \frac{5}{2}$, et la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{5}{u_n} \right)$$

Montrer que u converge vers une limite l que l'on calculera, et qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $\gamma \in]0, 1[$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < u_n - l < \alpha \left(\gamma^{(2^n)} \right)$$

Remarque : la vitesse de convergence est remarquable, on dit qu'elle est (au moins) *quadratique*. Nous reverrons cette suite dans un cadre plus général ultérieurement.

Exercice 18 (suite de Fibonacci)

1

On définit la *suite de Fibonacci*, (u_n) , par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, et :

$$\forall n > 1, \quad u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$$

1 Chercher les suites géométriques vérifiant la relation de récurrence (mais pas nécessairement les conditions initiales).

2 Grâce à la question précédente, trouver une fonction f telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = f(n)$.

3 En déduire un équivalent simple de (u_n) , et la limite de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Exercice 19 (Équivalent d'une suite)

2

Soit (u_n) une suite de réels de limite nulle et telle que

$$u_n + u_{n+1} \sim \frac{1}{n}.$$

1 Montrer que si l'on suppose (u_n) décroissante, alors $u_n \sim \frac{1}{2n}$.

2 Montrer que ce résultat peut tomber en défaut si l'on ne suppose plus (u_n) décroissante.

Exercice 20 (Équivalents plus durs)

2

Trouver des équivalents simples des suites de termes généraux $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$ et $\sum_{k=0}^n k!$.

Exercice 21 (Exemple de suite implicite)

2

1 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x + \ln(x) = n$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$ admet une unique solution, que nous noterons u_n .

2 Étudier la monotonie de (u_n) . En déduire la limite de cette suite.

3 Montrer que $u_n \sim n$.

4 Montrer que $u_n - n \sim -\ln(n)$.

Exercice 22 (Une autre suite implicite)

3

Soit $(u_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n^5 + nu_n = 1$. Étudier (u_n) . Donner un développement asymptotique à deux termes de u_n .

Exercice 23 (Une suite implicite avec tangente)

3

Si $n \in \mathbb{N}$, soit x_n la solution de $\tan x = x$ qui appartient à $[n\pi, n\pi + \pi/2[$. Donner un développement de x_n à la précision $1/n^2$.

11.4. SUITES EXTRAITES

Exercice 24 (Extraction d'une suite non majorée)

0

Montrer que toute suite réelle non majorée admet une suite extraite divergeant vers $+\infty$.

Exercice 25 (Extraction convergente d'une suite monotone)

0

Montrer qu'une suite monotone dont une suite extraite est convergente est elle-même convergente.

Exercice 26 (Suite extraite de suite extraite)

0

Soit $u = (u_n)$ une suite de réels, et soit $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite extraite de u : il existe donc $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $v_n = u_{\varphi(n)}$, pour tout entier naturel n . Soit $w = (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite extraite de v ($\forall n \in \mathbb{N}, w_n = v_{\psi(n)}$). Montrer que w est une suite extraite de u , et exprimer le terme général w_n de w en fonction de u , φ et ψ (et n).

Exercice 27 (De la convergence de sous-suites à la convergence)

2

Soit (u_n) une suite réelle. Montrer que si les suites extraites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent, alors u converge.

Exercice 28 (Infinité de sous-suites convergentes)

2

Donner un exemple de suite (u_n) divergente, telle que pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, la suite extraite $(u_{kn})_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

11.5. SUITES ADJACENTES

Exercice 29 (Critère spécial des séries alternées)

2

Soit $u = (u_n)$ une suite de réels positifs décroissante, de limite nulle. On pose, pour tout entier n :

$$v_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$$

1 Montrer que la suite $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi définie est convergente (on pourra montrer que les suites extraites (v_{2n}) et (v_{2n+1}) sont adjacentes).

2 Soit $l = \lim_n v_n$. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, |v_n - l| \leq u_{n+1}$.

Exercice 30 (Moyenne arithmético-géométrique)

3

Soit a, b deux réels, avec $0 < a \leq b$. On considère les suites u et v définies par $u_0 = a, v_0 = b$, et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

Montrer que u et v sont adjacentes. Leur limite commune est appelée *moyenne arithmético-géométrique* de a et b .

11.6. SUITE DE NOMBRES COMPLEXES

Exercice 31 (Théorème de Bolzano-Weierstrass complexe)

2

Énoncer et montrer un théorème de Bolzano-Weierstrass pour les suites complexes.

Exercice 32 (Suite récurrente complexe)

3

Soit (z_n) la suite complexe définie par son terme initial $z_0 \in \mathbb{C}$ et la relation de récurrence

$$z_{n+1} = \frac{1}{2} (z_n + |z_n|),$$

pour tout entier naturel n .

Étudier la convergence de (z_n) .

Espaces vectoriels

Sommaire

1. Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels	212
1.1. Espace vectoriel sur un corps	212
1.2. Sous-espaces vectoriels	213
2. Familles finies de vecteurs	217
2.1. Généralités, notion de combinaison linéaire	217
2.2. Familles génératrices	218
2.3. Familles libres	219
2.4. Bases	221
3. Applications linéaires	221
3.1. Définitions	221
3.2. Noyau et image d'une application linéaire	226
3.3. Applications linéaires et familles	227
3.4. Projecteurs et symétries	229
4. Questionnaire 6 : Espaces vectoriels	232
5. Feuille de TD 9 : Espaces vectoriels	233
5.1. Espaces vectoriels, première approche	233
5.2. Applications linéaires, première approche	234
5.3. Opérations sur les sous-espaces vectoriels	235
5.4. Endomorphismes d'un espace vectoriel	235
5.5. Projecteurs, symétries	236
5.6. Familles de vecteurs	237

L'algèbre linéaire est (de très loin) le plus important thème en algèbre cette année. Il est fréquent qu'un phénomène (physique, biologique, économique, etc.) soit modélisé – en première approximation – par des équations linéaires. Le concept de linéarité éclaire bien entendu beaucoup de théories mathématiques, aussi bien en algèbre (théorie des corps par exemple) qu'en analyse (voir le cours sur les équations différentielles).

Nous nous limitons au cas où le corps de base, noté \mathbb{K} , est \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Toutefois, on peut définir la notion d'espace vectoriel sur n'importe quel corps.

1. ESPACES VECTORIELS ET SOUS-ESPACES VECTORIELS

1.1. ESPACE VECTORIEL SUR UN CORPS

Définition (Espace vectoriel)

Soit E un ensemble muni d'une loi interne $+$ d'addition et d'une loi externe

$$\begin{aligned}\mathbb{K} \times E &\rightarrow E \\ (\lambda, x) &\mapsto \lambda \cdot x\end{aligned}$$

On dit que $(E, +, \cdot)$ est un *espace vectoriel* sur \mathbb{K} , ou un \mathbb{K} -*espace vectoriel*, si

- (1) $(E, +)$ est un groupe commutatif (son élément neutre, noté 0 ou $\vec{0}$ ou 0_E est appelé *vecteur nul*);
- (2) $\forall x \in E, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$;
- (3) $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;
- (4) $\forall x \in E, 1 \cdot x = x$;
- (5) $\forall (x, y) \in E^2, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$

Les éléments de E sont appelés *vecteurs* et ceux de \mathbb{K} sont appelés *scalaires*.

1.a

Pour aller plus vite, on dit parfois (en fait très souvent) que E est un espace vectoriel sur \mathbb{K} . De même, s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le corps de base \mathbb{K} , on dit que E est un espace vectoriel. Il ne faut pas oublier cependant qu'on ne peut parler d'espace vectoriel si on ne dispose pas de corps de base (également appelé *corps des scalaires*).

Bien que la notion d'espace vectoriel fasse appel à celle de corps (et donc à celles de groupe et d'anneau), elle est bien plus simple à étudier, dans la mesure où l'on arrivera assez facilement à décrire les espaces vectoriels à isomorphisme près.

Dans la pratique, on ne montrera pour ainsi dire jamais qu'un ensemble structuré est un espace vectoriel en revenant à cette définition, mais en prouvant qu'il est un *sous-espace vectoriel* d'un « plus gros » espace vectoriel : c'est pourquoi les exemples généraux suivants sont fondamentaux.

Exemple (Espaces vectoriels)

- (1) \mathbb{K} est un \mathbb{K} -espace vectoriel.
- (2) \mathbb{C} est un \mathbb{R} -espace vectoriel.
- (3) \mathbb{K}^n est un \mathbb{K} -espace vectoriel.
- (4) L'ensemble des vecteurs du plan (et de l'espace) constitue un espace vectoriel sur \mathbb{R} .
- (5) Si X est un ensemble, $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel pour les opérations naturelles.
- (6) L'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites d'éléments de \mathbb{K} est un \mathbb{K} -espace vectoriel.
- (7) Plus généralement, et c'est l'exemple à retenir, si E est un \mathbb{K} -espace vectoriel, et X un ensemble quelconque, alors $\mathcal{F}(X, E)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

i

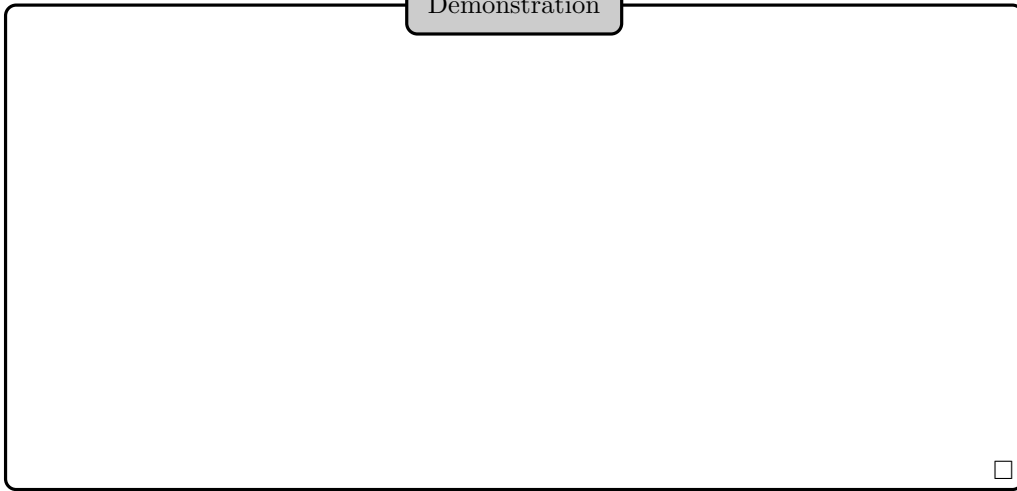
Proposition (Calculs dans un espace vectoriel)

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Pour tous $\alpha \in \mathbb{K}$ et $x \in E$, on a :

- (1) $0_K \cdot x = 0_E$.
- (2) $\alpha 0_E = 0_E$.
- (3) $-(\alpha x) = \alpha(-x) = (-\alpha)x$.
- (4) $\alpha x = 0_E \Rightarrow (\alpha = 0 \vee x = 0_E)$.

1.a

Démonstration



Définition (Espace vectoriel produit)

Si E et F sont des espaces vectoriels sur \mathbb{K} , il en est de même pour $E \times F$ muni des lois naturelles. Cet espace vectoriel est appelé *espace vectoriel produit* (de E par F).

1.b

On peut retrouver ainsi le fait que \mathbb{K}^n soit un \mathbb{K} -espace vectoriel. Dans la suite, sauf mention contraire, E désignera un \mathbb{K} -espace vectoriel.

1.2. SOUS-ESPACES VECTORIELS

Définition (Sous-espace vectoriel)

Soit E' une partie de E . On dit que E' est un *sous-espace vectoriel* de E si E' est

- (1) stable par somme ;
- (2) stable par la loi de multiplication par un scalaire ;
- (3) E' , muni de ces lois, est un espace vectoriel.

1.c

Exemple (Sous-espaces vectoriels)

- (1) $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E , appelés sous-espaces vectoriels *triviaux* de E .
- (2) Si G est un sous-espace vectoriel de F et F un sous-espace vectoriel de E , alors G est un sous-espace vectoriel de E . Plus généralement, la relation « être un sous-espace vectoriel de » est une relation d'ordre dans l'« ensemble » des \mathbb{K} -espaces vectoriels.
- (3) \mathbb{R} est un sous-espace vectoriel du \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{C} , mais c'est loin d'être le seul.
- (4) Si F est un sous-espace vectoriel de E , alors $\mathcal{F}(X, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(X, E)$.
- (5) $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, lui-même sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- (6) On a vu des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

ii

Proposition (Caractérisations des sous-espaces vectoriels)

Soit F une partie non vide de E . Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (1) F est un sous-espace vectoriel de E .
- (2) $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times F, \lambda x \in F$ et $\forall x, y \in F, x + y \in F$.
- (3) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (x, y) \in F^2, \lambda x + \mu y \in F$.

1.b

Démonstration

□

Un sous-espace vectoriel de E n'est donc rien d'autre qu'une partie non vide de E stable par combinaison linéaire. On peut noter qu'un sous-espace vectoriel de E comprend nécessairement 0_E , mais que cette condition n'est pas suffisante.

Exercice (Structure d'espace vectoriel)

Faire l'exercice 2 de TD.

1

Proposition (Intersection de sous-espaces vectoriels)

Une intersection quelconque de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E .

1.c

Démonstration

□

Exercice (Union de deux sous-espaces vectoriels)

Faire l'exercice 9 de TD.

2

Définition (Sous-espace vectoriel engendré par une partie)

Soit A une partie de E . il existe un plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A (pour la relation d'inclusion). On l'appelle *sous-espace vectoriel engendré par A* (ou par les éléments de A) et on le note $\text{Vect } A$ ou $\text{Vect}(A)$.
On définit de même un sous-espace vectoriel $\text{Vect}(x_i)_{i \in I}$ engendré par une famille $(x_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E .

1.d

Exemple (Sous-espace vectoriel engendré par une partie)

- (1) Le sous-espace engendré par \emptyset (dans E) est $\{0_E\}$.
- (2) Le sous-espace vectoriel réel de \mathbb{C} engendré par $\{1\}$ (resp. i) est \mathbb{R} (resp. $i\mathbb{R}$).
- (3) Le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ engendré par les fonctions s'annulant au moins une fois est $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

iii

Définition (Droite et plan vectoriels)

Si a est un vecteur non nul de E , alors

$$\text{Vect}\{a\} (= \text{Vect}(a) = \mathbb{K}a = \{\lambda a, \lambda \in \mathbb{K}\})$$

s'appelle la *droite vectorielle engendrée par a* .

Si a et b sont deux vecteurs non colinéaires de E (i.e. aucun ne peut s'exprimer comme multiple de l'autre par un scalaire), alors $\text{Vect}\{a, b\}$ est le *plan vectoriel* engendré par a et b .

1.e

Définition (Somme de sous-espaces vectoriels)

Soit E un espace vectoriel. Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E . La *somme* $F_1 + F_2$ de F_1 et F_2 est l'ensemble

$$\{x_1 + x_2, (x_1, x_2) \in F_1 \times F_2\}$$

C'est un sous-espace vectoriel de E .

1.f

La somme remplace l'union

$F_1 + F_2$ est donc le plus petit espace vectoriel contenant $F_1 \cup F_2$: c'est $\text{Vect}(F_1 \cup F_2)$.

1.1

Cette définition se généralise facilement à un nombre fini de sous-espaces vectoriels. En fait, elle se généralise même à toute famille $(F_i)_{i \in I}$ de sous-espaces vectoriels de E . La somme $\sum_{i \in I} F_i$ est alors $\text{Vect}(\cup_{i \in I} F_i)$.

Définition (Somme directe)

Soit F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E . On dit que F_1 et F_2 sont en *somme directe* si $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$. Dans ce cas, la somme $F_1 + F_2$ peut également se noter $F_1 \oplus F_2$.

1.g

Plus généralement, on dit que la somme $F_1 + \dots + F_p$ de sous-espaces vectoriels de E est *directe* si l'application

$$S : F_1 \times \dots \times F_p \rightarrow E \\ (x_1, \dots, x_p) \mapsto x_1 + \dots + x_p$$

est injective, et on note alors $\oplus_{i \in [1, p]} F_i$ leur somme.

Dans le cas où $p = 2$, cette nouvelle définition équivaut bien à la première. Cependant, on peut trouver trois sous-espaces vectoriels F_1, F_2, F_3 d'un espace vectoriel E qui sont en somme directe deux à deux, mais qui ne sont pas en somme directe.

Définition (Sous-espaces vectoriels supplémentaires)

Deux sous-espaces vectoriels F et F' de E sont dits *supplémentaires* si $F \oplus F' = E$.

1.h

F et F' sont donc supplémentaires dans E si et seulement si $F + F' = E$ et $F \cap F' = \{0\}$.

On peut montrer (nous le ferons dans le cas de la dimension finie plus tard) que tout sous-espace vectoriel admet un supplémentaire, *qui n'est presque jamais unique* (seul un sous-espace vectoriel trivial a un supplémentaire unique).

Ne pas confondre *supplémentaire* et *complémentaire* (cette dernière notion n'a pas d'intérêt dans le cadre des espaces vectoriels, car le complémentaire d'un sous-espace vectoriel n'est jamais un sous-espace vectoriel).

Proposition (Caractérisation de la supplémentarité)

Deux sous-espaces vectoriels F et F' de E sont supplémentaires si et seulement si chaque vecteur x de E s'exprime de façon unique sous la forme $x = x_F + x_{F'}$, où x_F et $x_{F'}$ sont des vecteurs respectifs de F et F' .

1.d

Démonstration

□

Exemple (Sous-espaces supplémentaires)

- (1) $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i = \mathbb{C}$.
- (2) Avec des notations évidentes, $\mathcal{P} \oplus \mathcal{I} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

iv

Exercice (Supplémentarité dans l'espace des suites convergentes)

Faire l'exercice 11 de TD.

3

2. FAMILLES FINIES DE VECTEURS

2.1. GÉNÉRALITÉS, NOTION DE COMBINAISON LINÉAIRE

Définition (Sous-famille, surfamille)

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E . On appelle *sous-famille* de $(x_i)_{i \in I}$ toute famille d'éléments de E obtenue par restriction de la famille $(x_i)_{i \in I}$ (vue en tant qu'application de I dans E). On appelle *surfamille* de $(x_i)_{i \in I}$ toute famille dont $(x_i)_{i \in I}$ est une sous-famille.

2.a

Définition (Combinaison linéaire)

Soit E un espace vectoriel. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et n vecteurs x_1, \dots, x_n (non nécessairement distincts). Une *combinaison linéaire* des vecteurs x_1, \dots, x_n (ou de la famille (x_1, \dots, x_n)) est une expression du type

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$$

pour certains scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (ou famille de scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$). On parle de combinaison linéaire des vecteurs x_1, \dots, x_n (ou de la famille (x_1, \dots, x_n)) avec les coefficients $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (ou la famille de coefficients $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$).

On dit qu'une combinaison linéaire est à *résultat nul* si le vecteur somme est le vecteur nul.

On dit qu'une combinaison linéaire est *triviale* si tout coefficient est nul.

2.b

Une combinaison linéaire triviale est à résultat nul, mais la réciproque est fautive :

Exemple (Combinaison linéaire)

Chaque vecteur du \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{C} s'exprime sous une forme unique comme combinaison linéaire des vecteurs 1 et i (mais aussi $1 + i$ et $1 - i$ par exemple). Cela revient d'ailleurs à observer que \mathbb{R} et $\mathbb{R}i$ sont supplémentaires dans \mathbb{C} (de même, $\mathbb{R}(1 + i) \oplus \mathbb{R}(1 - i) = \mathbb{C}$).

i

Combinaison linéaire d'une famille infinie de vecteurs

Supposons que $\mathcal{F} = (x_i)_I$ soit une famille infinie de vecteurs de E (*i.e.* I est infini). On peut définir la notion de combinaison linéaire de vecteurs de cette famille : il s'agit d'une combinaison d'une sous-famille finie de \mathcal{F} , ou si l'on préfère, une expression de la forme

$$\sum_{i \in I} \lambda_i x_i,$$

où la famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ de scalaires est à support fini, *i.e.* le *support*

$$\{i \in I, \lambda_i \neq 0\}$$

de cette famille est un ensemble fini.

Pourquoi s'être imposé des familles à support fini ? Une première raison évidente est qu'il nous fallait donner un sens à $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i$, ce qui poserait des problèmes insurmontables si une infinité de scalaires n'étaient pas nuls.

Nous verrons une autre raison à la section suivante.

2.1

2.2. FAMILLES GÉNÉRATRICES

Proposition (Sous-espace engendré par une famille finie)

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$. On a :

$$\text{Vect}(x_1, \dots, x_n) = \{y \in E, \exists(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, y = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\}$$

2.a

Démonstration

□

Exemple (Sous-espaces engendrés par une partie)

- (1) (1) engendre le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{R} , (1) engendre le \mathbb{C} -espace vectoriel \mathbb{C} et (1) n'engendre pas le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{C} .
- (2) Une famille de deux vecteurs de \mathbb{R}^2 , non colinéaires, engendre \mathbb{R}^2 .
- (3) Une famille de trois vecteurs non coplanaires de \mathbb{R}^3 engendre cet espace vectoriel.
- (4) Cependant, une famille de trois vecteurs non colinéaires deux à deux de \mathbb{R}^3 n'engendre pas toujours \mathbb{R}^3 :

ii

Sous-espace engendré par une famille infinie

En fait, le résultat précédent se généralise à une famille quelconque $(x_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E : $\text{Vect}(x_i)_{i \in I}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de $(x_i)_{i \in I}$ (même si la famille est infinie). Voici une autre raison pour laquelle il était intéressant de définir ainsi la notion de combinaison linéaire d'une famille infinie.

Par exemple, considérons les suites partout nulles sauf en un indice où elles valent 1. Quel sous-espace vectoriel engendrent-elles ?

2.2

Définition (Famille génératrice)

On considère une famille $\mathcal{F} = (x_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E . On dit que la famille \mathcal{F} (ou que la partie $\{x_1, \dots, x_p\}$) est *génératrice* (dans E) si

$$\text{Vect}(x_i)_{i \in I} = E$$

On dit aussi que \mathcal{F} engendre E .

On définit également la notion de *partie génératrice*.

2.c

Ainsi, (x_1, \dots, x_n) est génératrice (de E) si et seulement si tout vecteur y de E s'exprime (d'au moins une manière) comme combinaison linéaire de vecteurs de cette famille :

$$\forall y \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \quad y = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i$$

Toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice :

Exercice (Suppression d'un vecteur dans une famille génératrice)

Soit $x_1, \dots, x_{p+1} \in E$. Montrer que si x_{p+1} est combinaison linéaire de x_1, \dots, x_p , alors $\text{Vect}(x_1, \dots, x_{p+1}) = \text{Vect}(x_1, \dots, x_p)$.

4

2.3. FAMILLES LIBRES

Définition (Famille libre, famille liée)

On dit que la famille (x_1, \dots, x_p) (où $p \in \mathbb{N}^*$) de vecteurs de E est *libre*, ou encore que les vecteurs x_1, \dots, x_p sont *linéairement indépendants*, si toute combinaison linéaire de (x_1, \dots, x_p) à résultat nul est triviale, *i.e.* :

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \quad \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i = 0_E \right) \Rightarrow (\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \lambda_i = 0).$$

On dit que la famille (x_1, \dots, x_p) est *liée*, ou encore que les vecteurs x_1, \dots, x_p sont *linéairement dépendants*, si (x_1, \dots, x_p) n'est pas libre, *i.e.* s'il existe une combinaison linéaire non triviale de (x_1, \dots, x_p) à résultat (pourtant) nul :

$$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p - \{(0, \dots, 0)\}, \quad \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i = 0_E$$

(*i.e.* il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, non tous nuls, tels que $\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i = 0$).

Une telle combinaison linéaire est appelée *relation de liaison* des vecteurs x_1, \dots, x_p .

2.d

Ne pas se mélanger les pinceaux : pour n'importe quelle famille de vecteurs, la combinaison linéaire triviale est à résultat nul (la notion de famille libre est tout de même plus intéressante que cela ...)

Ne pas confondre non tous nuls et tous non nuls : par exemple, la famille $((1, 1), (0, 0))$ est liée.

Toute sous-famille d'une famille libre est libre. Autrement dit, toute surfamille d'une famille liée est liée.

Proposition (Caractérisation des familles liées)

Une famille (x_1, \dots, x_p) de vecteurs est liée si et seulement si l'un (au moins) de ses vecteurs peut s'exprimer comme combinaison linéaire des autres (de l'autre si $p = 2$).

2.b

Démonstration

□

Proposition (Caractérisation des familles libres)

La famille (x_1, \dots, x_p) est libre si et seulement si tout vecteur de E s'exprime d'une plus une manière comme combinaison linéaire de (x_1, \dots, x_p) .

2.c

Démonstration

□

Exemple (Familles libres ou liées)

- (1) Une famille constituée d'un unique vecteur est libre si et seulement si ce vecteur n'est pas nul.
- (2) Toute famille comprenant le vecteur nul (resp. dans laquelle un même vecteur apparaît deux fois) est liée.
- (3) $(1, i)$ dans \mathbb{C} vu en tant que \mathbb{R} puis \mathbb{C} -espace vectoriel est libre puis liée.
- (4) Deux vecteurs forment une famille liée si et seulement si ils sont colinéaires.

iii

Une famille infinie \mathcal{F} est dite *libre* si toutes ses sous-familles finies le sont. Cela revient à dire que toute combinaison linéaire de vecteurs de \mathcal{F} à résultat nul est triviale.

Exercice (Des exemples simples de liberté)

1 Soit $v_1 = (1, 2, 3, 0), v_2 = (0, 3, 5, 1), v_3 = (0, 0, 0, 7)$. Montrer que (v_1, v_2, v_3) est une famille libre de vecteurs de \mathbb{R}^4 .

2 Soit (x_1, \dots, x_p) une famille libre de vecteurs de E (où $p \geq 2$). Montrer que $(x_1, x_2 + x_1, \dots, x_p + x_1)$ est libre. Généraliser cet exemple. La famille $(x_1 - x_p, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_p - x_{p-1})$ est-elle libre ?

5

Exercice (Liberté de familles)

Répondre à quelques questions de l'exercice 24 de TD.

6

2.4. BASES

Définition (Base)

Une famille de vecteurs de E est une *base* (de E) si elle est libre et génératrice (dans E).

2.e

On traite dans ce cours le cas des familles finies.

Exemple (Base)

- (1) Quelles sont les bases d'une droite vectorielle ? du plan, de l'espace ?
- (2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose $e_i = (\delta_{i,j})_{1 \leq j \leq n}$. La famille (e_1, \dots, e_n) est une base de \mathbb{K}^n , appelée *base canonique* de \mathbb{K}^n .

iv

La famille (x_1, \dots, x_p) est une base de E si et seulement si tout vecteur x de E s'exprime de façon unique comme combinaison linéaire de la famille (x_1, \dots, x_p) , i.e. :

$$\forall y \in E, \exists!(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \quad y = \sum_{k=1}^p \lambda_k x_k.$$

Dans ce contexte, les λ_i sont les *coordonnées* (ou *composantes*) de y dans la base (x_1, \dots, x_p) . Plus précisément, λ_i est la composante de y dans (x_1, \dots, x_p) selon x_i .

Exercice (Bases)

Soit $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_n)$ une base de E (où $n \geq 2$). Montrer que $(x_1, x_2 + x_1, \dots, x_n + x_1)$ est une base de E . Expliquer pourquoi aucune sous-famille stricte de \mathcal{B} ne peut être une base (de E). Même question avec une surfamille stricte.

7

3. APPLICATIONS LINÉAIRES

3.1. DÉFINITIONS

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels.

Définition (Application linéaire)

Une application $\phi : E \rightarrow F$ est dite *linéaire* (ou \mathbb{K} -*linéaire*), ou on dit que c'est un *morphisme (d'espaces vectoriels)* si :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$$

et

$$\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E, \quad \phi(\lambda x) = \lambda \phi(x)$$

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F .

Une application linéaire d'un espace vectoriel E dans lui-même est appelée un *endomorphisme*. On note leur ensemble $\mathcal{L}(E)$.

On appelle *isomorphisme* de E sur F toute application linéaire bijective de E sur F .

On appelle *automorphisme* de E tout endomorphisme bijectif de E . Leur ensemble est noté $\text{GL}(E)$.

3.a

Proposition (Caractérisation de la linéarité)

$\phi : E \rightarrow F$ est linéaire si et seulement si

$$\forall (x, y) \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \phi(\lambda x + \mu y) = \lambda \phi(x) + \mu \phi(y)$$

3.a

Démonstration

□

Si ϕ est linéaire, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$:

$$\phi \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \phi(x_k).$$

L'image du vecteur nul par une application linéaire est le vecteur nul. Ainsi, une application n'envoyant pas 0_E sur 0_F ne peut être linéaire. Cette condition nécessaire pour être linéaire est loin d'être suffisante :

Exemple (Applications linéaires)

- (1) L'application nulle $f : x \in E \mapsto 0_F$ montre qu'entre deux \mathbb{K} -espaces vectoriels, il existe toujours un morphisme.
- (2) L'application identité Id_E est un automorphisme de E .
- (3) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. L'application $x \in E \mapsto \lambda x$, appelée *homothétie de rapport* λ dans (ou de) E , est un endomorphisme de E .
- (4) La dérivation $\mathcal{C}^1(I) \rightarrow \mathcal{C}^0(I), f \mapsto f'$ est linéaire.
- (5) Soit $g \in \mathbb{R}^I$. L'application $f \mapsto gf$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel \mathbb{R}^I . Pour quelles fonctions g est-ce également un endomorphisme de l'anneau \mathbb{R}^I ?
- (6) Soit I un intervalle et $a \in I$. L'application $\varphi : \mathbb{R}^I \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto f(a)$ est un morphisme d'espaces vectoriels (et d'anneaux), appelé morphisme d'évaluation en a .
- (7) Si $f : E \rightarrow F$ et $g : E \rightarrow G$ sont linéaires, alors $\varphi : E \rightarrow F \times G, x \mapsto (f(x), g(x))$ est linéaire.
- (8) Les translations dans le plan ou l'espace sont-elles linéaires ?

i

Exercice (Exemples d'applications linéaires, ou pas)

Faire l'exercice 4 de TD. On pourra y revenir tout au long de ce cours, pour trouver de nouvelles démonstrations de linéarité.

8

Proposition (Espace des applications linéaires sur un espace vectoriel)

L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ est muni d'une structure naturelle d'espace vectoriel.

3.b

Démonstration

Montrons que $\mathcal{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de F^E :

□

Proposition (Composée d'applications linéaires)

La composée licite $v_0 \circ u_0$ ($u_0 \in \mathcal{L}(E, F), v_0 \in \mathcal{L}(F, G)$) de deux applications linéaires est linéaire

3.c

Démonstration

□

Proposition (Bijection réciproque d'un isomorphisme d'espaces vectoriels)

La bijection réciproque d'une application linéaire bijective est linéaire.

3.d

Démonstration

□

Proposition (La composition par une application linéaire donnée est linéaire)

Soit E, F, G trois \mathbb{K} -espaces vectoriels, $u_0 \in \mathcal{L}(E, F)$, $v_0 \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors les applications

$$\begin{array}{ccc} \varphi : \mathcal{L}(F, G) & \rightarrow & \mathcal{L}(E, G) \\ v & \mapsto & v \circ u_0 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \psi : \mathcal{L}(E, F) & \rightarrow & \mathcal{L}(E, G) \\ u & \mapsto & v_0 \circ u \end{array}$$

sont linéaires, *i.e.*

$$\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(F, G), \mathcal{L}(E, G)) \text{ et } \psi \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E, F), \mathcal{L}(E, G))$$

3.e

Démonstration

□

La composition dans $\mathcal{L}(E)$ est donc bilinéaire. $\mathcal{L}(E)$ est un ensemble très structuré : c'est un espace vectoriel, muni de la composition qui est bilinéaire, associative, et possède un élément neutre ($(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est donc un anneau). On dit que $(\mathcal{L}(E), +, \cdot, \circ)$ est une \mathbb{K} -algèbre (hors-programme). On note souvent la composition multiplicativement (fg désigne $f \circ g$, et $f^2 = f \circ f$ par exemple).

Si f et g sont deux endomorphismes d'un espace vectoriel E , on peut calculer $(f+g)^n$. Si f et g commutent, la formule de Newton est valable. En particulier, c'est le cas si f ou g est une homothétie.

Cependant, en général, deux endomorphismes d'un même espace vectoriel ne commutent pas. Donner quelques exemples :

De même, on prendra garde avant d'appliquer la formule de Bernoulli.

De même, on fera attention au fait que $\mathcal{L}(E)$ admet presque toujours des diviseurs de zéro :

Exercice (Exemple d'élément nilpotent non nul)

Faire l'exercice 7 de TD.

9

Proposition (Groupe linéaire)

$\text{GL}(E)$ est un groupe pour la loi de composition des applications.

3.f

Démonstration

Montrons que $\text{GL}(E)$ est un sous-groupe de \mathcal{S}_E :

□

Définition (Groupe linéaire)

Le groupe $\text{GL}(E)$ est appelé *groupe linéaire* de E .

3.b

En général, ce groupe n'est pas commutatif :

Définition (Forme linéaire)

Soit E un espace vectoriel sur un corps \mathbb{K} . On appelle *forme linéaire* une application linéaire de E dans le corps des scalaires \mathbb{K} .

3.c

Exemple (Formes linéaires)

- (1) L'évaluation en a (où $a \in I$) est une forme linéaire sur \mathbb{R}^I .
- (2) Le produit scalaire ou le déterminant (un seul vecteur varie, le ou les autres sont fixés) dans le plan ou dans l'espace est une forme linéaire.
- (3) L'application qui à une suite réelle convergente associe sa limite est une forme linéaire.

ii

3.2. NOYAU ET IMAGE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

Proposition (Image directe ou réciproque d'un sous-espace vectoriel par un morphisme)

Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Pour tout sous-espace vectoriel E' de E , l'image $f(E')$ de E' par f est un sous-espace vectoriel. Pour tout sous-espace vectoriel F' de F , l'image réciproque $f^{-1}(F')$ est un sous-espace vectoriel de E .

3.g

Démonstration

□

C'est une façon élégante et trop souvent oubliée de prouver qu'un ensemble est un (sous-)espace vectoriel. On pourra à ce sujet revenir sur l'exercice 4 de TD.

Définition (Noyau et image d'une application linéaire)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Le *noyau* de f , noté $\text{Ker}(f)$, est $f^{-1}(\{0_F\})$. L'*image* de f est $f(E)$, noté $\text{Im}(f)$.

3.d

Le noyau de f est un sous-espace vectoriel de E , l'image de f est un sous-espace vectoriel de F .

Exercice (Noyau et image d'un morphisme d'évaluation)

Soit $a \in I$, $\varphi : f \in \mathbb{R}^I \mapsto f(a)$. Donner le noyau et l'image de φ .

10

Exercice (Supplémentaires d'un hyperplan)

Faire l'exercice 13 de TD.

11

Proposition (Caractérisation de l'injectivité par le noyau)

Un morphisme est injectif si et seulement si son noyau est réduit au vecteur nul.

3.h

Démonstration

□

3.3. APPLICATIONS LINÉAIRES ET FAMILLES

Soit E et F deux espaces vectoriels sur \mathbb{K} , $f \in \mathcal{L}(E, F)$, et $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_p) \in E^p$. On note (abusivement) $f(\mathcal{F})$ la famille $(f(x_1), \dots, f(x_p))$.

Proposition (Applications linéaires et familles génératrices)

On suppose \mathcal{F} génératrice dans E . La famille $f(\mathcal{F})$ engendre alors $\text{Im } f$. En particulier, si f est surjective, la famille $f(\mathcal{F})$ engendre F .

3.i

Démonstration

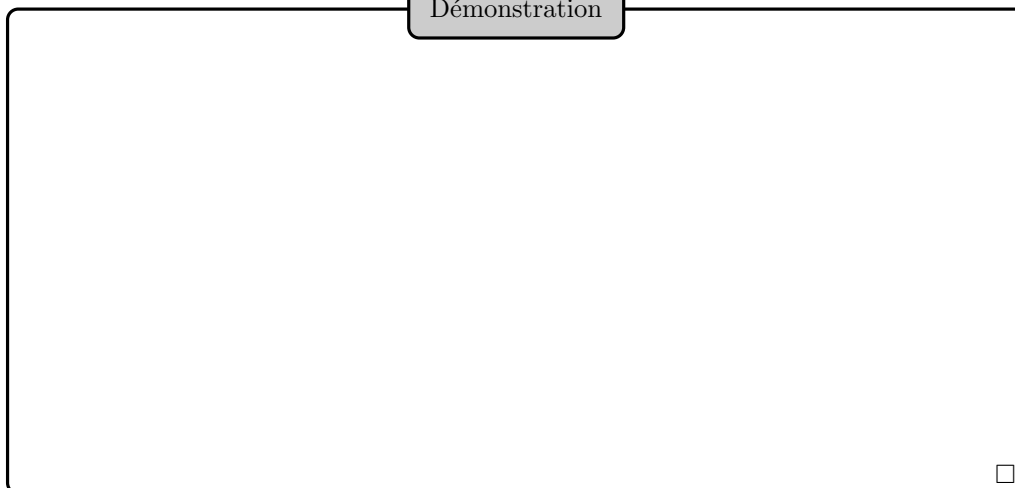
□

Proposition (Applications linéaires et liberté)

- (1) Si la famille \mathcal{F} est liée, alors $f(\mathcal{F})$ est liée.
- (2) Si la famille $f(\mathcal{F})$ est libre, alors \mathcal{F} est libre.
- (3) Si f est injective, et si \mathcal{F} est libre, alors $f(\mathcal{F})$ est libre.

3.j

Démonstration



Voici un résultat fondamental, prouvant que l'on peut construire des morphismes entre espaces vectoriels avec facilité et souplesse :

Proposition (Application linéaire et image d'une base)

On suppose E muni d'une base $(e_i)_{i \in I}$. Pour toute famille $(v_i)_{i \in I}$ de vecteurs de F , il existe une unique application linéaire f de E dans F telle que $\forall i \in I, f(e_i) = v_i$.

3.k

Démonstration

Ne traiter que le cas de familles finies : $I = \llbracket 1, n \rrbracket$. Procéder par analyse-synthèse.

Définition d'un morphisme par image d'une base

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$. L'application linéaire φ est entièrement déterminée par l'image d'une base de E . Est-elle entièrement déterminée par l'image d'une famille génératrice ? Oui !

En revanche, pour se donner (*i.e.* définir légitimement) une application linéaire, il suffit de donner l'image d'une base. Si on donne l'image d'une famille génératrice, il se peut que l'application ne soit pas définie ! Donner un exemple :

3.1

C'est (notamment) grâce à cette proposition que l'algèbre linéaire n'est pas si compliquée que cela. Cette proposition est à la base de la représentation des applications linéaires par des tableaux de nombres, les matrices.

De plus, en combinant les derniers résultats :

Proposition (Injectivité, surjectivité et image d'une base)

On reprend le contexte de la proposition précédente.

- (1) f est injective si et seulement si la famille $(v_i)_{i \in I}$ est libre.
- (2) f est surjective si et seulement si la famille $(v_i)_{i \in I}$ est génératrice dans F .
- (3) f est bijective si et seulement si la famille $(v_i)_{i \in I}$ est une base de F .

3.1

Corollaire (Isomorphisme et image d'une base)

f est un isomorphisme si et seulement si il envoie une base donnée de E sur une base de F si et seulement si il envoie toute base de E sur une base de F .

3.m

Exemple (Application linéaire définie par image d'une base)

La donnée d'une famille de p vecteurs (x_1, \dots, x_p) d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E détermine une application linéaire φ de \mathbb{K}^p dans E , envoyant la base canonique de \mathbb{K}^p sur cette famille.

Le noyau de cette application est l'ensemble des p -uplets de scalaires donnant une combinaison linéaire à résultat nul, l'image est $\text{Vect}(x_1, \dots, x_p)$.

φ est injective (resp. surjective) si et seulement si la famille (x_1, \dots, x_p) est libre (resp. génératrice).

iii

3.4. PROJECTEURS ET SYMÉTRIES

Définition (Projecteur vectoriel)

Soit E un espace vectoriel, et $\varphi : E \rightarrow E$ une application. On dit que φ est un *projecteur (vectoriel)* s'il existe deux sous-espaces vectoriels F et G de E , supplémentaires dans E , tels que pour tout $x \in E$, $\varphi(x) = x_F$, où on a écrit $x = x_F + x_G$ avec $(x_F, x_G) \in F \times G$. Plus précisément, φ est appelé *projecteur* sur F parallèlement à G .

3.e

Cette définition est bien licite par existence et unicité de la décomposition en question.

Illustration

Lemme (Linéarité des projecteurs)

Tout projecteur est linéaire.

3.n

Démonstration

□

Soit p un tel projecteur, sur F parallèlement à G . On a $\text{Im}(p) = F$ et $\text{Ker}(p) = G$. On a donc $E = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p)$. De plus, $\text{Im}(p)$ est l'ensemble des vecteurs invariants par p dans E , *i.e.* $\text{Im}(p) = \text{Ker}(p - \text{Id}_E)$.

Exemple (Projecteurs)

- (1) $0_{\mathcal{L}(E)}$ et Id_E sont des projecteurs de E , dits *triviaux*.
- (2) Les « projecteurs vectoriels géométriques » rencontrés en début d'année sont des projecteurs vectoriels en ce nouveau sens.
- (3) Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ on peut définir des projecteurs « partie paire » et « partie impaire ».

iv

Proposition (Caractérisation des projecteurs)

Soit p un endomorphisme de E . p est un projecteur si et seulement si $p \circ p = p$.

3.o

Démonstration

□

Définition (Symétrie vectorielle)

Soit E un espace vectoriel. On appelle *symétrie (vectorielle)* toute application de la forme $x = x_F + x_G \mapsto x_F - x_G$ (avec des notations évidentes). On parle alors de *symétrie par rapport à F , relativement à G* .

3.f

Soit s la symétrie par rapport à F , relativement à G , p le projecteur sur F parallèlement à G . On a :

$$s = 2p - Id_E,$$

donc s est un endomorphisme de E , et même un automorphisme involutif ($s^2 = Id_E$). On a

$$E = \text{Ker}(s - Id_E) \oplus \text{Ker}(s + Id_E).$$

Proposition (Caractérisation des symétries)

Soit s un endomorphisme de E . s est une symétrie si et seulement si $s \circ s = Id_E$.

3.p

Exercice (Projecteurs)

Faire l'exercice 23 de TD.

12

4. QUESTIONNAIRE 6 : ESPACES VECTORIELS

1 Soient u et v deux vecteurs distincts de \mathbb{R}^7 , et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^7)$, $g((1, 0)) = u$ et $g((0, 1)) = v$. Alors g est injective.

2 On considère une famille (x, y, z) de trois vecteurs de \mathbb{R}^4 .

a $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*$, $\text{Vect}(x, y, z) = \text{Vect}(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$;

b $\forall (\lambda, \mu) \in (\mathbb{R}^*)^2$, $\text{Vect}(x, y, z) = \text{Vect}(\lambda x + \mu y, \lambda y + \mu z, \lambda z + \mu x)$.

3 Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

a Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $F \cup G$ soit un sous-espace vectoriel de E ;

b Si $E \subset F + G$, alors $E = F + G$;

c $F + G = \{\lambda_F x_F + \lambda_G x_G, (x_F, x_G) \in F \times G \wedge (\lambda_F, \lambda_G) \in \mathbb{C}^2\}$;

d $F + G = \{\lambda_F x_F + \lambda_G x_G, (x_F, x_G) \in F \times G \wedge (\lambda_F, \lambda_G) \in \mathbb{R}^2\}$;

e Toute application $f : E \rightarrow E$ est un endomorphisme de E ;

f Il existe une application linéaire injective de F dans E ;

g Il existe une application linéaire surjective de F dans G .

h Si $u \in \mathcal{L}(E)$, alors $u(F + G) = u(F) + u(G)$.

4 Soit F, G, H trois espaces vectoriels d'un espace vectoriel E . On a :

$$(F + G) \cap H = (F \cap H) + (G \cap H).$$

5 Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$.

a La famille (x_1, \dots, x_n) est génératrice si et seulement si $\mathbb{K}x_1 + \dots + \mathbb{K}x_n = E$.

b La famille (x_1, \dots, x_n) est libre si et seulement si la somme $\mathbb{K}x_1 + \dots + \mathbb{K}x_n$ est directe.

c La famille (x_1, \dots, x_n) est une base si et seulement si la somme $E = \mathbb{K}x_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{K}x_n$.

6 Soit E et F deux \mathbb{R} -espaces vectoriels.

a Pour vérifier qu'une application $\varphi : E \rightarrow F$ est linéaire, il suffit de connaître les images par φ des vecteurs d'une base de E ;

b Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, et \mathcal{B}_F une base de F . Si chaque vecteur de \mathcal{B}_F admet (au moins) un antécédent par f , alors f est surjective;

c Soit x_F un vecteur de \mathcal{B}_F . Si x_F admet au plus un antécédent par f , alors f est injective (on ne dit rien sur les éventuels autres vecteurs de \mathcal{B}_F);

d Soit $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$. Pour vérifier que $f = g$, il suffit de le vérifier sur les vecteurs d'une base (resp. d'une famille génératrice, resp. d'une famille libre).

e Soit $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$. On a $\text{Im}(f + g) = \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$.

7 Soit A une partie d'un espace vectoriel E . A est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $\text{Vect}(A) = E$.

8 L'ensemble des projecteurs de E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

5. FEUILLE DE TD 9 : ESPACES VECTORIELS

\mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} , et E est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

5.1. ESPACES VECTORIELS, PREMIÈRE APPROCHE

Exercice 1 (Comment voir \mathbb{R}_+^* comme un \mathbb{R} -espace vectoriel)

0

On munit \mathbb{R}_+^* des lois \oplus et \otimes définies par $a \oplus b = ab$ et $\lambda \otimes a = a^\lambda$, pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, tout réel λ .
Montrer que $E = (\mathbb{R}_+^*, \oplus, \otimes)$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Exercice 2 (Structure d'espace vectoriel)

3

Dire si les objets suivants sont des espaces vectoriels pour les lois usuelles :

- (1) L'ensemble des fonctions réelles sur \mathbb{R} , de limite finie en $+\infty$;
- (2) L'ensemble des solutions (x_1, x_2, x_3) du système :
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 0. \end{cases}$$
- (3) L'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$ vérifiant $f(1/2) = 0$.
- (4) L'ensemble des fonctions sur $[a, b]$ dérivables, vérifiant $f(a) = 7f(b) + 2f'((a+b)/2)$.
- (5) L'ensemble des fonctions sur $[0, 1]$ admettant un point fixe.
- (6) L'ensemble des fonctions sur \mathbb{R} qui s'annulent en 0 ou en 4.
- (7) L'ensemble des suites réelles convergentes.
- (8) L'ensemble des suites réelles bornées.
- (9) L'ensemble des suites réelles négligeables devant (n) .
- (10) L'ensemble des polynômes de degré exactement n .
- (11) L'ensemble des polynômes de degré au plus n .
- (12) L'ensemble des fonctions de classe C^2 vérifiant $f'' + \omega^2 f = 0$.
- (13) L'ensemble des nombres complexes d'argument $\pi/4 + k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$).
- (14) L'ensemble des points (x, y) de \mathbb{R}^2 , vérifiant $\sin(x+y) = 0$.
- (15) L'ensemble des vecteurs (x, y, z) de \mathbb{R}^3 orthogonaux au vecteur $(-1, 3, -2)$.
- (16) L'ensemble des polynômes ne comportant pas de terme de degré 7.

Exercice 3 (Sous-espace vectoriel de $L(E)$)

3

Soit U un sous-espace vectoriel de E , et

$$A = \{f \in L(E) \mid U \subset \text{Ker}(f)\}.$$

Montrer que A est un sous-espace vectoriel de $L(E)$.

5.2. APPLICATIONS LINÉAIRES, PREMIÈRE APPROCHE

Exercice 4 (Exemples d'applications linéaires, ou pas)

0

Dire si les applications suivantes sont des applications linéaires :

- (1) $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 2x^2$.
- (2) $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 4x - 3$.
- (3) $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x^2}$.
- (4) $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (y, x)$.
- (5) $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) : f \mapsto \left(t \mapsto \frac{f(t)}{1+t^2} \right)$.
- (6) $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto 3x + 5y$.
- (7) $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \sqrt{3x^2 + 5y^2}$.
- (8) $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \sin(3x + 5y)$.
- (9) $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (-x, y)$.
- (10) $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto xy$.
- (11) $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : M \mapsto \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{V}$ où $\overrightarrow{V} = (4, -1, 1/2)$.
- (12) $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \mapsto (2x - 3y + z, x - y + z/3)$.
- (13) $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \ln(3^{x\sqrt{2}})$.

Exercice 5 (Composée, image et noyau)

0

Soient F et G deux \mathbb{K} -espaces vectoriels, $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications linéaires. Montrer que $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g \circ f)$ et $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$.

Exercice 6 (Importance du corps de base)

0

Soient f et g , applications de \mathbb{C} dans \mathbb{C} , définies par $f(z) = \bar{z}$ et $g(z) = \text{Re}(z)$. Montrer que f et g sont linéaires sur \mathbb{C} en tant que \mathbb{R} -espace vectoriel, et non linéaires sur \mathbb{C} en tant que \mathbb{C} -espace vectoriel

Exercice 7 (Exemple d'élément nilpotent non nul)

0

Donner un exemple d'endomorphisme non nul de carré nul (carré au sens de la composition, bien entendu).

Exercice 8 (Isomorphisme et équations différentielles)

1

Montrer que l'espace vectoriel des solutions réelles de $y'' - 3y' + 5y = 0$ est isomorphe à \mathbb{R}^2 .

5.3. OPÉRATIONS SUR LES SOUS-ESPACES VECTORIELS

Exercice 9 (Union de deux sous-espaces vectoriels)

0

Soit F, G deux sous-espaces vectoriels de E . Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 10 (Stabilité du noyau et de l'image par un élément du commutant)

1

Soient f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont stables par g . Montrer que l'implication réciproque peut être fausse.

Exercice 11 (Supplémentarité dans l'espace des suites convergentes)

2

Soit E l'espace vectoriel des suites réelles convergentes. Soit F le sous-espace vectoriel de E constitué des suites réelles convergeant vers 0, et G celui des suites constantes. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E .

Exercice 12 (Application somme)

2

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E . On définit l'application $f : F \times G \rightarrow E$ par $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

- 1 Montrer que f est linéaire.
- 2 Déterminer le noyau et l'image de f .

Exercice 13 (Supplémentaires d'un hyperplan)

2

Soit f une forme linéaire non nulle sur E . On fixe $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) \neq 0$, et on note $H = \text{Ker } f$. Montrer : $E = H \oplus \mathbb{K}x_0$.

5.4. ENDOMORPHISMES D'UN ESPACE VECTORIEL

Exercice 14 (Lorsque tout vecteur non nul est propre)

1

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que pour tout vecteur x de E , $f(x)$ est colinéaire à x . Montrer que f est une homothétie.

Exercice 15 (Polynôme annulateur)

1

- 1 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, vérifiant $f^3 + 2f + 5\text{Id}_E = 0$. Montrer que f est un automorphisme de E .
- 2 Soit f un endomorphisme de E , vérifiant l'identité $f^2 + f - 2\text{Id}_E = 0$. Établir $\text{Im}(f - \text{Id}_E) \subset \text{Ker}(f + 2\text{Id}_E)$, $\text{Im}(f + 2\text{Id}_E) \subset \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$, $E = \text{Ker}(f - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f + 2\text{Id}_E)$.
- 3 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^3 = f^2 + f$. Montrer que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$. Généraliser cet exemple

Exercice 16 (Commutant d'un endomorphisme)

1

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On introduit l'ensemble $\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E), f \circ g = g \circ f\}$, appelé *commutant* de f .

1 Montrer que $\mathcal{C}(f)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

2 Décrire $\mathcal{C}(f)$ lorsque f est un projecteur.

Exercice 17 (La nilpotence passe au crochet de Lie)

1

Soit u un endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel E . Montrer que $v \mapsto uv - vu$ est un endomorphisme nilpotent de $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 18 (Lorsque la somme des images est l'image de la somme)

2

Soit $(u, v) \in (\mathcal{L}(E))^2$, tel que $u^2 = u$ et $vu = 0$. Montrer que : $\text{Im}(u + v) = \text{Im}(u) + \text{Im}(v)$.

Exercice 19 (Supplémentarité et inverses unilatéraux (*Mines PSI 09*))

3

Soit E et F deux espaces vectoriels, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, E)$. On suppose que $v \circ u = \text{Id}_E$. Montrer : $\text{Ker } v \oplus \text{Im } u = F$.

Exercice 20 (Intersection de l'image et du noyau)

3

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

1 Montrer que $(\text{Ker } f^n)$ est croissante pour l'inclusion.

2 Montrer que $(\text{Im } f^n)$ est décroissante pour l'inclusion.

3 Montrer que $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = f(\text{Ker}(f^2))$.

5.5. PROJECTEURS, SYMÉTRIES

Exercice 21 (Projecteurs et puissances d'un endomorphisme)

1

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^2 + f - 2\text{Id}_E = 0$. On a vu $E = \text{Ker}(f - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f + 2\text{Id}_E)$. Montrer que le projecteur p sur $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ parallèlement à $\text{Ker}(f + 2\text{Id}_E)$ appartient à $\text{Vect}(\text{Id}_E, f)$. On pose $q = \text{Id}_E - p$. Expliquer en quoi p et q permettent de calculer les puissances de f .

Exercice 22 (Projecteurs)

3

Soit p et q deux projecteurs de E .

1 On suppose que $p \circ q = 0$. On note $r = p + q - q \circ p$. Montrer que r est un projecteur, de noyau $\text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q)$ et d'image $\text{Im}(p) \oplus \text{Im}(q)$.

2 Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si : $p \circ q = q \circ p = 0$.

3 On suppose que p et q commutent. Montrer que $p \circ q$ est le projecteur de E sur $\text{Im}(p) \cap \text{Im}(q)$ parallèlement à $\text{Ker}(p) + \text{Ker}(q)$.

Exercice 23 (Projecteurs de $\mathcal{L}(E)$)

3

Soit p et q deux projecteurs de E tels que $p \circ q = q \circ p = 0$,

$$\begin{array}{ccc} \Pi : \mathcal{L}(E) & \rightarrow & \mathcal{L}(E) \\ f & \mapsto & p \circ f \circ p \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \Theta : \mathcal{L}(E) & \rightarrow & \mathcal{L}(E) \\ f & \mapsto & q \circ f \circ q \end{array} .$$

Vérifier que Π et Θ sont des projecteurs de $\mathcal{L}(E)$, et que $\Pi \circ \Theta = \Theta \circ \Pi = 0$.

5.6. FAMILLES DE VECTEURS

Exercice 24 (Liberté de familles)

1

1 Montrer que si (u_1, u_2, u_3) est un triplet de vecteurs tous non nuls de \mathbb{R}^3 , orthogonaux deux à deux, alors (u_1, u_2, u_3) est libre.

2 La famille $(x \mapsto \cos(x + a))_{a \in \mathbb{R}}$ est-elle libre ?

3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et a_1, \dots, a_n des réels distincts deux à deux. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on introduit $P_i : x \mapsto \prod_{j=1, j \neq i}^n (x - a_j)$. Montrer que $(P_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est libre.

4 (*Mines MP 08, Mines MP 09*) Montrer que la famille des fonctions réelles de la variable réelle $t \mapsto |t - a|$, lorsque a décrit \mathbb{R} , est libre.

5 Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on définit $g_a : x \mapsto e^{ax} \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Montrer que $(g_a)_{a \in \mathbb{R}}$ est libre.

6 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $h_n : x \mapsto x^n \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Montrer que $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est libre.

7 Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on pose $u^m = (\sin(1/n^m))_{n \in \mathbb{N}^*}$. Montrer que $(u^m)_{m \in \mathbb{N}}$ est libre.

8 (*X MP 08*) Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(x^n)$. Montrer que la famille $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est libre.

9 (*X MP 08*) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La famille de fonctions

$$(x \mapsto \sin(nx), x \mapsto \sin((n-1)x) \cos(x), \dots, x \mapsto \sin(x) \cos((n-1)x))$$

est-elle libre ?

10 (*X MP 08*) Soit $f : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \ln(1+x)$. Montrer que $(f, f \circ f, f \circ f \circ f)$ est un système libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

Exercice 25 (Translation d'une famille libre (*Mines MP 08, X MP 08*))

3

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille libre de E et $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de scalaires. On pose $s = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$. Condition nécessaire et suffisante pour que $(u_i + s)_{1 \leq i \leq n}$ soit libre ?

Fonctions numériques

Sommaire

1. Préliminaires topologiques	240
2. Premières définitions	241
3. Étude locale d'une fonction	246
4. Limite et ordre	250
5. Opérations algébriques sur les limites	252
6. Limites et monotonie	254
7. Caractérisation séquentielle de la continuité	255
8. Fonctions continues sur un intervalle	256
8.1. Définition et premiers exemples	256
8.2. Le théorème des valeurs intermédiaires	258
8.3. Fonctions continues sur un segment	260
8.4. Réciproque d'une fonction continue strictement monotone	261
9. Uniforme continuité	261
10. Fonctions à valeurs complexes	263
11. Questionnaire 7 : Fonctions	266
12. Feuille de TD 10 : Fonctions numériques	267
12.1. Limites	267
12.2. Continuité	267
12.3. Fonctions lipschitziennes	269
12.4. Uniforme continuité	269

Dans ce chapitre, nous allons enfin définir avec rigueur des notions que vous employez depuis longtemps déjà, comme celle de continuité par exemple. Vous verrez notamment que cette notion est plus compliquée qu'il n'y paraît, et que l'analyse est pleine d'exemples contre-intuitifs : il existe par exemple des fonctions continues en tout irrationnel, et discontinues en tout rationnel (mais pas l'inverse!), des fonctions continues partout et dérivables nulle part, des fonctions dérivables strictement croissantes dont la dérivée est nulle sur une partie dense, etc.

La notion de limite (et donc celles de continuité, de dérivabilité) est une notion *locale* (on étudie *a priori* l'existence d'une limite en un point, et tout dépend de la conduite de la fonction au voisinage de ce point). D'une manière générale, il faudra bien distinguer les résultats locaux des résultats globaux.

On peut effectuer une analogie avec les suites : pour savoir si une suite admet une limite, on se moque totalement de ce qu'il se passe en un nombre fini d'indices. Ici, on se moque de ce qu'il se passe hors d'un voisinage de a . Plus généralement, la plupart des démonstrations de ce chapitre ressembleront aux démonstrations analogues effectuées pour les suites (voir par exemple les propriétés algébriques sur les limites), et nous verrons même que nous pourrions utiliser ces dernières pour prouver la plupart des résultats de ce chapitre.

On laissera le lecteur généraliser les définitions et résultats à d'autres domaines de définition qu'un intervalle.

1. PRÉLIMINAIRES TOPOLOGIQUES

Définition (Voisinage d'un réel)

Soit a un réel. On appelle *voisinage* de a dans \mathbb{R} toute partie A de \mathbb{R} contenant un segment de diamètre non nul, centré en a , c'est-à-dire telle que :

$$\exists \varepsilon > 0, \quad]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\subset A.$$

On dit alors que a est *intérieur* à A .

L'*intérieur* de A est l'ensemble des points intérieurs à A , c'est-à-dire dont A est voisinage.

1.a

Par exemple, $]0, 1[$ est l'intérieur de $[0, 1]$, de $]0, 1[$, de $[0, 1[$, ou encore de $]0, 1[\cup \mathbb{N}$.

Exercice (Caractérisation des voisinages)

Montrer qu'une partie A de \mathbb{R} est un voisinage de a dans \mathbb{R} si et seulement si elle contient un intervalle ouvert (et borné) non vide centré en a :

$$\exists \varepsilon > 0, \quad]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\subset A$$

Montrer que A est un voisinage de a dans \mathbb{R} si et seulement si elle contient un intervalle ouvert comprenant a .

1

Définition (Ouverts et fermés)

On appelle *ouvert* de \mathbb{R} toute partie de \mathbb{R} , voisinage de chacun des ses points. On appelle *fermé* de \mathbb{R} toute partie de \mathbb{R} , dont le complémentaire dans \mathbb{R} est un ouvert ;

1.b

Nous avons déjà vu des exemples d'ouverts et de fermés de \mathbb{R} , lors de la définition des intervalles réels. Cependant, il faut comprendre que le statut des notions d'ouvert et de fermé a changé, et qu'il faudrait donc prouver qu'un intervalle précédemment dit ouvert est effectivement ouvert en ce nouveau sens. Cela permet également de comprendre pourquoi $[1, +\infty[$ était dit fermé (bien qu'il semble « ouvert » en $+\infty$).

Définition (Voisinage de l'infini)

On appelle *voisinage de $+\infty$* dans \mathbb{R} toute partie A de \mathbb{R} contenant un ensemble du type $[M, +\infty[$, pour un certain réel M , *i.e.* tel que :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad [M, +\infty[\subset A.$$

On définit de manière analogue un *voisinage de $-\infty$* .

1.c

On peut observer que si une partie B de \mathbb{R} contient un voisinage de a , alors c'est un voisinage de a .

Exercice (Sur les voisinages)

1 Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Montrer que l'intersection de deux (et, par récurrence, d'un nombre fini de) voisinages de a est un voisinage de a .

2 Soient a et b deux éléments distincts de la droite numérique achevée. Montrer qu'il existe des voisinages respectifs \mathcal{V}_a et \mathcal{V}_b de a et b , tels que $\mathcal{V}_a \cap \mathcal{V}_b = \emptyset$.

2

Intersection et réunion d'ouverts, de fermés

- (1) Une union quelconque d'ouverts est un ouvert, une intersection finie d'ouverts est un ouvert. Cependant, une intersection quelconque d'ouverts n'est pas nécessairement un ouvert ;
- (2) Par passage au complémentaire, une intersection quelconque de fermés est un fermé, une union finie de fermés est fermée. Cependant, une union quelconque de fermés n'est pas nécessairement fermée (si tel était le cas, comme les singletons sont fermés, et que tout ensemble est réunion de singletons, tout ensemble serait fermé !).

1.1

Dans ce chapitre, I désignera un intervalle d'intérieur non vide (car la notion de limite n'a d'intérêt que pour un point non « isolé »), a sera un élément de I ou une extrémité de I (éventuellement infinie), et toutes les fonctions considérées seront définies sur I , et à valeurs réelles (sauf mention contraire). Suite à notre choix de a , tout voisinage de a rencontrera I (on dit que a est *adhérent* à I , et on note \bar{A} et appelle *adhérence* de A l'ensemble des points adhérents à A).

Dans un souci d'unification, on dit (abusivement) qu'une propriété portant sur une fonction définie sur I est vraie au voisinage de a si elle est vraie sur l'intersection de I avec un voisinage de a dans \mathbb{R} . Par exemple, nous dirons que la fonction logarithme est à valeurs strictement négatives au voisinage de 0 (bien qu'elle ne soit pas définie sur un voisinage de 0).

On déduit du travail précédent que si un nombre fini d'assertions sont vraies au voisinage de a , leur conjonction est encore vraie¹ au voisinage de a (ce résultat sera largement utilisé dans la suite). Pour les suites, le résultat analogue est : si un nombre fini d'assertions sont vraies à partir d'un certain rang, alors leur conjonction est vraie à partir d'un certain rang.

2. PREMIÈRES DÉFINITIONS

Considérons l'ensemble \mathbb{R}^I des fonctions définies sur I et à valeurs réelles.

Définition (Opérations sur les fonctions)

Soit $f, g \in \mathbb{R}^I$. La *somme* de f et g , notée $f + g$ est définie par

$$\forall x \in I, \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

On définit ainsi une loi de composition interne sur \mathbb{R}^I .

Le *produit* de f et g , noté fg est défini par

$$\forall x \in I, \quad (fg)(x) = f(x)g(x)$$

On définit ainsi une loi de composition interne sur \mathbb{R}^I .

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Le *produit* de λ et de f , noté λf , est défini par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

C'est une loi de multiplication externe.

2.a

1. En revanche, cela est faux en général pour une conjonction d'une infinité d'assertions vraies au voisinage de a , donnez des exemples.

Structure d'anneau sur l'ensemble des fonctions numériques sur I

Ces définitions sont bien licites grâce aux lois de composition interne d'addition et de multiplication sur \mathbb{R} . Ceci explique pourquoi on part d'un intervalle (presque) quelconque, mais que l'ensemble d'arrivée est le *corps* des réels. D'ailleurs, \mathbb{R}^I , muni des lois d'addition et de multiplication, est un anneau (son élément nul est la fonction identiquement nulle sur I , et son élément unité est l'application constante de valeur 1 sur I). Si g est inversible (dans cet anneau), c'est-à-dire si g ne s'annule pas, alors on pourra noter $\frac{1}{g}$ son inverse (et on notera $\frac{f}{g}$ le produit de f par l'inverse de g).

2.1

Proposition (Structure d'espace vectoriel sur l'ensemble des fonctions numériques sur I)

\mathbb{R}^I , muni des lois d'addition et de multiplication externe, est un espace vectoriel.

2.a

Démonstration

Les vérifications sont immédiates. Elles résultent des définitions des lois considérées, et des propriétés de \mathbb{R} .

□

Définition (Relation d'ordre sur l'ensemble des fonctions numériques sur I)

On définit une *relation d'ordre* \leq sur \mathbb{R}^I par

$$\forall f, g \in \mathbb{R}^I, \quad (f \leq g) \Leftrightarrow (\forall x \in I, \quad f(x) \leq g(x))$$

2.b

Relation d'ordre sur l'ensemble des fonctions numériques sur I

- (1) Cet ordre n'est évidemment pas total.
- (2) Cet ordre est compatible avec l'addition et la multiplication, au sens où :
- (3) Que signifie l'assertion $f \neq g$?
- (4) Que signifie l'assertion $f < g$? Bien faire attention à notre convention.

2.2

Définition (Valeur absolue, inf et sup)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On définit la fonction *valeur absolue* de f , notée $|f|$ par

$$\forall x \in I, \quad |f|(x) = |f(x)|$$

Soient $f, g \in \mathbb{R}^I$. On définit les fonctions $\sup(f, g)$ et $\inf(f, g)$ par

$$\forall x \in I, \quad \sup(f, g)(x) = \sup\{f(x), g(x)\}$$

et

$$\forall x \in I, \quad \inf(f, g)(x) = \inf\{f(x), g(x)\}$$

2.c

Fonction bornée

Une fonction f est bornée si et seulement si il existe un réel positif K tel que $|f(x)| \leq K$, pour tout $x \in I$. Autrement dit, f est bornée si et seulement si la fonction $|f|$ est majorée.

2.3

Définition (Extremum global d'une fonction)

Une fonction f admet un *maximum* s'il existe un élément x_0 de I pour lequel on a :

$$\forall x \in I, \quad f(x) \leq f(x_0).$$

Pour un tel x_0 , on dit que f *présente* (ou *admet*) son maximum en x_0 . On note $f(x_0) = \max_{x \in I} f(x)$, ou $f(x_0) = \max_I f$.

Une fonction f à valeurs réelles admet un *minimum* s'il existe un élément x_0 de I pour lequel on a :

$$\forall x \in I, \quad f(x) \geq f(x_0).$$

Pour un tel x_0 , on dit que f *présente* (ou *admet*) un minimum en x_0 . On note $f(x_0) = \min_{x \in I} f(x)$, ou $f(x_0) = \min_I f$.

Une fonction f admet un *extremum* (en $x_0 \in I$) si elle admet un maximum ou un minimum (en x_0).

2.d

Une fonction n'admet pas forcément d'extremum :

Une fonction peut présenter un (même) maximum en plusieurs points distincts :

Illustration

Une fonction f présente un minimum en $x_0 \in I$ si et seulement si $-f$ présente un maximum en $x_0 \in I$.

Définition (Extremum local d'une fonction)

Une fonction f admet un *maximum* (resp. *minimum*, *extremum*) *local* en $x_0 \in I$ si f admet un maximum (resp. minimum, extremum) en x_0 au voisinage de x_0 , *i.e.* il existe un intervalle non vide $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ tel que $f|_{]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\cap I}$ présente un maximum (resp. minimum, extremum) en x_0 .

2.e

Évidemment, un extremum global d'une fonction est un extremum local, mais la réciproque est fautive :

Illustration

Définition (Borne supérieure, borne inférieure)

La *borne supérieure* (resp. la *borne inférieure*) de la fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est la borne supérieure (resp. inférieure) de $f(I)$ dans $\overline{\mathbb{R}}$. On les note respectivement $\sup_{x \in I} f(x)$ (resp. $\inf_{x \in I} f(x)$) ou $\sup_I f$ (resp. $\inf_I f$).

2.f

Si f est strictement monotone, elle est nécessairement injective. En particulier, sa restriction à l'arrivée à $f(I)$ est une bijection.

L'assertion de stricte croissance de f est équivalente à

$$\forall x, y \in I, \quad (x < y) \Leftrightarrow (f(x) < f(y))$$

En particulier, si f est une bijection strictement monotone (ou plus simplement une bijection monotone), alors sa réciproque f^{-1} est également (strictement) monotone, de même monotonie que f ;

Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux applications, avec $f(I) \subset J$, alors on peut définir $g \circ f$ (remarquer le léger abus de notation);

On a quelques résultats sur la monotonie de la composition ou du produit de fonctions monotones. Le plus simple est de les retrouver soi-même, au brouillon ou de tête :

Par exemple, la composée (licite) $g \circ f$ de deux fonctions monotones est monotone (croissante si g et f ont même monotonie, décroissante dans le cas contraire : penser à la règle des signes).

Si f et g sont croissantes ET positives, alors fg est croissante :

Attention : ceci est faux si f et g sont seulement supposées croissantes !

Définition (Parité, imparité)

On suppose ici que $-I = I$ (i.e. l'intervalle I est centré en 0). Soit $f \in \mathbb{R}^I$. f est dite *paire* (resp. *impaire*) si, pour tout point x de I , $f(-x) = f(x)$ (resp. $f(-x) = -f(x)$).

2.g

Proposition (Parité, imparité)

I est supposé centré en 0. Les ensembles \mathcal{P} et \mathcal{I} des fonctions respectivement paires et impaires de \mathbb{R}^I sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de \mathbb{R}^I . Ainsi, tout élément de \mathbb{R}^I s'écrit de façon unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

2.b

On a de plus des formules donnant f_p et f_i , les parties paire et impaire de f :

Définition (Fonction périodique)

Soit T un réel strictement positif. Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est T -périodique si, pour tout réel x :

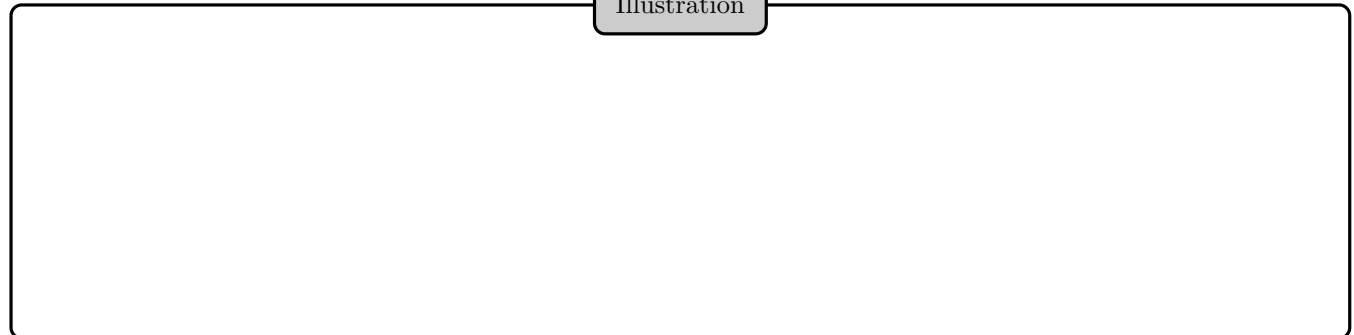
$$f(x + T) = f(x).$$

On dit alors que T est une période de f .

2.h

On étend parfois cette définition à un réel quelconque T . L'ensemble des périodes de f est alors un sous-groupe additif de \mathbb{R} , donc soit dense, soit de la forme $T_0\mathbb{Z}$, pour un certain $T_0 \in \mathbb{R}_+$. Dans ce dernier cas, et si $T_0 > 0$, on dit que T_0 est la période de f .

Illustration



L'ensemble des fonctions T -périodiques est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. En revanche, l'ensemble des fonctions périodiques n'est pas stable par somme :

Définition (Fonction lipschitzienne)

Soit k un réel positif ou nul. Une fonction f est lipschitzienne de rapport k ou k -lipschitzienne si

$$\forall x, y \in I, \quad |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

2.i

Illustration

Fonction lipschitzienne

Cette notion n'est pas du tout anecdotique, elle apparaît dans de nombreux théorèmes d'analyse ;

Une fonction k -lipschitzienne est une fonction dont tous les taux d'accroissement sont compris entre $-k$ et k : on se doute déjà que le caractère k -lipschitzien sera lié à la fonction dérivée de f (si elle existe).

2.4

3. ÉTUDE LOCALE D'UNE FONCTION

Définition (Limite d'une fonction en un point)

Soit a un point de I , ou une extrémité finie de I . Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ admet

- $l \in \mathbb{R}$ pour *limite* en $a \in \mathbb{R}$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, (|x - a| \leq \delta) \Rightarrow (|f(x) - l| \leq \varepsilon)$$

- $+\infty$ pour *limite* en $a \in \mathbb{R}$ si

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in I, (|x - a| \leq \delta) \Rightarrow (f(x) \geq M)$$

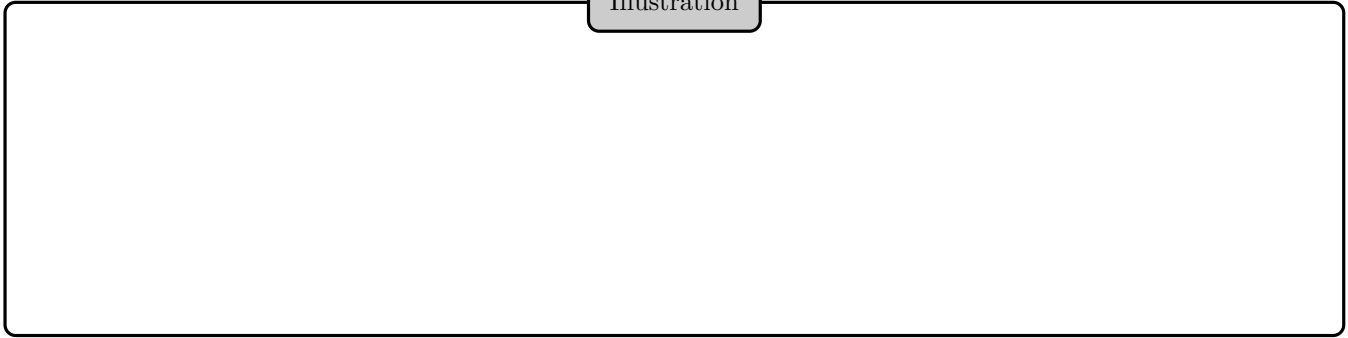
- $-\infty$ pour *limite* en $a \in \mathbb{R}$ si

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in I, (|x - a| \leq \delta) \Rightarrow (f(x) \leq M)$$

3.a

Illustration

Illustration



Une fonction n'admet pas forcément de limite en un point donné, même si elle y est définie !

Définition (Limite d'une fonction en plus ou moins l'infini)

On suppose que I est un voisinage de $+\infty$. Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ admet

– $l \in \mathbb{R}$ pour limite en $+\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in I, (x \geq c) \Rightarrow (|f(x) - l| \leq \varepsilon)$$

– $+\infty$ pour limite en $+\infty$ si

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in I, (x \geq c) \Rightarrow (f(x) \geq M)$$

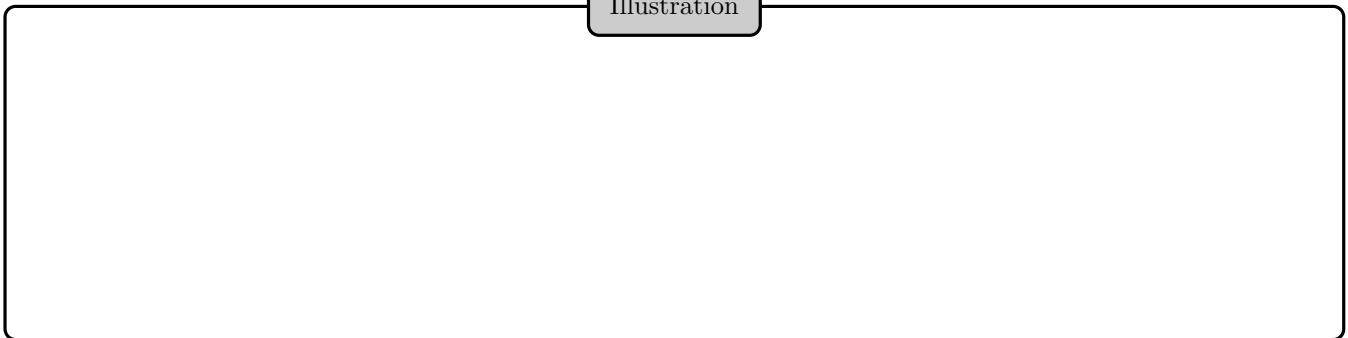
– $-\infty$ pour limite en $+\infty$ si

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in I, (x \geq c) \Rightarrow (f(x) \leq M)$$

On définit de même la notion de limite en $-\infty$.

3.b

Illustration



Définition (Limite d'une fonction en un point de la droite numérique achevée)

Dans tous les cas, on dit que $f(x)$ tend vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$ lorsque x tend vers $a \in \overline{\mathbb{R}}$, ou que f tend vers l en a , et on note $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ou encore $\lim_a f$ la limite l , on note également $f(x) \rightarrow_{x \rightarrow a} l$, ou $f \rightarrow_a l$.

3.c

Comme d'habitude, on justifiera l'existence d'une limite avant d'employer cette notation.

Pour une fonction on précise évidemment la valeur de la limite, mais aussi *la valeur en laquelle on a cette limite* (par exemple : f tend vers 0 en 3). Pour une suite, cela n'était pas nécessaire, car on regardait toujours le comportement « à l'infini ».

Une fonction admet donc une limite finie l en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$ l'assertion $|f(x) - l| \leq \varepsilon$ est vraie au voisinage de a .

Une fonction admet donc $+\infty$ (resp. $-\infty$) pour limite en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si, pour tout réel M , l'assertion $f(x) \geq M$ (resp. $f(x) \leq M$) est vraie au voisinage de a .

Lorsque $l \in \mathbb{R}$, la relation $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers a équivaut à $f(x) - l \rightarrow_{x \rightarrow a} 0$. On peut donc se ramener à une limite nulle (dans le cas où on connaît l).

Lorsque $a \in \mathbb{R}$, la relation $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers a équivaut à la relation $f(a + h) \rightarrow_{h \rightarrow 0} l$. On peut donc se ramener à une étude de limite en 0.

L'expression « au voisinage de a » pour les fonctions est l'analogie de l'expression « à partir d'un certain rang » pour les suites. Le lien entre limite d'une suite et limite d'une fonction est en fait beaucoup plus profond que cela, comme nous le verrons ultérieurement. En fait, nous pourrions montrer beaucoup des résultats de ce chapitre à l'aide des résultats déjà obtenus sur les suites.

Unification de la notion de limite

La notion de voisinage permet de regrouper les différentes notions de limites : dire que f admet $l \in \overline{\mathbb{R}}$ pour limite en $a \in \overline{\mathbb{R}}$, c'est dire que pour tout voisinage \mathcal{V}_l de l , il existe un voisinage \mathcal{V}_a de a tel que $f(\mathcal{V}_a \cap I) \subset \mathcal{V}_l$.

3.1

Si a est en outre un élément intérieur à I , dire que f admet l pour limite en a , c'est dire que l'image réciproque de tout voisinage de l est un voisinage de a .

Proposition (Unicité de la limite)

La fonction f admet au plus une limite en a .

3.a

Démonstration

En effet, deux éléments distincts l et l' de la droite numérique achevée admettent des voisinages disjoints \mathcal{V}_l et $\mathcal{V}_{l'}$. Supposer que f ait pour limites l et l' en a entraînerait l'existence d'un voisinage \mathcal{V}_a de a tel que $f(\mathcal{V}_a \cap I) \subset \mathcal{V}_l \cap \mathcal{V}_{l'} = \emptyset$, ce qui est absurde, puisque a est adhérent à I .

□

Démonstration

Pour ceux qui ont peur de la démonstration précédente, montrons ce résultat dans le cas particulier où a est réel (les autres sont analogues). Raisonnons par l'absurde, en supposant que f est de limites distinctes finies l et l' en a . On choisit $\varepsilon = \frac{|l' - l|}{3} > 0$. Il existe deux réels strictement positifs δ et δ' tels que pour tout point x de I , on ait :

$$(|x - a| \leq \delta) \Rightarrow (|f(x) - l| \leq \varepsilon) \quad \text{et} \quad (|x - a| \leq \delta') \Rightarrow (|f(x) - l'| \leq \varepsilon)$$

Il existe un point x de I tel que $|x - a| \leq \min(\delta, \delta')$. Pour un tel x , on a les deux inégalités $|f(x) - l| \leq \varepsilon$ et $|f(x) - l'| \leq \varepsilon$. L'inégalité triangulaire donne alors $|l' - l| \leq \frac{2|l' - l|}{3}$, ce qui est absurde.

□

Exercice (Unicité de la limite)

Pour vous entraîner, montrer à la main qu'une fonction ne peut avoir pour limites $+\infty$ et $-\infty$ en $a \in \mathbb{R}$.

3

Définition (Continuité ponctuelle)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, et $a \in I$. On dit que f est *continue* en a si $f(x)$ tend vers $f(a)$ lorsque x tend vers a .

3.d

Lorsque $a \in I$, dire que f admet une limite finie en a équivaut à la continuité de f en ce point (car la seule limite envisageable en a , c'est $f(a)$).

Définition (Prolongement par continuité)

Si a est une extrémité finie de I n'appartenant pas à I , et si f admet une limite finie l en a , on pose

$$\tilde{f}(x) = f(x) \text{ si } x \in I, \text{ et } \tilde{f}(a) = l$$

La fonction \tilde{f} ainsi définie sur $I \cup \{a\}$ est continue en a . On dit que f se *prolonge par continuité* en a , et \tilde{f} est appelée le *prolongement par continuité* de f en a .

3.e

Par définition, lorsque a est une extrémité finie de I n'appartenant pas à I , f a une limite finie si et seulement si f se prolonge par continuité en ce point. Il n'y avait pas lieu de définir un prolongement par continuité si a ou l n'était pas fini.

Exercice (Prolongement par continuité)

Montrer que la fonction $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x^2 \cos(1/x)$ est prolongeable par continuité en 0.

4

Définition (Limites à gauche et à droite)

Soit a un point intérieur à I . On dit que f admet une *limite à gauche* (resp. une *limite à droite*) en a si la restriction de f à $I \cap]-\infty, a[$ (resp. à $I \cap]a, +\infty[$) admet une limite en a . Cette limite est alors notée $\lim_{a^-} f$ (resp. $\lim_{a^+} f$). On dit que f est *continue à gauche* (resp. *à droite*) en a si f admet $f(a)$ pour limite à gauche (resp. à droite) en a .

3.f

Bien remarquer que pour les limites à gauche et à droite, les intervalles considérés sont $I \cap]-\infty, a[$ et $I \cap]a, +\infty[$, et non $I \cap]-\infty, a]$ et $I \cap [a, +\infty[$ (en fait, si on prend ces derniers ensembles, on tombe sur les continuités à gauche et à droite de f en a , ce qui est différent).

Proposition (Continuités à gauche et à droite)

Une fonction f est continue en un point a intérieur à I si et seulement si elle est continue en a à droite et à gauche.

3.b

Démonstration

Si f est continue en a , elle y est évidemment continue à droite et à gauche. Si réciproquement f est continue à droite et à gauche en a , soit ε un réel strictement positif. Il existe des réels strictement positifs δ_+ et δ_- tels que

$$(\forall x \in [a - \delta_-, a[, |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon) \quad \text{et} \quad (\forall x \in]a, a + \delta_+], |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon)$$

En posant $\delta = \min(\delta_+, \delta_-)$, on a, pour tout x de $[a - \delta, a + \delta]$:

$$|f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

(c'est évidemment vrai pour $x = a$).

□

Ne surtout pas confondre limites à gauche et droite, et continuité à gauche et droite : une fonction peut admettre une même limite finie à gauche et à droite en un point sans être continue à gauche ou droite en ce point.

Illustration

4. LIMITE ET ORDRE

Proposition (Limite finie et bornitude locale)

Toute fonction admettant une limite finie l en un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$ est bornée au voisinage de ce point.

4.a

Démonstration

Il suffit de prendre $\varepsilon = 1$ dans l'assertion formelle affirmant que $\lim_a f = l$.

□

Proposition (Limite strictement positive et minoration)

Toute fonction admettant une limite strictement positive en un point est minorée, au voisinage de ce point, par un nombre réel strictement positif.

4.b

Démonstration

Soit l la limite strictement positive d'une fonction f en a . On prend $\varepsilon = \frac{l}{2}$ (on choisit une bonne valeur de ε). L'assertion $f(x) \in [\frac{l}{2}, \frac{3l}{2}]$ est vraie pour x voisin de a , et la fonction f est en particulier minorée par le nombre réel strictement positif $\frac{l}{2}$ au voisinage de a . □

Proposition (De la comparaison des fonctions à celle des limites)

On suppose que les fonctions f et g admettent respectivement pour limites l et l' en a et que $f \leq g$ au voisinage de a . On a alors $l \leq l'$. 4.c

Démonstration

Soit ε un réel strictement positif quelconque. Comme les assertions $l - \varepsilon \leq f(x)$, $f(x) \leq g(x)$ et $g(x) \leq l' + \varepsilon$ sont vraies au voisinage de a , leur conjonction l'est également, et donc $l - \varepsilon \leq l' + \varepsilon$. Ceci étant vrai pour $\varepsilon > 0$ quelconque, on a $l \leq l'$. □

Comme dans le cas des suites, on applique souvent cette proposition dans le cas où l'une des fonctions est constante : par exemple, si g est minorée par 0 au voisinage de a , et si elle admet une limite l' en a , alors $l' \geq 0$ (on a pris pour f la fonction nulle).

Des inégalités strictes ne nous apporteraient rien. Cependant, on a :

Proposition (Conservation d'inégalités strictes)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \bar{I}$. On suppose que $f(x)$ tend vers $l \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers a . Soient k et k' deux réels tels que $k < l < k'$. Alors l'assertion $k < f(x) < k'$ est vraie pour x voisin de a . 4.d

Démonstration

Prendre $\varepsilon > 0$ tel que $k < l - \varepsilon$ et $l + \varepsilon < k'$ (par exemple $\varepsilon = \min(\frac{k'-l}{2}, \frac{l-k}{2})$). □

Proposition (principe des gendarmes)

Si $g \leq f \leq h$, et si g et h tendent vers $b \in \bar{\mathbb{R}}$ en a , alors $f(x)$ tend vers b lorsque x tend vers a . 4.e

Démonstration

Seul le cas d'une limite finie b est intéressant. Soit ε un réel strictement positif. Les assertions $g(x) \in [b - \varepsilon, b + \varepsilon]$ et $h(x) \in [b - \varepsilon, b + \varepsilon]$ sont vraies pour x voisin de a , donc l'assertion $f(x) \in [b - \varepsilon, b + \varepsilon]$ est vraie pour x voisin de a . □

5. OPÉRATIONS ALGÈBRIQUES SUR LES LIMITES

Proposition (Condition suffisante pour qu'un produit tende vers 0)

Le produit d'une fonction bornée au voisinage de a par une fonction tendant vers 0 en a est une fonction tendant vers 0 en a .

5.a

Démonstration

On suppose que f est bornée au voisinage de a : il existe un réel strictement positif M tel que $|f|$ soit majorée par M au voisinage de a . On suppose que g est de limite nulle en a . Soit ε un réel strictement positif quelconque. $|g|$ est majorée par $\frac{\varepsilon}{M}$ au voisinage de a . $|fg|$ est donc majorée par ε au voisinage de a . □

Proposition (Conditions suffisantes pour qu'une somme ou un produit tende vers l'infini)

Soit f une fonction tendant vers $+\infty$ en a :

- (1) Si g est minorée au voisinage de a , alors $f + g$ tend vers $+\infty$ en a .
- (2) Si g est minorée par un nombre strictement positif au voisinage de a , alors fg tend vers $+\infty$ en a .

5.b

Démonstration

□

Théorème (Opérations algébriques sur les limites)

On considère deux fonctions f et g de limites respectives l et l' , éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ en $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

- (1) $\lim_a |f| = |l|$ (en notant $|\pm \infty| = +\infty$).
- (2) $\lim_a (f + g) = l + l'$ (si $l + l'$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$).
- (3) $\lim_a (fg) = ll'$ (si ll' existe dans $\overline{\mathbb{R}}$).
- (4) Si $\lambda \in \mathbb{R}^*$, alors $\lim_a (\lambda f) = \lambda l$ (la limite vaut 0 si $\lambda = 0$).
- (5) Si $l' \neq 0$, alors g ne s'annule pas au voisinage de a , et $\lim_a \frac{1}{g} = \frac{1}{l'}$ (en posant $\frac{1}{\pm \infty} = 0$).
- (6) Si outre $\frac{1}{l'}$ n'est pas indéterminée, alors $\lim_a \frac{f}{g} = \frac{l}{l'}$.

5.c

Démonstration

Laissée au lecteur, qui pourra s'inspirer de ce qui a été fait sur les suites, ou même l'utiliser :

□

Exercice (Continuité du sup)

Montrer que $\sup(f, g)$ est continue en a si f et g le sont.

5

Soit $a \in \bar{I}$ (i.e. I rencontre tout voisinage de a). L'ensemble des fonctions tendant vers une limite finie (resp. vers 0) en a est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^I .

Proposition (Limite d'une composée)

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$, avec $f(I) \subset J$. On suppose que f admet une limite b en a , et que g admet une limite $l \in \bar{\mathbb{R}}$ en b . Alors $g \circ f$ admet l pour limite en a .

5.d

Démonstration

Soit \mathcal{V}_l un voisinage de l . Il existe un voisinage \mathcal{V}_b de b tel que $g(J \cap \mathcal{V}_b) \subset \mathcal{V}_l$. Il existe un voisinage \mathcal{V}_a tel que $f(I \cap \mathcal{V}_a) \subset \mathcal{V}_b$. On a alors $(g \circ f)(I \cap \mathcal{V}_a) \subset \mathcal{V}_l$.

□

Corollaire (Continuité ponctuelle d'une composée)

Si f est continue en a , et si g continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a .

5.e

6. LIMITES ET MONOTONIE

Théorème de la limite monotone, aux bornes

On suppose que $I =]\alpha, \beta[$ ($\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$, $\alpha < \beta$), et que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est monotone. Alors f admet des limites (éventuellement infinies) en α et β . Plus précisément, si f est croissante, alors (les bornes sont prises dans \mathbb{R})

$$(1) \lim_{x \rightarrow \beta} f(x) = \sup_I f.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \inf_I f.$$

Si f est décroissante, alors

$$(1) \lim_{x \rightarrow \beta} f(x) = \inf_I f.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \sup_I f.$$

6.a

Démonstration

□

Théorème de la limite monotone, en un point intérieur

On suppose que a est intérieur à I , et que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est monotone. Alors f admet une limite finie l^- à gauche et une limite finie l^+ à droite en a . Plus précisément, si f est croissante, alors

$$(1) \lim_{x \rightarrow a^-} f = \sup_{I \cap]-\infty, a[} f \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f = \inf_{I \cap]a, +\infty[} f$$

$$(2) l^- \leq f(a) \leq l^+$$

Si f est décroissante, alors

$$(1) \lim_{x \rightarrow a^-} f = \inf_{I \cap]-\infty, a[} f \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f = \sup_{I \cap]a, +\infty[} f.$$

$$(2) l^- \geq f(a) \geq l^+.$$

6.b

Démonstration

□

Illustration

Une fonction monotone est continue en un point intérieur à I si et seulement si ses limites à gauche et à droite en ce point sont égales.

7. CARACTÉRISATION SÉQUENTIELLE DE LA CONTINUITÉ

Proposition (Caractérisation séquentielle de l'existence d'une limite)

Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ admet une limite l en a si et seulement si pour toute suite (u_n) d'éléments de I tendant vers a , la suite des images $(f(u_n))$ tend vers l .

7.a

Démonstration

On se place dans le cas où a et l sont finis (les autres cas sont analogues).
On suppose que f est de limite l en a . Soit u une suite d'éléments de I , de limite a . Soit ε un réel strictement positif. Il existe un réel strictement positif δ tel que, pour tout x de I :

$$|x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

Il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, $|u_n - a| \leq \delta$. On a donc, pour tout $n \geq N$, $|f(u_n) - l| \leq \varepsilon$: la suite de terme général $f(u_n)$ tend donc vers l .

Montrons la réciproque par contraposition : on suppose que f n'est pas de limite l en a , et on va construire une suite (u_n) d'éléments de I telle que $(f(u_n))$ ne tende pas vers l .

Comme f ne tend pas vers l en a , on a :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in I, (|x - a| \leq \delta \wedge |f(x) - l| > \varepsilon)$$

Pour un tel ε , on applique ce résultat à une suite (δ_n) de réels strictement positifs tendant vers 0 (par exemple donnée par : $\delta_n = 2^{-n}$). Pour chaque entier n , il existe $u_n \in I$ tel que $|u_n - a| \leq \delta_n$ et $|f(u_n) - l| > \varepsilon$. La suite (u_n) tend vers a , et $(f(u_n))$ ne tend pas vers l . □

Cette caractérisation s'utilise surtout dans le sens direct, pour déterminer la limite d'une suite, ou, par contraposition, pour montrer que f n'admet pas de limite, en exhibant (u_n) tendant vers a telle que $(f(u_n))$ diverge (ou en exhibant des suites (u_n) et (v_n) tendant vers a telles que $(f(u_n))$ et $(f(v_n))$ n'aient pas la même limite). Par exemple, on l'utilise souvent pour l'étude des suites récurrentes : si (u_n) d'itératrice $f : I \rightarrow I$ tend vers un point l de I en lequel f est continue, alors l est un point fixe de f , i.e. $f(l) = l$.

Exercice (Limite de sinus en l'infini)

Faire l'exercice 1 de TD.

6

Cette caractérisation permet aussi d'étudier des équations fonctionnelles, en itérant la relation fonctionnelle souhaitée :

Exercice (Équations fonctionnelles)

Faire la première question de l'exercice 15 de TD.

7

Grâce à cette proposition, l'étude de limites de fonctions ne ressemble pas seulement à l'étude de limite d'une suite, elle en *résulte*.

En fait, cette proposition est surtout utilisée pour caractériser la continuité (et l'importance de ce corollaire justifie l'appellation de théorème) :

Théorème (Caractérisation séquentielle de la continuité)

Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en $a \in I$ si et seulement si pour toute suite (u_n) d'éléments de I convergeant vers a , la suite des images $(f(u_n))$ converge vers $f(a)$.

7.b

Ce critère est très utile pour prouver la non continuité d'une fonction : il suffit en effet pour ce faire d'exhiber au choix

- (1) une suite convergeant vers a , mais d'image ne convergeant pas vers $f(a)$;
- (2) une suite convergeant vers a , mais d'image divergente ;
- (3) ou deux suites convergeant vers a , mais dont les images par f ont des limites différentes.

Dans les deux derniers cas, on prouve même qu'aucun changement de la valeur de f en a ne rendra f continue en a .

Exercice (Continuité ponctuelle, ou pas)

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ n'est pas continue en 0. La fonction $g = \text{Id} \times f$ est-elle continue en 0 ?

8

8. FONCTIONS CONTINUES SUR UN INTERVALLE

8.1. DÉFINITION ET PREMIERS EXEMPLES

Définition (Continuité sur un intervalle)

Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est *continue sur* I si elle est continue en tout point de I . On note $\mathcal{C}(I)$ (ou $\mathcal{C}^0(I)$) l'ensemble des fonctions continues de I dans \mathbb{R} .

8.a

Sur la quantification de la continuité globale

f est continue sur I si et seulement si :

$$\forall x \in I, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in I, (|x - y| \leq \eta) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon)$$

Bien remarquer qu'*a priori*, l' η est fonction de ε et de x , et que cette assertion n'a pas de raison d'être équivalente à

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x, y \in I, (|x - y| \leq \eta) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon)$$

8.1

De l'étude menée précédemment, on déduit des résultats généraux sur les fonctions continues sur un intervalle :

Proposition (Structure sur l'ensemble des fonctions continues sur I)

$\mathcal{C}(I)$ est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de \mathbb{R}^I .

8.a

On a aussi, par exemple, si f, g sont continues sur I et si g ne s'annule pas, $\frac{f}{g}$ continue sur I .

Proposition (Composée d'applications continues)

Si $f : I \rightarrow J$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues sur I et J respectivement, alors $g \circ f$ est continue sur I .

8.b

Exemple (Fonctions globalement continues)

- (1) Une fonction lipschitzienne est continue sur I :
- (2) Les fonctions constantes, l'identité, les fonctions polynomiales, la fonction valeur absolue, sont continues sur \mathbb{R} .
- (3) La fonction carré, bien que non lipschitzienne, est continue. De même pour la fonction racine carrée (sur \mathbb{R}_+).
- (4) Les fonctions usuelles (sinus, cosinus, tangente, exponentielle, logarithme, etc.) sont continues sur tout intervalle sur lequel elles sont définies.
- (5) Une fonction rationnelle (quotient de deux fonctions polynomiales) est continue sur tout intervalle où elle est définie.
- (6) Si f, g sont continues sur I , alors $|f|, \sup(f, g), \inf(f, g)$ le sont.
- (7) Si J est un intervalle contenu dans I , et que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur I , alors $f|_J$ est continue sur J .
- (8) Si a est une extrémité finie de I n'appartenant pas à I , et si f est continue sur I , et admet une limite finie en a , alors le prolongement par continuité de f en a est une fonction continue sur $\{a\} \cup I$.
- (9) Si f et g sont continues sur $]a, b]$ et $[b, c[$ respectivement, et si $f(b) = g(b)$, alors la fonction h définie par recollement sur $]a, c[$ est continue sur $]a, c[$.
- (10) La fonction $f : x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est continue sur I .

i

La continuité globale permet de prouver des résultats par des arguments de densité : par exemple, si une fonction est continue sur \mathbb{R} et nulle sur une partie dense Ω de \mathbb{R} , alors elle est identiquement nulle.

Exercice (Fonction continue périodique non constante)

Faire l'exercice 11 de TD.

9

8.2. LE THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

Théorème des valeurs intermédiaires

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a, b \in I$, $a < b$. On suppose

- (1) f continue sur $[a, b]$;
- (2) $f(a)f(b) \leq 0$.

Il existe alors un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

8.c

Démonstration

On écarte le cas évident où f s'annule en a ou b . Quitte à considérer $-f$ plutôt que f , on peut supposer que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. Considérons l'ensemble

$$\Omega = \{x \in [a, b], f(x) \leq 0\}$$

Ω est une partie non vide (elle comprend a) et majorée (par b) de \mathbb{R} . Elle admet donc une borne supérieure c . Par définition de la borne supérieure, et en prenant pour valeurs successives de ε celles d'une suite (ε_n) de réels strictement positifs de limite nulle (par exemple, donnée par $\varepsilon_n = \frac{1}{n+1}$), il existe une suite d'éléments de Ω tendant vers c . Par continuité de f en c , la suite des images tend vers $f(c)$, et $f(c) \leq 0$. Comme $c < b$, on a $f(x) > 0$ pour tout $x \in]c, b[$. Par continuité à droite en c , on obtient $f(c) \geq 0$. Il en résulte $f(c) = 0$. □

Illustration

Le théorème des valeurs intermédiaires par dichotomie

Il existe une démonstration par dichotomie, en construisant une suite $([a_n, b_n])$ de segments emboîtés dont la longueur tend vers 0, et tels que $f(a_n) \leq 0$ et $f(b_n) \geq 0$ pour tout n . La limite commune c des suites (a_n) et (b_n) vérifie donc $f(c) = 0$.

8.2

Illustration

Le théorème des valeurs intermédiaires affirme un résultat d'existence, pas d'unicité (il n'y a d'ailleurs pas toujours unicité).

Exercice (Polynôme réel de degré impair)

Montrer que tout polynôme réel de degré impair admet une racine réelle.

10

Corollaire ((Reformulation du théorème des valeurs intermédiaires))

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a, b \in I$, $a < b$. On suppose que f est continue sur $[a, b]$. Soit t un élément du segment d'extrémités $f(a)$ et $f(b)$. Il existe alors un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = t$.

8.d

Démonstration

Il suffit d'appliquer le théorème précédent à $x \mapsto f(x) - t$.

□

Exercice (Théorème des valeurs intermédiaires)

- 1 Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continue. Montrer qu'elle admet un point fixe.
- 2 Faire l'exercice 5 de TD.

11

Exercice (Continuité et injectivité)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application.

- 1 Montrer que si f est strictement monotone, alors elle est injective.
- 2 Montrer que si f est continue et injective, alors elle est strictement monotone.

Indication : on pourra montrer que si f est continue et non strictement monotone, alors elle n'est pas injective.

Indication : on pourra alternativement considérer, pour $a \in I$ fixé, l'ensemble I_a des taux d'accroissement de f entre a et un point quelconque de $I \setminus \{a\}$.

12

Théorème (Image continue d'un intervalle)

L'image continue d'un intervalle est un intervalle.

8.e

Démonstration

On démontre que l'image d'un convexe est un convexe, ce qui nous ramène au corollaire précédent. □

8.3. FONCTIONS CONTINUES SUR UN SEGMENT

Théorème (Image continue d'un segment)

L'image continue d'un segment est un segment. 8.f

Démonstration

On considère une application f continue sur un segment $[a, b]$. $f(I)$ est donc un intervalle. Notons $m = \inf f(I)$ et $M = \sup f(I)$. On sait que $]m, M[\subset f(I)$ (par définitions des bornes supérieure et inférieure, et convexité d'un intervalle). Montrons que m et M sont des éléments de $f(I)$ (en particulier, m et M sont finis), ce qui impose $f(I) = [m, M]$.

Montrons que $M \in f(I)$ (on démontre de manière analogue que $m \in f(I)$). Que M soit fini ou pas, il existe une suite (y_n) d'éléments de $f(I)$ tendant vers M . Pour chaque entier naturel n , il existe un élément x_n de $[a, b]$ tel que $y_n = f(x_n)$. La suite (x_n) est une suite de $[a, b]$, et admet donc une suite extraite $(x_{\varphi(n)})$, convergente, vers un élément c de $[a, b]$. La suite des images de cette suite extraite est une suite extraite de (y_n) , donc tend vers M . Par continuité de f en c , on a $f(c) = M$: M est un élément de $f(I)$.

De même pour m . Finalement, $f(I) = [m, M]$. □

L'image continue d'un intervalle est un intervalle, et l'image continue d'un segment est un segment. Il ne faut pas pour autant croire que l'image continue d'un intervalle soit un intervalle de même nature :

Théorème (Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$. Alors f est bornée et atteint ses bornes, *i.e.* il existe c et c' éléments de $[a, b]$ tels que 8.g

$$f(c) = \sup_{[a,b]} f \text{ et } f(c') = \inf_{[a,b]} f$$

Exercice (Minoration d'une fonction continue sur un segment)

On suppose $I = [a, b]$, que f est continue sur I , et que pour tout $x \in I$, $f(x) > 0$. Montrer qu'il existe alors $\alpha > 0$ tel que $f(x) \geq \alpha$. Montrer que ceci peut tomber en défaut si I n'est pas un segment. 13

8.4. RÉCIPROQUE D'UNE FONCTION CONTINUE STRICTEMENT MONOTONE

Lemme Condition suffisante de continuité pour une fonction monotone

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ monotone sur un intervalle I . Si $f(I)$ est un intervalle, alors f est continue sur I .

8.h

Démonstration

On sait que f admet des limites à gauche (resp. à droite) en tout point où cela a un sens. Si l'image est un intervalle, les limites à gauche et à droite éventuelles en a doivent valoir $f(a)$.

□

Théorème de la bijection réciproque

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On note $J = f(I)$, et on suppose que la fonction f est

- (1) continue sur I ;
- (2) strictement monotone sur I .

La fonction f réalise alors une bijection de l'intervalle I vers l'intervalle J , et sa bijection réciproque $f^{-1} : J \rightarrow I$ est une fonction continue strictement monotone de même sens que f .

8.i

Démonstration

La fonction f est clairement une bijection de I sur J (l'injectivité résulte de la stricte monotonie). La continuité de la réciproque résulte du lemme.

□

Exemple (Continuité de la racine n -ième)

La fonction racine n -ième sur \mathbb{R}_+ si n est pair et \mathbb{R} si n est impair est continue.

ii

Exercice (Bijection réciproque continue)

Montrer que l'application $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto xe^x + \ln(x)$ est une bijection de \mathbb{R}_+^* sur \mathbb{R} , et que sa bijection réciproque est continue sur \mathbb{R} .

14

9. UNIFORME CONTINUITÉ

Définition (Uniforme continuité)

Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est *uniformément continue* sur I si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in I^2, (|x - y| \leq \eta) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon)$$

Un η pour un tel ε est appelé *module d'uniforme continuité* pour f et ε .

9.a

Illustration

Une fonction lipschitzienne est uniformément continue.
 Une fonction uniformément continue sur I est continue sur I .
 Nous verrons des exemples montrant que les deux réciproques sont fausses. Cependant, on a une réciproque partielle :

Théorème de Heine

Une fonction continue sur un segment est uniformément continue sur ce segment.

9.a

Démonstration

On considère une fonction continue sur un segment $[a, b]$. On raisonne par l'absurde, en supposant :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x, y \in I, \quad (|x - y| \leq \eta \text{ et } |f(x) - f(y)| > \varepsilon)$$

On construit deux suites (x_n) et (y_n) telles que $(x_n - y_n)$ tende vers 0 (on prend $\eta = 2^{-n}$), et dont la suite des images vérifie $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$. Grâce au théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire de (x_n) une suite $(x_{\varphi(n)})$ convergente, vers un point c du segment $[a, b]$. La suite $(y_{\varphi(n)})$ tend également vers c , et on arrive, par continuité de f en c , à l'absurdité $0 \geq \varepsilon$.

□

Exercice (Continuité (uniforme) et caractère lipschitzien)

- 1 Montrer que la fonction racine carrée est uniformément continue sur \mathbb{R}_+ , mais n'est pas lipschitzienne sur \mathbb{R}_+ .
- 2 Montrer que la fonction carré est continue sur \mathbb{R} mais non uniformément continue sur \mathbb{R} .

15

10. FONCTIONS À VALEURS COMPLEXES

Définition (Parties réelle et imaginaire d'une fonction)

Soit \mathbb{C}^I l'ensemble des fonctions d'un intervalle I , et à valeurs complexes. Soit $f \in \mathbb{C}^I$: la *partie réelle* (resp. la *partie imaginaire*) de f dans \mathbb{C} , notée $\text{Re}(f)$ (resp. $\text{Im}(f)$) est la fonction définie, pour tout élément x de I , par :

$$(\text{Re}(f))(x) = \text{Re}(f(x)) \quad (\text{resp. } (\text{Im}(f))(x) = \text{Im}(f(x))).$$

10.a

Utilité des parties réelle et imaginaire d'une fonction

Nous allons voir que dans la plupart des cas, l'étude de f se ramène à celle de ses parties réelle et imaginaire.

10.1

Définition (Conjuguée, module d'une fonction)

On définit l'application *conjuguée de f* , notée \bar{f} par

$$\forall x \in I, \quad \bar{f}(x) = \overline{f(x)}$$

On définit l'application *module de f* , notée $|f|$, par

$$\forall x \in I, \quad |f|(x) = |f(x)|$$

10.b

Définition (Fonction bornée à valeurs complexes)

Une fonction est dite *bornée* si

$$\exists M \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in I, \quad |f(x)| \leq M$$

10.c

Fonction bornée à valeurs complexes

Une fonction $f \in \mathbb{C}^I$ est bornée si et seulement si l'application $|f|$ est bornée, si et seulement si $\text{Re}(f)$ et $\text{Im}(f)$ le sont (grâce aux inégalités habituelles).

10.2

Définition (Limite d'une fonction à valeurs complexes)

Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ admet $l \in \mathbb{C}$ pour limite en a si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, \quad (|x - a| \leq \delta) \Rightarrow (|f(x) - l| \leq \varepsilon)$$

On note alors $\lim_a f = l$, etc.

10.d

Limite d'une fonction à valeurs complexes

- (1) La définition est donc formellement la même que dans le cas réel.
- (2) f admet l pour limite en a (fini) si et seulement si la fonction réelle $|f - l|$ admet 0 pour limite en a .
- (3) Pas de limite *valant* $\pm\infty$, mais on peut toujours avoir une limite *en* $\pm\infty$. En ce sens, l'étude est simplifiée.
- (4) Une fonction admet au plus une limite en un point donné.

10.3

Proposition (Limite d'une fonction complexe et caractère localement borné)

Toute fonction complexe admettant une limite en un point est bornée au voisinage de ce point.

10.a

Démonstration

Prendre $\varepsilon = 1$ dans l'assertion formelle exprimant $\lim_a f = l$.

□

Proposition (Limite d'une fonction complexe et parties réelle et imaginaire)

f admet $l = l_r + il_i$ ($l_r, l_i \in \mathbb{R}$) pour limite en a si et seulement si $\lim_a (\operatorname{Re} f) = l_r$ et $\lim_a (\operatorname{Im} f) = l_i$.

10.b

Démonstration

Résulte des inégalités

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \max(|\operatorname{Re}(z)|, |\operatorname{Im}(z)|) \leq |z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|.$$

□

Définition (Continuité ponctuelle d'une fonction complexe)

f est *continue* en $a \in I$ si $\lim_a f = f(a)$ (i.e. f admet une limite finie en a).

10.e

Proposition (Continuité et parties réelle et imaginaire)

f est continue en a si et seulement si $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ le sont.

10.c

Démonstration

Corollaire immédiat de la proposition précédente.

□

Théorème (Opérations algébriques pour les fonctions complexes)

On suppose que f et g tendent respectivement vers $l \in \mathbb{C}$ et $l' \in \mathbb{C}$ en a .

– La fonction $|f|$ a une limite en a et

$$\lim_a |f| = |l|$$

– La fonction \bar{f} a une limite en a et

$$\lim_a \bar{f} = \bar{l}$$

– La fonction $(f + g)$ a une limite en a et

$$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = l + l'$$

– La fonction (fg) a une limite en a et

$$\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = ll'$$

– Lorsque $l' \neq 0$, la fonction g ne s'annule pas au voisinage de a , la restriction de g à ce voisinage a une limite en a et

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{l'}$$

De plus,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{l'}$$

10.d

Démonstration

On se ramène essentiellement au cas réel, quitte à considérer parties réelle et imaginaire. Alternativement, on peut d'abord montrer la caractérisation séquentielle de la continuité (toujours valable), et se ramener ainsi au cas déjà traité des suites complexes. □

On ne détaille pas toutes les extensions possibles des définitions liées aux éléments de \mathbb{R}^I (limite à gauche et à droite, dont on ne se sert pratiquement pas dans le cas des fonctions à valeurs complexes).

Notation (Fonctions complexes continues sur un intervalle)

On note $\mathcal{C}(I, \mathbb{C})$, $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs complexes, c'est-à-dire des éléments de \mathbb{C}^I , continues en tout point de I .

10.f

Structures sur l'ensemble des fonctions complexes continues sur un intervalle

Il s'agit d'un \mathbb{C} -espace vectoriel (comprend la fonction nulle, et est stable par combinaison linéaire : si f et g sont continues sur I et à valeurs dans \mathbb{C} , λ, μ deux nombres complexes, alors $\lambda f + \mu g$ est continue sur I), d'un anneau, en bref d'une \mathbb{C} -algèbre.

10.4

Il n'y a pas lieu de définir la croissance de f , et beaucoup de théorèmes n'ont pas d'analogue immédiat dans le cas complexe. À titre d'exemple, le théorème des valeurs intermédiaires, qui stipule (sous une de ses formes) que l'image continue d'un convexe est un convexe, ne fonctionne plus : l'application $\theta \mapsto e^{i\theta}$, bien que continue, envoie le convexe \mathbb{R} sur le cercle unité (évidemment non convexe).

11. QUESTIONNAIRE 7 : FONCTIONS

Sauf mention contraire, f et g sont définies sur \mathbb{R} , à valeurs réelles.

- 1 Si $\lim_{+\infty} f = +\infty$, alors f est croissante au voisinage de $+\infty$.
- 2 Si $\lim_{+\infty} f = +\infty$ et $\lim_{-\infty} f = +\infty$ alors f n'est pas injective.
- 3 Si $\lim_{+\infty} f = +\infty$ et $\lim_{-\infty} f = -\infty$ alors f est surjective.
- 4 Si f^2 est continue, alors f est continue.
- 5 Si fg est continue, alors en tout réel, f ou g est continue.
- 6 Si f et g sont uniformément continues, alors fg l'est.
- 7 Si f définie sur $[0, 1[$, est uniformément continue, alors elle est bornée.
- 8 Si f définie sur $[0, 1[$, est uniformément continue, alors elle est prolongeable par continuité sur $[0, 1]$.
- 9 Si f est uniformément continue sur deux intervalles I et J , alors elle est uniformément continue sur la réunion $I \cup J$.
- 10 Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, où $\alpha < \beta$. Si la restriction de $f :]\alpha, \beta[\rightarrow \mathbb{R}$ à tout segment inclus dans $] \alpha, \beta [$ vérifie la propriété \mathcal{P} , f vérifie-t-elle nécessairement cette propriété \mathcal{P} ? On traitera cette question lorsque \mathcal{P} est successivement le fait d'être borné, continu, uniformément continu, etc.

12. FEUILLE DE TD 10 : FONCTIONS NUMÉRIQUES

12.1. LIMITES

Exercice 1 (Limite de sinus en l'infini)

0

Montrer que la fonction sinus n'admet pas de limite en $+\infty$.

Exercice 2 (Fonctions périodiques et limite en l'infini)

0

Caractériser les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ périodiques admettant une limite en $+\infty$.

12.2. CONTINUITÉ

Exercice 3 (Cardinal de l'image d'un intervalle par une fonction continue)

0

Soit I un intervalle réel, f une application continue de I dans \mathbb{R} . Montrer que $f(I)$ est infini ou f est constante.

Exercice 4 (Fonction continue de valeur absolue constante)

0

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I , telle que $|f|$ soit constante sur I . Montrer que f est constante sur I .

Exercice 5 (Enfin une application concrète)

0

Un homme parcourt 8 kilomètres en une heure. Montrer qu'il existe un intervalle de temps d'une demi-heure durant lequel il a parcouru 4 kilomètres.

Exercice 6 (Prolongements par continuité)

0

Déterminer le prolongement par continuité des fonctions suivantes (on pourra utiliser des résultats sur les dérivées) :

1 $f : x \mapsto \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}$.

2 $g : x \mapsto \frac{x^2-2x-3}{\sqrt{x+1}}$.

3 $h : x \mapsto \frac{\sin(x)}{\sqrt{1+x}-1}$.

Exercice 7 (Continuité du max et du min)

1

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I . Montrer que $\sup(f, g)$ et $\inf(f, g)$ sont continus.

Exercice 8 (Points fixes)

1

- 1 Montrer que si $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ est continue, alors f admet un point fixe.
- 2 Montrer que si $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ est croissante, alors f admet un point fixe.
- 3 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue décroissante. Montrer que f admet un unique point fixe.
- 4 Soit I un segment et f une application continue telle que $f(I) \subset I$. Montrer que f admet au moins un point fixe.
- 5 Même question, en supposant cette fois $I \subset f(I)$.

Exercice 9 (Minimum et monotonie)

2

On pose $f : x \mapsto |x| \left(2 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ si $x \neq 0$, et $f(0) = 0$. Montrer que f est continue et minimale en 0, mais que pour tout $\varepsilon > 0$, $f|_{[0, \varepsilon]}$ n'est pas monotone.

Exercice 10 (Minoration, majoration, encadrement)

2

- 1 Montrer qu'une fonction continue sur un segment et à valeurs dans \mathbb{R}_+^* est minorée par un réel strictement positif.
- 2 Soit f une fonction numérique continue sur \mathbb{R} ayant une limite finie l_- en $-\infty$ et une limite finie l_+ en $+\infty$. Montrer que f est bornée, puis que si $l_- = l_+$, alors f atteint sa borne inférieure ou sa borne supérieure.
- 3 Soit f et g deux fonctions continues sur $[0, 1]$ telles que, pour tout $x \in [0, 1] : 0 < f(x) < g(x)$. Montrer qu'il existe un réel $C > 1$ tel que, pour tout $x \in [0, 1] : C f(x) \leq g(x)$.

Exercice 11 (Fonction continue périodique non constante)

2

Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continue, périodique et non constante admet une plus petite période (strictement positive).

Exercice 12 (Borne supérieure d'une fonction continue sur l'intérieur d'un segment)

3

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer : $\sup_{[a, b]} f = \sup_{]a, b[} f$.

Exercice 13 (Lieu de continuité original)

3

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, nulle en tout irrationnel, et valant $\frac{1}{q}$ en tout rationnel $\frac{p}{q}$ mis sous sa forme canonique. Donner le lieu de continuité de f .

Exercice 14 (Fonction continue passant d'un rationnel à un irrationnel, et réciproquement)

5

Montrer qu'il n'existe pas de fonction continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ et $f(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$.

Exercice 15 (Équations fonctionnelles)

1 à 4

1 Trouver toutes les fonctions $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall x \in [0, 1], \quad f(x^2) = f(x).$$

2 Déterminer les fonctions continues sur \mathbb{R} vérifiant

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x + y) = f(x) + f(y).$$

3 Déterminer les fonctions continues sur \mathbb{R} vérifiant

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f\left(\frac{x + y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

4 Trouver toutes les fonctions f continues sur \mathbb{R} admettant pour périodes 1 et $\sqrt{2}$.

5 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ croissante et involutive (i.e. $\forall x \in \mathbb{R}, f \circ f(x) = x$). Montrer que f est l'application identique sur \mathbb{R} .

6 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f(ax + b) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, où a est fixé différent de 1 et -1 , et $b \in \mathbb{R}$. Montrer que f est constante.

7 Déterminer les applications $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ telles que $\lim_{x \rightarrow 0} f = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = 0$ et : $\forall x, y > 0$, $f(xf(y)) = yf(x)$.

Indication : étudier les points fixes de f .

12.3. FONCTIONS LIPSCHITZIENNES

Exercice 16 (Opérations sur les fonctions lipschitziennes)

0

1 Montrer que la somme de deux fonctions lipschitziennes l'est.

2 Montrer que la composée de deux fonctions lipschitziennes l'est.

3 Montrer que si f et g sont lipschitziennes sur un domaine borné, alors leur produit est lipschitzien.

4 Soit f une fonction lipschitzienne sur un segment, ne s'annulant pas. Montrer que $\frac{1}{f}$ est lipschitzienne.

Exercice 17 (Théorème du point fixe de Picard)

1

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction k -lipschitzienne avec $0 \leq k < 1$ (f est dite *contractante*).

1 Montrer que f admet au plus un point fixe.

2 On fixe $u_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite récurrente (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n converge vers un (donc le) point fixe de f . Estimer la vitesse de convergence de (u_n) vers x .

Indication : on pourra montrer que la suite (u_n) est de Cauchy.

12.4. UNIFORME CONTINUITÉ

Exercice 18 (Exemple d'uniforme continuité)

0

Montrer que $x \mapsto x \ln(x)$ est uniformément continue sur $]0, 1]$.

Exercice 19 (Uniforme continuité et caractère lipschitzien)

1

- 1 Montrer que toute fonction lipschitzienne est uniformément continue.
- 2 Montrer que la fonction racine carrée est uniformément continue mais non lipschitzienne.
- 3 Donner un exemple de fonction continue non uniformément continue.

Exercice 20 (Uniforme continuité et périodicité)

2

Montrer qu'une fonction continue sur \mathbb{R} et périodique est uniformément continue sur \mathbb{R} .

Exercice 21 (Caractérisation séquentielle de l'uniforme continuité)

2

- 1 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application uniformément continue. Montrer que si (x_n) et (y_n) sont des suites d'éléments de I telles que $\lim_n (y_n - x_n) = 0$, alors $\lim_n (f(y_n) - f(x_n)) = 0$.
- 2 Réciproquement, cette propriété séquentielle entraîne-t-elle l'uniforme continuité de f ?
- 3 Montrer que $t \mapsto \sin(t^2)$ n'est pas uniformément continue sur \mathbb{R} .

Exercice 22 (Uniforme continuité et limite en l'infini)

3

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uniformément continue, telle que $f(n) \rightarrow +\infty$. Montrer que $\lim_{+\infty} f = +\infty$.

Exercice 23 (Uniforme continuité et limite finie en un point adhérent)

3

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue, $b \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que f admet une limite finie en b . Montrer que f est uniformément continue sur $[a, b[$.

Exercice 24 (Contrôle d'une fonction uniformément continue)

4

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application uniformément continue. Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+)^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leq \alpha|x| + \beta.$$

Dénombrement

Sommaire

1. Ensembles finis	271
1.1. Notion d'ensemble fini. Cardinal d'un ensemble fini	271
1.2. Parties d'un ensemble fini	273
1.3. Ensembles finis et applications	274
2. Dénombrement	276
2.1. Opérations sur les ensembles finis	276
2.2. Dénombrement lié aux applications entre ensembles finis	278
2.3. Parties de E	279
3. Feuille de TD 11 : Dénombrement	283
3.1. Dénombrement	283
3.2. Ensembles finis, curiosités	284

Dans ce chapitre assez délicat, les démonstrations, techniques, sont facultatives. Il faut surtout comprendre en quoi les résultats de ce cours sont intuitifs. Il est conseillé de réviser le chapitre sur les ensembles, familles et applications avant d'entamer ce chapitre.

1. ENSEMBLES FINIS

1.1. NOTION D'ENSEMBLE FINI. CARDINAL D'UN ENSEMBLE FINI

Rappel (Équipotence)

Soit deux ensembles A et B . On dit que A est *en bijection avec* (ou *équipotent à*) B s'il existe une bijection de A dans B . Cette relation est clairement une relation d'équivalence.

Grâce à la symétrie, on dit que A et B *sont en bijection* (ou *équipotents*) au lieu de A est en bijection avec B .

Lemme (Indifférence de l'élément enlevé pour le cardinal)

Soit E un ensemble non vide, et $a, b \in E$. Alors $E \setminus \{a\}$ et $E \setminus \{b\}$ sont en bijection.

1.a

Démonstration

Soit $\varphi : E \rightarrow E$, telle que

$$\begin{cases} \forall x \in E - \{a, b\}, \varphi(x) = x \\ \varphi(a) = b \\ \varphi(b) = a \end{cases}$$

Cette application est clairement une involution, c'est donc une bijection de E sur E .

La restriction $\varphi|_{E \setminus \{a\}}^{E \setminus \{b\}}$ de φ définit une bijection de $E \setminus \{a\}$ sur $E \setminus \{b\}$, ces ensembles sont donc en bijection. □

Lemme Unicité du cardinal

Si n et m sont deux entiers naturels tels que $\llbracket 1, n \rrbracket$ et $\llbracket 1, m \rrbracket$ soient en bijection, alors $n = m$.

1.b

Démonstration

Montrons cette assertion par récurrence sur m . L'amorçage pour $m = 0$ est clair. Supposons le résultat établi à un rang $m \in \mathbb{N}$ fixé, montrons qu'il subsiste au rang suivant :

Soit donc un entier n tel que $\llbracket 1, n \rrbracket$ et $\llbracket 1, m + 1 \rrbracket$ soient en bijection. Soit f une bijection de $\llbracket 1, m + 1 \rrbracket$ sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. En particulier, n est non nul. En notant $m_0 = f^{-1}(n)$, on a clairement une bijection entre $\llbracket 1, m + 1 \rrbracket \setminus \{m_0\}$ et $\llbracket 1, n - 1 \rrbracket$. En outre, d'après le lemme précédent, $\llbracket 1, m + 1 \rrbracket \setminus \{m_0\}$ et $\llbracket 1, m \rrbracket$ sont en bijection. Par conséquent, $\llbracket 1, m \rrbracket$ et $\llbracket 1, n - 1 \rrbracket$ sont en bijection. D'après l'hypothèse de récurrence, on a $m = n - 1$, soit $n = m + 1$. La propriété est donc héréditaire.

L'assertion est donc établie. □

Définition (Ensemble fini)

Un ensemble E est dit *fini* s'il existe une bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sur E , pour un certain entier naturel n . Le *cardinal* (ou *nombre d'éléments*) de E est alors le nombre n , et est noté $\text{Card } E$, $\#E$ ou $|E|$.

Un ensemble non fini est dit *infini*.

1.a

Pour définir cette notion très intuitive de « nombres d'éléments », on s'appuie sur les ensembles finis les plus simples (ceux de la forme $\llbracket 1, n \rrbracket$), et on utilise la relation d'équipotence (qui est une relation d'équivalence). Autrement dit, on regroupe les ensembles finis par « classes d'équivalence ». Cette notion de cardinal d'un ensemble fini est bien définie grâce au lemme (un même ensemble fini ne peut pas avoir deux cardinaux distincts). Deux ensembles finis sont équipotents si et seulement si ils ont même cardinal.

Exemple (Ensembles finis)

- (1) L'ensemble vide est donc un ensemble fini de cardinal nul (et c'est le seul) ;
- (2) Pour tous $(p, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, $\llbracket p + 1, p + n \rrbracket$ est de cardinal n . Il suffit en effet d'introduire la bijection $x \mapsto x + p$ de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sur $\llbracket p + 1, p + n \rrbracket$.
- (3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\llbracket 0, n \rrbracket$ est de cardinal $n + 1$ (c'est un cas particulier de l'exemple précédent).
- (4) Plus généralement, $\llbracket p, q \rrbracket$ (pour $p \leq q$) est de cardinal $q - p + 1$.
- (5) $\{(-1)^n, n \in \mathbb{N}\}$ est de cardinal 2.

i

1.2. PARTIES D'UN ENSEMBLE FINI

Lemme (Ensemble fini privé d'un élément)

Si E est un ensemble fini de cardinal non nul n , et a un élément de E , alors $E \setminus \{a\}$ est un ensemble fini de cardinal $\text{Card}(E) - 1$.

1.c

Démonstration

La démonstration est similaire à celle du précédent lemme : soit en effet E un ensemble fini de cardinal non nul n . Soit f une bijection de E sur $\llbracket 1, n \rrbracket$, et $a \in E$. L'ensemble $E \setminus \{a\}$ est en bijection avec $E \setminus \{f^{-1}(n)\}$, donc avec $\llbracket 1, n - 1 \rrbracket$: il est fini de cardinal $n - 1$.

□

Théorème (Partie d'un ensemble fini)

Soit E un ensemble fini, et F une partie de E . On a :

- (1) F est un ensemble fini et $\text{Card } F \leq \text{Card } E$;
- (2) $\text{Card } F = \text{Card } E$ si et seulement si $F = E$.

1.d

Démonstration

On montre ceci par récurrence sur le cardinal de E . Il n'y a rien à prouver pour $E = \emptyset$. Pour E non vide, si $F = E$, il n'y a rien à prouver, et sinon, $F \subsetneq E$, donc il existe $a \in E$ tel que $F \subset E - \{a\}$. Ce dernier ensemble est de cardinal $\text{Card } E - 1$, ce qui prouve par hypothèse de récurrence que F est fini, et que $\text{Card } F < \text{Card } E$.

□

Cardinal et parties strictes

Un ensemble fini ne peut donc pas être en bijection avec l'une de ses parties strictes. En revanche, un ensemble infini peut-être équipotent à l'une de ses parties strictes ^a

^a et même tout ensemble infini est équipotent à l'une de ses parties strictes, c'est l'une des définitions possibles de la notion d'ensemble infini.

1.1

Partie finie d'entiers

Une partie non vide P de \mathbb{N} est finie si et seulement si elle est majorée. Ce résultat est évidemment faux en général, pour les parties de \mathbb{R} par exemple.

1.2

Exercice (Suite monotone d'entiers naturels)

On considère ici des suites d'entiers naturels indexées par \mathbb{N} .

1 Montrer que toute suite décroissante d'entiers naturels est stationnaire (*i.e.* il existe un rang à partir duquel la suite est constante).

2 Montrer que toute suite croissante d'entiers naturels est non majorée ou stationnaire.

1

1.3. ENSEMBLES FINIS ET APPLICATIONS

Proposition (Ensembles finis et surjectivité)

Soit E et F deux ensembles, F étant fini. Soit f une application de E dans F . L'image $f(E)$ de f est alors finie, $\text{Card}(f(E)) \leq \text{Card } F$, et cette inégalité est une égalité si et seulement si f est surjective.

1.e

Démonstration

L'image de f étant une partie de F , elle est finie, et $\text{Card}(f(E)) \leq \text{Card } F$. De plus, cette inégalité est une égalité si et seulement si $f(E) = F$, *i.e.* f est surjective.

□

Proposition (Ensembles finis et injectivité)

Soit E et F deux ensembles, E étant fini. Soit f une application de E dans F . L'image $f(E)$ de f est alors finie, $\text{Card}(f(E)) \leq \text{Card}(E)$, et cette inégalité est une égalité si et seulement si f est injective.

1.f

Démonstration

Montrons ceci par récurrence sur le cardinal de E .

L'amorçage pour $E = \emptyset$ est évident.

Supposons l'assertion prouvée (pour toute application $f : E \rightarrow F$) si E est de cardinal $n \in \mathbb{N}$ fixé. Montrons qu'elle subsiste au rang suivant. Soit donc E un ensemble de cardinal $n + 1$, et $f : E \rightarrow F$ une application.

Supposons dans un premier temps f injective : la restriction de f à son image à l'arrivée est une bijection, donc $f(E)$ et E sont équipotents. En particulier, $f(E)$ est un ensemble fini, de même cardinal que E .

Supposons maintenant f non injective. On peut donc trouver deux éléments distincts a et b de E tels que $f(a) = f(b)$. Bien sûr, l'image de f est également $f(E \setminus \{a\})$. En appliquant l'hypothèse de récurrence à la restriction de f à $E \setminus \{a\}$ (de cardinal n) au départ, on constate que l'image de f est finie, de cardinal au plus n . En particulier, $\text{Card}(f(E)) < \text{Card}(E)$: l'hérédité est démontrée, le résultat s'ensuit. \square

Cela donne une condition suffisante de non surjectivité (resp. de non injectivité) : il suffit que $\text{Card}(F) > \text{Card}(E)$ (resp. il suffit que $\text{Card}(E) > \text{Card}(F)$).

Théorème (Ensembles finis et bijectivité)

Étant donnés deux ensembles finis E et F , de même cardinal n , et une application f de E dans F , les propriétés suivantes sont équivalentes deux à deux :

- (1) f est injective ;
- (2) f est surjective ;
- (3) f est bijective.

1.g

Démonstration

En effet, dire que f est surjective revient à dire que $\text{Card}(f(E)) = \text{Card}(F) = n$, et dire que f est injective revient à dire que $\text{Card}(f(E)) = \text{Card}(E) = n$.

Les deux premières assertions sont donc équivalentes : elles sont également équivalente à leur conjonction, *i.e.* à la troisième assertion. \square

Dans ce contexte très particulier, il suffit, pour prouver la bijectivité, de prouver l'injectivité (ou la surjectivité). Dans un certain nombre d'exercices, on demande de prouver un résultat d'existence. On a parfois intérêt à introduire une application entre ensembles finis (le plus souvent : d'un ensemble fini sur lui-même) dont on prouve l'injectivité (résultat d'unicité), puis la surjectivité (résultat d'existence) grâce à ce théorème.

Exercice (De l'injectivité à la surjectivité)

Faire l'exercice 8 de TD.

2

Proposition (Indexation d'un ensemble fini de naturels)

Si P est une partie finie non vide de \mathbb{N} de cardinal n , alors il existe une unique bijection strictement croissante de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sur P .

1.h

Démonstration

Existence : cette propriété est claire si P un singleton. Fixons un entier naturel non nul n , et supposons la propriété établie pour toute partie P de \mathbb{N} de cardinal n . Soit P une partie de \mathbb{N} , de cardinal $n + 1$. Cette partie de \mathbb{N} est finie, donc majorée. Comme elle est en outre non vide, elle admet un plus grand élément M . D'après l'hypothèse de récurrence, on peut trouver une application strictement croissante g de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sur $P \setminus \{M\}$. La fonction f de $\llbracket 1, n + 1 \rrbracket$ dans P , coïncidant avec g sur $\llbracket 1, n \rrbracket$, et valant M en $n + 1$, est clairement une bijection strictement croissante de $\llbracket 1, n + 1 \rrbracket$ sur P .

L'existence est démontrée.

Unicité : supposons que f et g soient des bijections strictement croissantes de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sur P . L'application $f^{-1} \circ g$ est donc une bijection strictement croissante de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sur lui-même.

Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. D'après le premier exercice sur la récurrence, on a $f^{-1} \circ g(k) \geq k$, puis, par croissance de f , $g(k) \geq f(k)$.

Par symétrie des rôles joués par f et g (ou en effectuant un raisonnement analogue sur $g^{-1} \circ f$), on a $f(k) \geq g(k) : f(k) = g(k)$.

Ceci valant pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a bien $f = g$.

□

En fait, cette proposition se généralise à toute partie finie non vide d'un ensemble totalement ordonné.

2. DÉNOMBREMENT

2.1. OPÉRATIONS SUR LES ENSEMBLES FINIS

Lemme (Cardinal d'une union disjointe de deux ensembles)

Soit A et B deux ensembles finis disjoints. L'ensemble $A \cup B$ est alors fini, et :

$$\text{Card } A \cup B = \text{Card } A + \text{Card } B$$

2.a

Démonstration

Si n et m sont les cardinaux respectifs de A et B , on définit aisément une bijection de $\llbracket 1, n + m \rrbracket$ sur $A \cup B$:

□

Corollaire (Cardinal d'un complémentaire)

Soit A une partie de l'ensemble fini E . On a alors :

$$\text{Card}(E \setminus A) = \text{Card } E - \text{Card } A$$

2.b

Démonstration

En effet, A et $E \setminus A$ sont finies, disjointes, et de réunion E . □

Proposition (Cardinal d'une union disjointe de p ensembles)

Si $(A_k)_{1 \leq k \leq p}$ est une famille de p ensembles finis deux à deux disjointes, alors $\bigcup_{1 \leq k \leq p} A_k$ est un ensemble fini, et :

$$\text{Card} \left(\bigcup_{1 \leq k \leq p} A_k \right) = \sum_{1 \leq k \leq p} \text{Card } A_k$$

2.c

Démonstration

Récurrence sur p . □

Proposition (Cardinal d'une union de deux ensembles finis)

Soit A et B deux ensembles finis. L'ensemble $A \cup B$ est alors fini, et :

$$\text{Card } A \cup B = \text{Card } A + \text{Card } B - \text{Card } A \cap B$$

2.d

Démonstration

En effet, A et $B \setminus A$ (resp. $A \cap B$ et $B \setminus A$) sont disjointes, et leur union est $A \cup B$ (resp. B). □

Proposition (Cardinal d'un produit cartésien)

Si A et B sont deux ensembles finis, alors $A \times B$ est fini, et :

$$\text{Card}(A \times B) = \text{Card } A \text{ Card } B$$

2.e

Démonstration

$A \times B$ est la réunion disjointe des $\{a\} \times B$, pour a parcourant A . □

Corollaire (Cardinal de A^p)

Soit A un ensemble fini, et $p \in \mathbb{N}^*$. Alors A^p est fini, et :

$$\text{Card } A^p = (\text{Card } A)^p$$

2.f

Démonstration

Récurrence sur p .

□

2.2. DÉNOMBREMENT LIÉ AUX APPLICATIONS ENTRE ENSEMBLES FINIS

Proposition (Cardinal de E^A)

Si E et A sont finis, alors E^A est fini, de cardinal $(\text{Card } E)^{\text{Card } A}$.

2.g

Démonstration

□

Cette formule justifie *a posteriori* l'emploi de la notation E^A .

Proposition (Nombre d'applications injectives)

Étant donnés deux ensembles finis non vides E et F , de cardinaux respectifs m et n , le nombre d'applications injectives de E dans F est :

- (1) nul si $m > n$;
- (2) égal à $\frac{n!}{(n-m)!}$ sinon.

2.h

Démonstration

Le seul cas digne d'intérêt est celui où $m \leq n$.

On peut raisonner par récurrence sur n : pour tout entier naturel n , on formule l'hypothèse de récurrence suivante :

\mathcal{H}_n : pour tout entier naturel m compris entre 0 et n , et tous ensembles E et F de cardinaux respectifs m et n , l'ensemble $\Omega_{E,F}$ des injections de E dans F est de cardinal $\frac{n!}{(n-m)!}$.

L'amorçage pour $n = 0$ est clair (\emptyset^\emptyset est de cardinal 1).

Fixons un entier naturel n , supposons \mathcal{H}_n , et montrons \mathcal{H}_{n+1} : soit m un entier naturel inférieur ou égal à $n + 1$, E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs m et $n + 1$. Si $m = 0$, le résultat est clair. Si $m \geq 1$, soit a un élément de E . Se donner une injection f de E dans F , c'est se donner une image de a par f ($n + 1$ possibilités), puis une injection de $E \setminus \{a\}$ dans $F \setminus \{f(a)\}$: l'hypothèse de récurrence \mathcal{H}_m pour ces deux derniers ensembles montre que nous avons exactement $\frac{n!}{(n-(m-1))!}$ possibilités pour ce faire. Au total, l'ensemble $\Omega_{E,F}$ est de cardinal

$$(n + 1) \frac{n!}{(n + 1 - m)!} = \frac{(n + 1)!}{(n + 1 - m)!}$$

L'hérédité est bien prouvée.

En conclusion, la formule est bien valable pour tout entier naturel n , et tout entier naturel m inférieur ou égal à n . □

p -listes d'éléments distincts

Soit E un ensemble de cardinal n . Se donner une p -liste (ou p -uplet) d'éléments distincts de E , c'est se donner une application injective de $[[1, p]]$ dans E : il y a donc $\frac{n!}{(n-p)!}$ telles p -listes lorsque $p \leq n$, et aucune si $p > n$.

2.1

Définition (Permutation)

Une *permutation* d'un ensemble E est une bijection de E sur lui-même. On note \mathcal{S}_E ou \mathfrak{S}_E l'ensemble des permutations de E .

2.a

Le nombre de permutations d'un ensemble fini E est $(\text{Card } E)!$.

2.3. PARTIES DE E

Définition (Application caractéristique d'une partie)

Soit E un ensemble, et A une partie de E . L'*application caractéristique* (ou *indicatrice*) de A (dans E), notée 1_A ou χ_A , est l'application de E dans $\{0, 1\}$, telle que :

$$\forall x \in E, \quad 1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

2.b

Exercice (Fonctions caractéristiques)

Soit A et B deux parties d'un ensemble E . Écrire les fonctions $\chi_{A \cap B}$, $\chi_{E \setminus A}$ et $\chi_{A \cup B}$ en fonction de χ_A et χ_B .

3

Proposition (Indicatrices et parties)

L'application $\psi : \mathcal{P}(E) \rightarrow \{0, 1\}^E$ envoyant $A \in \mathcal{P}(E)$ sur 1_A est une bijection.

2.i

Démonstration

Sa bijection réciproque est :

□

Proposition (Cardinal d'un ensemble de parties)

Soit E un ensemble fini de cardinal n . Alors $\mathcal{P}(E)$ est fini, de cardinal 2^n .

2.j

Démonstration

Conséquence immédiate de la proposition précédente.

□

Définition (Combinaison)

Soit E un ensemble de cardinal n , et soit $p \in \mathbb{N}$. On appelle *combinaison* (de p objets (pris) dans E) une partie de E de cardinal p . Le cardinal de leur ensemble (fini car $\mathcal{P}(E)$ l'est) est noté $\binom{n}{p}$ (prononcé p parmi n).

2.c

$\binom{n}{p}$ est donc le nombre de parties de cardinal p dans un ensemble de cardinal n . La notation ne fait pas référence à E , ce qui se justifie aisément

Proposition (Formule pour les combinaisons)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

2.k

Démonstration

Soit E de cardinal n , et X_p une partie de E de cardinal p . L'ensemble Ω_{X_p} des applications injectives de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans X_p est donc de cardinal $p!$.

Notons A_p l'ensemble des parties de E de cardinal p .

L'ensemble ∇_p des applications injectives de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans E est de cardinal $\frac{n!}{(n-p)!}$.

De plus, ∇_p est l'union disjointe (de $\binom{n}{p}$ ensembles) :

$$\nabla_p = \sqcup_{X_p \in A_p} \Omega_{X_p},$$

ce qui donne le résultat. □

Évidemment, si $p > n$, $\binom{n}{p} = 0$.

Proposition (Formules combinatoires)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a :

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}, \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = 2^n$$

Si en outre n et p sont ≥ 1 , on a :

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} \text{ (triangle de Pascal)}$$

2.1

Montrer ceci par le calcul :

Démonstration

□

Montrer à nouveau ces résultats à l'aide de raisonnements combinatoires :

Démonstration

□

Exercice (Autant de parties de cardinal pair que de cardinal impair)

1 Montrer par la formule du binôme de Newton que

$$\sum_{p \text{ pair}} \binom{n}{p} = \sum_{p \text{ impair}} \binom{n}{p}$$

2 Le montrer par des interprétations ensemblistes.

4

3. FEUILLE DE TD 11 : DÉNOMBREMENT

3.1. DÉNOMBREMENT

Exercice 1 (Dénombrement concret)

0

- 1** Soit E une association de n membres. Combien y a-t-il de manières différentes de constituer un bureau constitué d'un président, d'un secrétaire et d'un trésorier (avec cumul des charges interdit) ?
- 2** Combien y a-t-il de tirages de deux dés à n faces possibles ?
- 3** Soit $E = \llbracket 1, 6 \rrbracket$. Combien peut-on former de nombres différents avec trois chiffres distincts choisis dans E ? Quelle est la somme de ces nombres ?
- 4**
- i** Combien y a-t-il d'applications strictement croissantes de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$?
 - ii** Combien y a-t-il d'applications croissantes de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$?
- 5** Un jeu de cartes contient 32 cartes. On en prend 3 successivement, sans remise. Combien de configurations permettent d'obtenir au moins un coeur ?
- 6** On dispose 4 pions numérotés de 1 à 4 sur 3 cases numérotées de 1 à 3. Une case peut éventuellement contenir plusieurs pions. De combien de façons peut-on opérer de sorte qu'une case au moins soit vide ?
- 7** Une urne contient 6 boules blanches numérotées de 1 à 6 et 5 boules noires numérotées de 1 à 5. On tire successivement 4 boules sans remise. Combien de résultats amènent 3 boules blanches et une boule noire ?
- 8** De combien de façons peut-on répartir un groupe de 10 personnes en trois groupes numérotés 1, 2 et 3 de sorte qu'il y ait au moins une personne dans chaque groupe ?
- 9** Combien y a-t-il de mots :
- i** de 6 lettres écrits avec les lettres A à F ?
 - ii** de 5 lettres écrits avec deux A et trois B ?
 - iii** de 6 lettres écrits avec exactement deux A et trois B ?
 - iv** de 6 lettres écrits avec deux A, trois B, un C ?
- 10** Combien existe-t-il d'anagrammes du mot chaise ? d'anagrammes du mot anagramme ?
- 11** Un jeu comporte 32 cartes dont 8 par couleur. Une main est constituée de 8 cartes non ordonnées.
- i** Quel est le nombre de mains possibles ?
 - ii** Combien de mains contiennent au moins un as ?
 - iii** Combien contiennent exactement un roi ?
 - iv** Combien contiennent au moins un coeur ou une dame ?
 - v** Combien ne contiennent que des cartes de 2 couleurs au plus ?
- 12** Un tiroir contient 5 paires de chaussures noires, 3 paires de chaussures vertes et 2 paires de chaussures rouges. On choisit deux chaussures au hasard et simultanément.
- i** Combien y a-t-il de tirages possibles ?
 - ii** Combien amènent deux chaussures de la même couleur ?
 - iii** Combien amènent un pied gauche et un pied droit ?
 - iv** Combien permettent de reconstituer une vraie paire de chaussures ?

Exercice 2 (Nombre de zéros)

3

Par combien de zéros se termine le nombre $1000000!$?

Exercice 3 (Formules de convolution de Vandermonde)

3

1 Montrer :

$$\forall (p, q, r) \in \mathbb{N}^3, \quad \sum_{i=0}^r \binom{p}{i} \binom{q}{r-i} = \binom{p+q}{r}.$$

2 En déduire une expression plus simple de $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2$.

Exercice 4 (Dénombrement lié à des parties)

3

1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer

$$\text{Card} \{ (A, B) \in \mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)^2, A \subset B \}.$$

2 Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geq 1$. Calculer

$$\sum_{A \subset E} \text{Card}(A), \quad \sum_{A, B \subset E} \text{Card}(A \cap B) \quad \text{et} \quad \sum_{A, B \subset E} \text{Card}(A \cup B).$$

Exercice 5 (Mines PSI 08)

3

Soit E un ensemble fini, A et B des parties de E . Combien y a-t-il de parties X de E telles que $A \cup X = B$?

Exercice 6 (X PC 08)

3

Soit E un ensemble de cardinal n et $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$. Déterminer le nombre de $X \in \mathcal{P}(E)$ telles que $A \cap X = B$.

Exercice 7 (Décomposition d'un entier en somme)

4

On fixe un entier $n \geq 1$, et $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Calculer :

$$\text{Card} \{ (a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{N}^p, a_1 + \dots + a_p = n \}.$$

3.2. ENSEMBLES FINIS, CURIOSITÉS

Exercice 8 (Monoïde fini et régulier)

1

On appelle *monoïde* un ensemble muni d'une loi de composition interne associative, admettant un élément neutre pour cette loi. Montrer qu'un monoïde fini et régulier (*i.e.* tout élément est simplifiable à gauche et à droite) est un groupe.

Exercice 9 (Élément d'un groupe fini)

1

Soit G un groupe multiplicatif fini d'élément neutre e .

- 1 Montrer que pour tout $g \in G$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $g^n = e$.
- 2 Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $g \in G$, on ait $g^n = e$.

Exercice 10 (Ensembles dénombrables)

1

Soit A et B deux ensembles. L'ensemble A est dit *équipotent* à B s'il existe une bijection de A sur B .

- 1 Montrer que l'équipotence est une relation d'équivalence.
Un ensemble est dit *dénombrable* s'il est équipotent à \mathbb{N} .
- 2 Montrer que \mathbb{Z} est dénombrable.
- 3 Montrer que \mathbb{N}^2 est dénombrable.
- 4 Montrer que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.
- 5 Montrer que \mathbb{R} n'est pas dénombrable.

Exercice 11 (Utilisation du principe des tiroirs)

2

Soit n un entier naturel non nul. On choisit $n + 1$ nombres quelconques (distincts deux à deux) dans $[[1, 2n]]$. Montrer qu'il en existe deux qui sont premiers entre eux. Montrer qu'il en existe deux tels que l'un divise l'autre.

Exercice 12 (X MP 08)

3

Calculer $\sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2)$ par trois méthodes différentes.

Exercice 13 (Parties disjointes de même somme)

5

Soit S un ensemble de 10 entiers distincts choisis parmi les nombres $1, 2, \dots, 99$. Montrer que S contient toujours deux sous-ensembles disjoints dont la somme de leurs éléments respectifs est la même.

Exercice 14 (Mondanités)

5

Monsieur et Madame Machin ont été invités à une soirée à laquelle assistaient aussi quatre autres couples, ce qui faisait un total de dix personnes. À l'arrivée des invités, un certain nombre de poignées de mains furent échangées, d'une manière imprévisible, mais sujette à deux conditions évidentes : personne n'a serré sa propre main, et aucun mari n'a serré la main de sa femme. À la fin, par curiosité, M. Machin circulait dans l'assistance en demandant à chaque personne : « Combien de mains avez-vous serrées ? ... Et vous ? ... Et vous ? » M. Machin a posé la question à neuf personnes (tout le monde, y compris sa femme), et a obtenu neuf réponses différentes. Combien de mains Madame Machin a-t-elle serrées ?

Dérivation

Sommaire

1. Dérivée en un point, fonction dérivée	287
1.1. Premières définitions	287
1.2. Opérations sur les applications dérivables en un point	290
1.3. Dérivée à gauche, dérivée à droite	292
2. Dérivabilité sur un intervalle	293
2.1. Définition et premières propriétés	293
2.2. Extremums d'une fonction dérivable. Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis	295
2.3. Étude aux bornes	298
2.4. Dérivabilité et monotonie	300
3. Dérivées successives	302
3.1. Premières définitions	302
3.2. Opérations sur les applications de classe C^k	302
4. Brève extension aux valeurs complexes	305
5. Questionnaire 8 : Dérivation	308
6. Feuille de TD 12 : Dérivation	309
6.1. Dérivabilité, calcul de dérivées	309
6.2. Dérivées successives	310
6.3. Théorèmes de Rolle, des accroissements finis	311

Dans tout ce chapitre, les applications considérées sont définies sur un intervalle I de \mathbb{R} , non réduit à un point, et à valeurs dans \mathbb{R} (sauf mention expresse du contraire).

1. DÉRIVÉE EN UN POINT, FONCTION DÉRIVÉE

1.1. PREMIÈRES DÉFINITIONS

Définition (Taux d'accroissement)

Soit x et y deux points distincts de I . On appelle *taux d'accroissement* de f entre x et y la quantité

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

1.a

Définition (Dérivabilité ponctuelle)

On dit que f est *dérivable* en un point a de I si

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

admet une limite finie lorsque x tend vers a ($x \in I \setminus \{a\}$).

le cas échéant, cette limite est appelé *nombre dérivé* (ou *dérivée*) de f en a et est notée $f'(a)$, ou $D(f)(a)$, ou $\frac{df}{dx}(a)$.

1.b

Interprétation géométrique : soit $a \in I$, et $x \in I \setminus \{a\}$. Dire que f est dérivable en a , c'est dire que la droite (AM) ($A(a, f(a))$, $M(x, f(x))$) possède une position limite *non verticale* Δ , de coefficient directeur $f'(a)$, lorsque x tend vers a . On dit que Δ est la *tangente* à Γ (graphe de f) en son point d'abscisse a :

Illustration

Une équation de Δ est $y = f(a) + (x - a)f'(a)$.

Interprétation cinématique de la dérivée

$f'(a)$ est la limite en a des taux d'accroissement de f en a : le taux d'accroissement de f entre x et a peut s'interpréter comme la vitesse moyenne algébrique entre les instants x et a (on voit f comme une fonction d'une variable temporelle dont les valeurs sont des distances) : la dérivée de f en a s'interprète donc comme la vitesse instantanée de f en a .

1.1

On peut toujours se ramener à une étude en 0 en posant $x = a + h$.

Proposition (Dérivabilité et développement limité à l'ordre 1)

f est dérivable en $a \in I$ si et seulement si existe un réel l et une application $\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$, de limite nulle en a , et tels que

$$\forall x \in I, \quad f(x) = f(a) + (x - a)l + (x - a)\varepsilon(x)$$

Le cas échéant, le réel l vaut $f'(a)$.

1.a

Démonstration

Si f s'écrit comme dans l'énoncé, alors en divisant par $x - a$, on constate que f est dérivable en a , de nombre dérivé l (et donc $l = f'(a)$). Réciproquement, on pose $l = f'(a)$, puis on définit sans avoir le choix la fonction ε (y compris en a) :

On vérifie que $\lim_a \varepsilon = 0$ et que f s'écrit comme annoncé. □

Illustration

Corollaire (De la dérivabilité à la continuité)

Si f est dérivable en a , alors elle est continue en a .

1.b

La réciproque est fautive, donnez des exemples :

Voici quelques exemples de calculs de dérivées (certaines preuves utilisent des résultats ultérieurs) :

Exemple (Dérivée ponctuelle)

(1) Si f est constante, sa dérivée en tout point $a \in \mathbb{R}$ est nulle. Plus généralement, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, l'application affine $f : x \mapsto \alpha x + \beta$ est dérivable en $a \in \mathbb{R}$ et $f'(a) = \alpha$.

(2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction puissance n -ième $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^n$ est dérivable en a et $f'(a) = na^{n-1}$. On peut le voir avec la formule du binôme de Newton

$$(a+h)^n - a^n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} h^k a^{n-k} = nha^{n-1} + h \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} h^{k-1} a^{n-k}$$

ou avec la formule sans nom.

(3) La fonction racine carrée $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable en tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, et $f'(a) = 1/(2\sqrt{a})$.

(4) La fonction logarithme \ln , définie comme primitive, est dérivable sur son domaine, et pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln'(a) = 1/a$.

(5) La fonction exponentielle est dérivable en tout réel a et $\exp'(a) = \exp(a)$.

i

Exercice (Dérivées des fonctions trigonométriques et de leurs réciproques)

Rappeler, en tout point où cela a un sens, les dérivées des fonctions trigonométriques (éventuellement hyperboliques) et leurs réciproques.

1

1.2. OPÉRATIONS SUR LES APPLICATIONS DÉRIVABLES EN UN POINT

Proposition (Linéarité de la dérivation)

Soient f et g deux applications dérivables au point a . Pour tous scalaires α, β , l'application $h = \alpha f + \beta g$ est dérivable en a , et

$$h'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$$

1.c

Démonstration

□

Cette *linéarité* de la dérivation peut s'interpréter comme une linéarité de la dérivation dans certains espaces vectoriels fonctionnels : notons $\mathcal{D}_a(I)$ l'ensemble des fonctions de I dans \mathbb{R} , dérivables en a . La proposition précédente permet d'affirmer que

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{D}_a(I) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto f'(a) \end{aligned}$$

est linéaire (c'est donc une forme linéaire).

Proposition (Dérivation d'un produit)

Soient f et g deux applications dérivables en un point a . Alors $h = fg$ est dérivable en a , et

$$h'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

1.d

Démonstration

On introduit^a par « relation de Chasles » un terme mixte, en écrivant $f(x)g(x) - f(a)g(a) = f(x)(g(x) - g(a)) + g(a)(f(x) - f(a))$, puis on revient à la définition de la dérivée en a .

^a Entraînez-vous à le montrer en utilisant la proposition 1.a page 288.

□

Proposition (Dérivée d'un quotient)

Si g est dérivable en a , avec $g(a) \neq 0$, alors g ne s'annule pas au voisinage de a , $h = \frac{f}{g}$ (définie au voisinage de a) est dérivable en a , et

$$h'(a) = \frac{g'(a)f(a) - f'(a)g(a)}{g(a)^2}$$

Si en outre f est dérivable en a , alors $h = \frac{f}{g}$ (définie au voisinage de a) est dérivable en a , avec

$$h'(a) = \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{g(a)^2}$$

1.e

Démonstration

Supposons g dérivable en a , avec $g(a) \neq 0$. g est dérivable donc continue en a , et $g(a) \neq 0$: g ne s'annule pas au voisinage de a .
Revenir alors ^a à la définition pour la première formule. Le second résulte quant à lui du premier point et de la dérivation d'un produit.

^a. Alternativement, on aurait pu voir $1/g$ comme $\text{inv} \circ g$ (où inv est la fonction inverse), puis utiliser le résultat suivant. □

Proposition (Dérivée d'une composée)

Soit $f : I \rightarrow J \subset \mathbb{R}$ une application dérivable en un point a de I et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable en $b = f(a)$. Alors $g \circ f$ est dérivable au point a , et

$$(g \circ f)'(a) = f'(a)(g' \circ f)(a)$$

1.f

Démonstration

Utiliser les développements limités (proposition 1.a) □

Proposition (Dérivation et bijection réciproque)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue strictement monotone sur I , dérivable en a , et telle que $f'(a) \neq 0$. L'application f est alors une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$, f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$, et

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

1.g

Démonstration

□

Illustration

Pour retrouver cette formule (mais non pour la démontrer), on peut également dériver la relation $f^{-1} \circ f = \text{Id}_I$ en a .

On retrouve les dérivées des applications réciproques des fonctions trigonométriques.

Proposition (Dérivée d'une puissance)

Soit f dérivable en a . Pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f^n est dérivable en a , et

$$(f^n)'(a) = n f'(a) f^{n-1}(a)$$

Cette formule reste valable si $n \in \mathbb{Z}$ si en outre $f(a) \neq 0$.

1.h

Démonstration

□

Exercice (Calculs de dérivées, dérivabilité)

Faire la première question de l'exercice 2 de TD.

2

1.3. DÉRIVÉE À GAUCHE, DÉRIVÉE À DROITE

Comme pour la notion de limite, il existe des notions de dérivabilité à gauche et à droite :

Définition (Dérivabilité ponctuelle à gauche ou à droite)

Soit $a \in I$, distinct de l'extrémité gauche de I (resp. de l'extrémité droite de I). On dit que f est *dérivable à gauche* (resp. *à droite*) en a si l'application $x \in I \setminus \{a\} \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie à gauche (resp. à droite) en a .

Si elle existe, cette limite est appelée (*nombre*) *dérivé(e) à gauche* (resp. *à droite*) en a , et notée $f'_g(a)$ (resp. $f'_d(a)$).

1.c

f est dérivable à gauche (resp. à droite) en a si et seulement si $f|_{I \cap]-\infty, a]}$ (resp. $f|_{I \cap [a, +\infty[}$) est dérivable en a . Par conséquent, la dérivabilité à gauche (resp. à droite) entraîne la continuité à gauche (resp. à droite).

Illustration

f est dérivable en a (intérieur à I) si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite en a , et si $f'_g(a) = f'_d(a)$. La dérivée vaut alors cette valeur commune.

Bien sûr, les résultats généraux sur les opérations entre fonctions dérivables en a admettent des analogues pour les fonctions seulement dérivables à gauche en a , ou seulement dérivables à droite en a , peu utilisés en pratique (faites seulement attention à la composition).

Exercice (Une caractérisation de la dérivabilité)

Faire l'exercice 8 de TD.

3

2. DÉRIVABILITÉ SUR UN INTERVALLE

2.1. DÉFINITION ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

Définition (Dérivabilité sur un intervalle)

On dit que f est *dérivable sur I* si f est dérivable en tout point de I . L'application, notée $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$, qui à tout point de I associe son nombre dérivé est appelée *fonction dérivée* de f . Elle peut également être notée $D(f)$ ou $\frac{df}{dx}$.

On note $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ (ou simplement $\mathcal{D}(I)$) l'ensemble des fonctions de I dans \mathbb{R} , dérivables sur I .

2.a

La dérivabilité sur I est donc une accumulation de propriétés locales : comme pour la continuité, cette accumulation va permettre de trouver des propriétés *globales*.

Définition (Fonction continûment dérivable)

On dit que $f \in \mathbb{R}^I$ est de *classe \mathcal{C}^1* sur I si f est dérivable sur I et si f' est continue sur I . On note $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ l'ensemble de ces applications. On dit également que f est *continûment dérivable*.

2.b

Bien sûr, une application f dérivable sur I (et *a fortiori* de classe \mathcal{C}^1 sur I) est continue sur I .

Comme conséquence des résultats sur la dérivabilité en un point, on obtient les résultats suivants sur les opérations entre applications dérivables sur I .

Proposition (Fonction dérivée d'une combinaison linéaire)

Soient f et g deux applications dérivables sur I . Pour tous scalaires α, β , l'application $\alpha f + \beta g$ est dérivable sur I , et

$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$$

2.a

Proposition (Fonction dérivée d'un produit)

Soient f et g deux applications dérivables sur I . Alors fg est dérivable sur I , et

$$(fg)' = f'g + fg'$$

2.b

Proposition (Fonction dérivée d'un quotient)

Si g ne s'annule pas sur I et est dérivable sur I , alors $\frac{1}{g}$ est dérivable sur I , et

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$$

Si en outre f est dérivable sur I , alors $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I , et

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

2.c

Proposition (Fonction dérivée d'une composée)

Soit $f : I \rightarrow J \subset \mathbb{R}$ une application dérivable sur I et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable sur J . Alors $g \circ f$ est dérivable sur I , et

$$(g \circ f)' = f'(g' \circ f)$$

2.d

Proposition (Fonction dérivée d'une puissance)

Soit f dérivable sur I . Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f^n est dérivable sur I , et

$$(f^n)' = n f' f^{n-1}$$

Cette formule reste valable si $n \in \mathbb{Z}$ si en outre f ne s'annule pas.

2.e

Proposition (Fonction dérivée et bijection réciproque)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue strictement monotone sur I , dérivable sur I . Alors f est une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$, et pour tout a tel que $f'(a) \neq 0$, f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$, et

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

2.f

Exercice (Effets de la dérivation)

Faire l'exercice 1 de TD.

4

Bien sûr, ces résultats admettent des analogues pour les fonctions de classe \mathcal{C}^1 . Structurellement, on en déduit notamment que $\mathcal{C}^1(I)$ est une \mathbb{R} -algèbre.

2.2. EXTREMUMS D'UNE FONCTION DÉRIVABLE. THÉORÈME DE ROLLE, THÉORÈME DES ACCROISSEMENTS FINIS

Proposition (Extremum local et dérivée)

Si f admet un extremum local en a intérieur à I , et si f est dérivable en a , alors :

$$f'(a) = 0$$

2.g

Démonstration

Soit \mathcal{V} un voisinage de a tel que $f|_{\mathcal{V}}$ admette un extremum local en a (disons un maximum, pour fixer les idées). Soit $x \in \mathcal{V} \setminus \{a\}$. Le taux d'accroissement de f entre x et a est positif ou nul si $x < a$, et négatif ou nul si $x > a$. On a donc $f'_g(a) \geq 0$ et $f'_d(a) \leq 0$. Par dérivabilité de f en a , on a donc $f'(a) = 0$. □

Illustration

La réciproque est bien sûr fausse :

Illustration

Attention à la condition a intérieur à I :

Illustration

Théorème de Rolle

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une application définie sur le segment $[a, b]$, avec $a < b$, à valeurs réelles. On suppose que f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

2.h

Démonstration

Si f est constante, le résultat est clair (tout point c de $]a, b[$ convient). Supposons donc f non constante. Continue sur le segment $[a, b]$, la fonction f est bornée et atteint ses bornes m et M . N'étant pas constante, l'une de ces bornes ne vaut pas la valeur commune de f en a et b : l'une de ces bornes est atteinte en un point c de $]a, b[$. La fonction f présente un extremum global donc local en le point c intérieur à $]a, b[$: f est de dérivée nulle en c . □

Illustration

Aucune hypothèse n'est superflue (y compris le fait que f soit à valeurs réelles) :

Exercice (Tangente passant par un point donné)

Faire la troisième question de l'exercice 13 de TD.

5

Théorème (Égalité des accroissements finis)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une application définie sur le segment $[a, b]$, avec $a < b$, à valeurs réelles. On suppose que f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe c dans $]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.

2.i

Démonstration

Interpoler f en a et b par une fonction affine g , puis appliquer le théorème de Rolle à $h = f - g$.

□

Illustration

Le travail principal a donc été effectué pour le théorème de Rolle : l'égalité des accroissements finis en est à la fois une extension et un corollaire.

Il n'y a aucune raison que les « c » dont il est question dans ces deux théorèmes soient uniques.

Comme corollaire, voici l'importante inégalité des accroissements finis :

Théorème (Inégalité des accroissements finis)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une application définie sur le segment $[a, b]$, avec $a < b$, à valeurs réelles. On suppose que f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$.

On suppose qu'il existe des réels m et M tels que $m \leq f' \leq M$. Pour tous éléments x et y de $[a, b]$ vérifiant $x \leq y$, on a :

$$m(y - x) \leq (f(y) - f(x)) \leq M(y - x)$$

2.j

Démonstration

Soit x et y des éléments de $[a, b]$. Si $x = y$, l'assertion est évidente. Sinon, il existe c strictement compris entre x et y tel que $\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c)$. Le résultat s'ensuit immédiatement.

□

Corollaire (Caractère lipschitzien et dérivation)

Soit f une application continue sur I , dérivable sur l'intérieur $\overset{\circ}{I}$ de I . La fonction f est k -lipschitzienne sur I si et seulement si

$$\forall x \in \overset{\circ}{I}, \quad |f'(x)| \leq k$$

2.k

Démonstration

Si f est k -lipschitzienne, on fixe $x \in \overset{\circ}{I}$, et on fait tendre y vers x dans $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$, ce qui donne $|f'(x)| \leq k$. Si réciproquement $|f'| \leq k$ sur $\overset{\circ}{I}$, alors l'inégalité des accroissements finis donne immédiatement le résultat. \square

Exemple (Fonction continûment dérivable)

- (1) La fonction arctan est donc 1-lipschitzienne^a.
- (2) Une fonction f de classe \mathcal{C}^1 sur un segment est donc $(\max |f'|)$ -lipschitzienne.

i

^a. Cela peut vous aider à montrer que f continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} admettant des limites finies en $+\infty$ et $-\infty$ est uniformément continue

2.3. ÉTUDE AUX BORNES

Proposition (Fonctions continûment dérivables, étude aux bornes)

Soit f une application continue de $[a, b]$ dans \mathbb{R} , de classe \mathcal{C}^1 sur $]a, b[$. On suppose que f' possède une limite finie l en a à droite. Alors f est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b[$, avec $f'(a) = l$.

2.1

Démonstration

Il ne reste qu'à prouver la dérivabilité de f en a et que $f'(a) = l$ (f' sera alors continue en a). Soit $x \in]a, b[$. Il existe $c_x \in]a, x[$ tel que $\frac{f(a)-f(x)}{a-x} = f'(c_x)$. Comme c_x tend vers a lorsque x tend vers a , on constate que f est dérivable en a , et que $f'(a) = l$. \square

Illustration

Si on remplace la condition « f' possède une limite finie l en a à droite » par « f' possède une limite égale à $+\infty$ ou $-\infty$ en a à droite », alors la courbe représentative de f admet au point $(a, f(a))$ une demi-tangente verticale (la démonstration est analogue).

Illustration

On a bien sûr un résultat analogue en b . On utilise souvent cette proposition sous la variante suivante :

Théorème du prolongement continûment dérivable

On suppose f de classe \mathcal{C}^1 sur $]a, b[$, admettant une limite finie en a , ainsi que sa dérivée. La fonction f est alors prolongeable par continuité en a , en une application de classe \mathcal{C}^1 .

2.m

En réalité, on pourrait supprimer la condition f admet une limite finie en a (elle résulte des autres), mais c'est un peu délicat à montrer.

Exercice (Dérivation, dérivabilité)

Faire l'exercice 2 de TD.

6

2.4. DÉRIVABILITÉ ET MONOTONIE

Proposition (Dérivation et constance)

Toute application constante $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur l'intervalle I , et, pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$. Réciproquement, si f est continue sur I , dérivable sur l'intérieur de l'intervalle I et si f' est l'application nulle, alors f est constante sur I .

2.n

Démonstration

Un sens est trivial, l'autre résulte aisément de l'égalité des accroissements finis. □

On aurait aussi pu appliquer le corollaire 2.k de la page 298 dans le cas particulier où $k = 0$.

Proposition (Fonctions de même dérivée)

f, g dérivables sur un intervalle I ont des dérivées égales si et seulement si elles diffèrent d'une constante, *i.e.* :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \quad g(x) = f(x) + \lambda$$

2.o

Attention aux fonctions définies sur autre chose qu'un intervalle (d'ailleurs, cette remarque est valable pour tout le cours d'analyse).

Proposition (Dérivée et monotonie)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable. L'application f est croissante (resp. décroissante) sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$).

2.p

Démonstration

Si f est croissante, alors tous les taux d'accroissements de f entre deux réels sont positifs ou nuls. Pour tout x de I , le nombre dérivé $f'(x)$ est donc positif ou nul. Réciproquement, si $f' \geq 0$, alors l'égalité des accroissements finis montre que tout taux d'accroissement de f est positif ou nul, *i.e.* f est croissante. Considérer $-f$ si f est décroissante. □

Proposition (Dérivée et stricte monotonie)

Soit f une application dérivable et monotone. L'application f est strictement monotone sur I si et seulement si le lieu de non annulation de f' est dense dans I (*i.e.* f' n'est nulle sur aucun sous-intervalle de I d'intérieur non vide).

2.q

Démonstration

Sachant que f est monotone, f est strictement monotone si et seulement si elle est injective si et seulement si il n'existe pas a et b distincts tels que $f(a) = f(b)$, si et seulement si il n'existe pas a et b distincts tels que f soit constante sur $[a, b]$, si et seulement si f n'est constante sur aucun sous-intervalle de longueur non nulle, si et seulement si f' n'est nulle sur aucun sous-intervalle de longueur non nulle. \square

On en déduit immédiatement le résultat suivant :

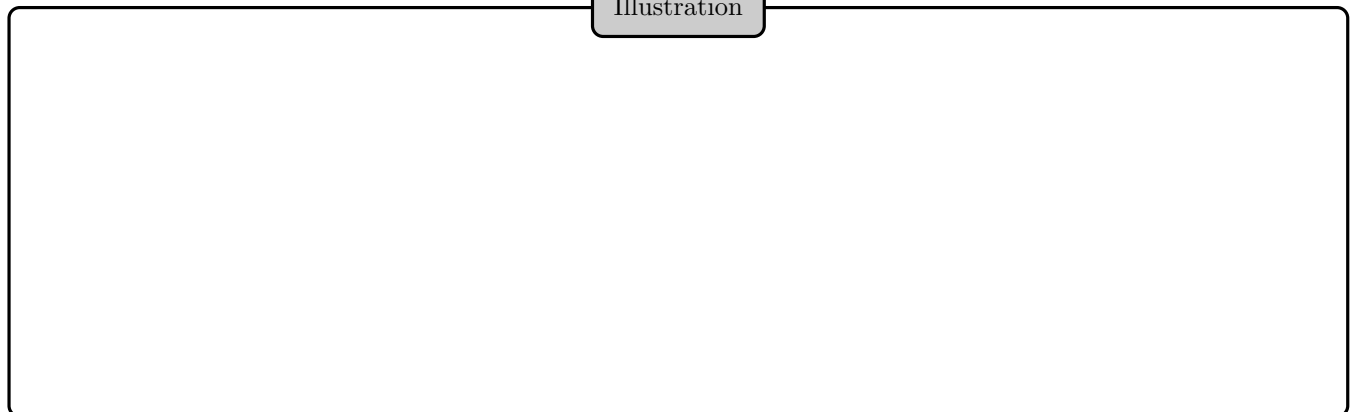
Corollaire (Condition suffisante de stricte monotonie)

Si f , dérivable sur I , est de dérivée à valeurs strictement positives (resp. strictement négatives), alors f est strictement croissante (resp. est strictement décroissante).

2.r

Attention cependant, cette condition suffisante n'est pas nécessaire : donner un exemple de fonction strictement monotone (et dérivable) dont la dérivée s'annule une fois (puis une infinité de fois)

Illustration



Encore une fois, faites attention si vous ne travaillez pas sur un intervalle : la fonction inverse sur \mathbb{R}^* , bien que de dérivée strictement négative en tout réel non nul, n'est pas décroissante.

Exercice (Produit de fonctions dérivables, croissantes et positives)

Soit $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$, dérivables, croissantes et positives. Montrer ^a que fg est croissante.

^a. Vous l'avez fait sans supposer les fonctions dérivables au chapitre sur les fonctions numériques

7

Exercice (Fonction à dérivée logarithmique bornée (X PC 09))

Faire l'exercice 7 de TD dans le cas où f est de signe constant.

8

3. DÉRIVÉES SUCCESSIVES

3.1. PREMIÈRES DÉFINITIONS

Définition (Dérivée d'ordre n)

Soit f une application de I dans \mathbb{R} . On pose $f^{(0)} = f$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $f^{(n)}$ est définie et dérivable sur I , on pose :

$$f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $f^{(n)}$ existe, on dit que f est n fois dérivable sur I , et $f^{(n)}$ est appelée (*application*) *dérivée n -ième*, ou *dérivée d'ordre n* de f sur I .

L'application $f^{(n)}$ peut également être notée $D^n(f)$ ou encore $\frac{d^n f}{dx^n}$.

3.a

On note souvent f'' et f''' pour les dérivées seconde et troisième de f (lorsqu'elles existent).

Une fonction n fois dérivable (pour $n \geq 1$) est continue, ainsi que $f^{(k)}$, pour tout $k < n$.

Si f est dérivable n fois sur I , alors pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $f^{(k)}$ est dérivable $n - k$ fois sur I , et $f^{(n)} = (f^{(k)})^{(n-k)}$.

Définition (Fonction k fois continûment dérivable)

Soient $k \in \mathbb{N}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application k fois dérivable. On dit que f est de *classe \mathcal{C}^k* sur I , ou que f est *k fois continûment dérivable* sur I , si, de plus, $f^{(k)}$ est continue sur I .

On note $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ (ou $\mathcal{C}^k(I)$) l'ensemble des applications de classe \mathcal{C}^k de I dans \mathbb{R} .

On dit que f est de *classe \mathcal{C}^∞* sur I , ou que f est *indéfiniment dérivable* sur I , si elle est k fois dérivable, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

On note $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de classe \mathcal{C}^∞ de I dans \mathbb{R} .

3.b

Une application appartenant à $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ n'est donc rien d'autre qu'une application continue de I dans \mathbb{R} . Bien entendu, pour tout $k \geq 1$, on a les inclusions suivantes :

$$\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) \supset \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}) \supset \dots \supset \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$$

De plus

$$\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$$

En particulier, toutes les dérivées d'une application de classe \mathcal{C}^∞ sont continues.

Exemple (La fonction inverse est indéfiniment dérivable)

La fonction inverse inv est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* (resp. sur \mathbb{R}_-^*), et, pour tout entier naturel k , tout réel non nul x :

$$inv^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}$$

i

3.2. OPÉRATIONS SUR LES APPLICATIONS DE CLASSE \mathcal{C}^k

Dans ce paragraphe, k désigne un entier non nul. On laissera le lecteur déduire de ces résultats les analogues pour les fonctions de classe \mathcal{C}^∞ .

Proposition (Classe et combinaisons linéaires)

Soient f, g, k fois dérivables, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda f + \mu g$ est k fois dérivable sur I , et

$$(\lambda f + \mu g)^{(k)} = \lambda f^{(k)} + \mu g^{(k)}$$

Si f et g sont de classe \mathcal{C}^k , alors $\lambda f + \mu g$ l'est également.

3.a

Proposition (Formule de Leibniz)

Soient f, g, k fois dérivables. La fonction fg est alors k fois dérivable sur I , et :

$$(fg)^{(k)} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} f^{(i)} g^{(k-i)}$$

Si f et g sont de classe \mathcal{C}^k , alors fg l'est également.

3.b

Démonstration

□

Proposition (Classe et composition)

Soit $f : I \rightarrow J \subset \mathbb{R}$ de classe k fois dérivable sur I et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ k fois dérivable sur J . Alors $g \circ f$ est k fois dérivable sur I . Si f et g sont de classe \mathcal{C}^k , alors $g \circ f$ l'est également.

3.c

Notez que l'on ne donne pas de formule pour $(g \circ f)^{(k)}$ (c'est trop laid).

Proposition (Classe et inverse)

Si f est k fois dérivable et f ne s'annule pas sur I , alors $\frac{1}{f}$ est k fois dérivable. Si f est en outre de classe \mathcal{C}^k , alors $\frac{1}{f}$ l'est également.

3.d

Démonstration

□

Proposition (Classe et bijection réciproque)

Soit $f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$. On suppose que

$$\forall x \in I, \quad f'(x) > 0$$

ou que

$$\forall x \in I, \quad f'(x) < 0$$

Alors f réalise une bijection de I sur $J = f(I)$, et sa bijection réciproque est aussi de classe \mathcal{C}^k .

3.e

Démonstration

□

Exemple (Fonctions indéfiniment dérivables)

Les applications polynomiales, exponentielle, cosinus, sinus sont de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .
ln est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* .La fonction tangente est de classe \mathcal{C}^∞ sur son domaine de définition.Les applications $x \mapsto x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) sont de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* .Les applications ch, sh, th sont de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .Les applications arcsin et arccos sont de classe \mathcal{C}^∞ sur $] - 1, 1[$. La fonction arctan est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

ii

Exercice (Théorème du prolongement k fois continûment dérivable)Proposer et montrer un énoncé du théorème du prolongement k fois continûment dérivable.

9

Exercice (Dérivées successives)

Faire l'exercice 10 de TD.

10

4. BRÈVE EXTENSION AUX VALEURS COMPLEXES

I désigne un intervalle de \mathbb{R} d'intérieur non vide. On considère un élément a de I , et $f : I \rightarrow \mathbb{C}$.

Définition (Dérivabilité ponctuelle d'une fonction à valeurs complexes)

On dit que f est *dérivable* en a si le quotient ^a

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

possède une limite finie (complexe) lorsque x tend vers a (en appartenant à $I \setminus \{a\}$). Lorsqu'elle existe, cette limite s'appelle *nombre dérivé* de f en a et se note $f'(a)$, $D(f)(a)$ ou $\frac{df}{dx}(a)$.

a. Pour une fonction complexe, parler de taux d'accroissement n'aurait pas grand sens

4.a

Proposition (Caractérisation de la dérivabilité par les parties réelle et imaginaire)

La fonction f est dérivable en a si et seulement si $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont dérivables en a , et on a alors :

$$f'(a) = (\operatorname{Re} f)'(a) + i (\operatorname{Im} f)'(a)$$

4.a

Démonstration

Il suffit de décomposer f en $\operatorname{Re}(f) + i \operatorname{Im}(f)$. □

Grâce à cette proposition, beaucoup des résultats valables pour les fonctions réelles et la dérivabilité s'étendent aux fonctions complexes, par exemple :

Proposition (De la dérivabilité à la continuité, cas complexe)

Si f est dérivable en a , alors elle est continue en a .

4.b

Les opérations sur les fonctions dérivables, et les formules associées, sont encore valables : une combinaison linéaire (resp. le produit, le quotient, la composée (faire attention, la première application doit être à valeurs réelles)) de fonctions dérivables l'est. On en déduit des propriétés structurelles pour l'ensemble des fonctions de I dans \mathbb{C} , dérivables en un point fixé a de I .

Définition (Dérivabilité sur un intervalle d'une fonction à valeurs complexes)

On dit que f est *dérivable sur* I si f est dérivable en tout point de I . L'application, notée $f' : I \rightarrow \mathbb{C}$, qui à tout point de I associe son nombre dérivé est appelée *fonction dérivée* de f . Elle peut également être notée $D(f)$ ou $\frac{df}{dx}$. On note $\mathcal{D}(I, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions de I dans \mathbb{C} , dérivables sur I .

4.b

Proposition (Dérivée nulle d'une fonction à valeurs complexes)

Soit f dérivable sur I . f est constante si et seulement si sa dérivée est identiquement nulle sur I .

4.c

Démonstration

f est constante si et seulement si $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ le sont. □

Comme dans le cas réel, il est important de travailler sur un intervalle.

Bien sûr, les résultats sur les opérations et les fonctions dérivables s'étendent (combinaison linéaire, produit, continuité de toute fonction dérivable, etc.).

Proposition (Dérivabilité, conjugaison, et exponentielle)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ dérivable sur I . Les fonctions \bar{f} et e^f le sont alors également, $(\bar{f})' = \overline{f'}$ et $(e^f)' = f'e^f$.

4.d

Démonstration

□

On définit de même les notions de dérivées successives.

Proposition (Dérivées successives et parties réelle et imaginaire)

f admet une dérivée n -ième sur I si et seulement si $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ admettent des dérivées n -ièmes sur I , et on a alors :

$$(\operatorname{Re}(f))^{(n)} = \operatorname{Re}(f^{(n)}) \quad \text{et} \quad (\operatorname{Im}(f))^{(n)} = \operatorname{Im}(f^{(n)}).$$

4.e

On définit encore les fonctions de classe \mathcal{C}^k sur I ($k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$), et les ensembles $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{C})$. Chacun d'entre eux est un espace vectoriel complexe, et un anneau. La formule de Leibniz est toujours valable.

On retrouve les formules $\sin(x + n\frac{\pi}{2}) = \sin^{(n)}(x)$ et $\cos(x + n\frac{\pi}{2}) = \cos^{(n)}(x)$, en remarquant que

$$\frac{d^n e^{ix}}{dx^n} = i^n e^{ix} = e^{i(x+n\pi/2)}.$$

Nous avons vu que le théorème de Rolle (et donc l'égalité des accroissements finis) n'est pas valable pour une fonction à valeurs complexes (exemple de $f : x \mapsto e^{ix}$ entre 0 et 2π). Il n'y a pas non plus lieu d'étudier la monotonie d'une fonction à valeurs complexes.

Cependant, l'inégalité des accroissements finis est toujours valable :

Théorème (Inégalité des accroissements finis, cas complexe)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une application définie sur le segment $[a, b]$, avec $a < b$. On suppose que f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et qu'il existe M tels que

$$\forall x \in I, \quad |f'(x)| \leq M$$

Alors

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$$

4.f

Démonstration

Nous ne prouvons pas ce théorème à ce stade du cours (il est facile à prouver une fois l'outil intégral disponible si on suppose f de classe \mathcal{C}^1). Cependant, il n'est pas difficile d'en montrer une forme légèrement plus faible, et tout aussi utile :

$$|f(b) - f(a)| \leq 2M|b - a|$$

En effet, les fonctions $|\operatorname{Re}(f)|$ et $|\operatorname{Im}(f)|$ sont majorées par M , et l'inégalité des accroissements finis pour les fonctions à valeurs réelles $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ donnent

$$|\operatorname{Re}(f)(b) - \operatorname{Re}(f)(a)| \leq M|b - a| \quad \text{et} \quad |\operatorname{Im}(f)(b) - \operatorname{Im}(f)(a)| \leq M|b - a|$$

L'inégalité triangulaire complexe donne alors le résultat annoncé. \square

5. QUESTIONNAIRE 8 : DÉRIVATION

- 1 Si $\lim_{+\infty} f = 0$ et f est dérivable et strictement croissante, alors f' tend vers 0 en $+\infty$.
- 2 Si f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$, alors f est strictement croissante au voisinage de 0.
- 3 Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en 0 uniquement ?
- 4 Si f , définie sur un segment, est continue et convexe, alors elle est lipschitzienne.
- 5 Si f , définie sur un segment, est dérivable deux fois, alors elle est lipschitzienne.
- 6 Si f est définie sur un segment, dérivable, et strictement croissante, alors f' ne s'annule qu'un nombre fini de fois.
- 7 Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable à droite en tout point, et si $f'_d(x)$ est nul pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors f est constante.

6. FEUILLE DE TD 12 : DÉRIVATION

Sauf mention contraire, les fonctions considérées sont définies sur un intervalle I d'intérieur non vide, et à valeurs réelles.

6.1. DÉRIVABILITÉ, CALCUL DE DÉRIVÉES

Exercice 1 (Effets de la dérivation)

0

On considère une fonction dérivable f . Que dire de sa dérivée si f est paire ? impaire ? périodique ?

Exercice 2 (Dérivation, dérivabilité)

0

1 Dériver, en tout point où cela est possible, $x \mapsto \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{x}}}$.

2 La fonction $x \mapsto \cos \sqrt{x}$ est-elle dérivable en 0 ?

3 Montrer que

$$g : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \sin \frac{1}{x}$$

est prolongeable par continuité en 0, et que ce prolongement \tilde{g} est dérivable en 0, mais non de classe \mathcal{C}^1 .

Exercice 3 (Dérivée et comportement asymptotique)

2

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, dérivable sur \mathbb{R}_+^* .

1 On suppose que f' tend vers $l \in \mathbb{R}_+^*$ en $+\infty$. Que dire du comportement asymptotique de f en $+\infty$?

2 On suppose que f' tend vers 0 en $+\infty$. Que dire du comportement asymptotique de f en $+\infty$?

3 On suppose que f tend vers 0 en $+\infty$. Que dire du comportement asymptotique de f' en $+\infty$? Que dire si on suppose en outre f monotone (X PC 09) ?

Exercice 4 (Signe de la dérivée)

2

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I , et $a, b \in I$, $a < b$. On suppose que f ne s'annule pas sur $]a, b[$ et que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que $f'(a)f'(b) \leq 0$.

Exercice 5 (Équations fonctionnelles et dérivation)

2

1 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad f(b) - f(a) = (b - a)f' \left(\frac{a + b}{2} \right)$$

Montrer que f est polynomiale de degré inférieur ou égal à 2. Réciproque ?

2 Déterminer l'ensemble E des fonctions f de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , vérifiant, pour tout réel $x : f \circ f(x) = \frac{x}{2} + 3$.

3 (Centrale MP 09) Caractériser les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} telles que $f \circ f = f$.

Exercice 6 (Idées reçues sur les dérivées)

2

- 1 Donner un exemple de fonction strictement croissante et dérivable sur \mathbb{R} , dont la dérivée s'annule une infinité de fois.
- 2 Donner un exemple de fonction dérivable en 0, de dérivée strictement positive en 0, mais non croissante au voisinage de 0.

Exercice 7 (Fonction à dérivée logarithmique bornée (X PC 09))

2

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, où $a < b$, et $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$. On suppose que $f(a) = 0$ et qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall x \in [a, b], |f'(x)| \leq k|f(x)|$. Montrer que f est identiquement nulle.

Exercice 8 (Une caractérisation de la dérivabilité)

3

Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ continue en 0, $l \in \mathbb{R}$. Montrer que f est dérivable en 0 et $f'(0) = l$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall h, k \in]0, \delta[, \quad \left| \frac{f(h) - f(-k)}{h + k} - l \right| \leq \varepsilon$$

Exercice 9 (Centrale PSI 09)

3

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, dérivable en $a \in \mathbb{R}$. Soit (x_n) et (y_n) deux suites réelles de limite a . On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N} : x_n \neq y_n$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n}.$$

- 1 On suppose : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n < a$ et $y_n > a$. Quelle est la limite de (u_n) ?
- 2 On suppose que f est de classe \mathcal{C}^1 au voisinage de a . Que dire de (u_n) ?
- 3 Que se passe-t-il dans le cas général ?

6.2. DÉRIVÉES SUCCESSIVES

Exercice 10 (Dérivées successives)

0

Calculer, pour tout entier naturel n , la dérivée d'ordre n de

- 1 $x \mapsto (x^3 + 2x - 7)e^x$.
- 2 \cos^3 .
- 3 $x \mapsto 1/(x^2 - 1)$.

Exercice 11 (Application combinatoire de la formule de Leibniz)

2

Soit $n \in \mathbb{N}$. En dérivant n fois la fonction $x \mapsto x^n(1-x)^n$, trouver $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.

Exercice 12 (Fonction non nulle dont tous les moments sont nuls en 0)

2

Montrer que l'application $f : x \mapsto e^{-1/x^2}$ se prolonge en une application g de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , et que $g^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6.3. THÉORÈMES DE ROLLE, DES ACCROISSEMENTS FINIS

Exercice 13 (Applications directes du théorème de Rolle)

0

1 Soit f continue sur $[a, +\infty[$ (pour un certain $a \in \mathbb{R}$), et dérivable sur $]a, +\infty[$. On suppose que $f(a) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Montrer qu'il existe $c \in]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

2 Soit f dérivable sur \mathbb{R} , admettant une même limite finie en $+\infty$ et $-\infty$. Montrer f' s'annule.

3 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable, telle que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que pour tout $d \in \mathbb{R} \setminus]a, b]$, il existe une tangente au graphe Γ de f passant par le point $(d, 0)$.

Exercice 14 (Rolle itéré)

1

n désigne un entier naturel non nul.

1 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que si f s'annule en $n + 1$ points distincts, alors f' s'annule en n points distincts sur $]a, b[$.

2 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable. Montrer que si f s'annule en $n + 1$ points distincts, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

3 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable. Si $f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n)}(a) = f(b) = 0$, montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

4 Montrer que si un polynôme réel P possède (au moins) n racines réelles distinctes ($n \geq 2$), alors son polynôme dérivé P' possède (au moins) $n - 1$ racines réelles distinctes.

5 Montrer que pour tout $n \geq 2$, tous réels a et b , le polynôme $X^n + aX + b$ admet au plus trois racines réelles distinctes.

6 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dérivable sur \mathbb{R} , T -périodique ($T > 0$), s'annulant au moins n fois sur $[0, T[$. Montrer que f' s'annule au moins n fois sur $]0, T[$.

7 Que dire d'une fonction polynomiale coïncidant avec la fonction sinus en une infinité de points ?

Exercice 15 (Égalité de Taylor-Lagrange)

1

Si f est de classe \mathcal{C}^n sur $[a, b]$, dérivable $n + 1$ fois sur $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Indication : considérer la fonction auxiliaire

$$g : x \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) + \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} A,$$

où A est une constante préalablement fixée, afin d'appliquer le théorème de Rolle.

Exercice 16 (Règle de l'Hospital (X PC 09))

1

Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables, g' ne s'annulant pas sur $]a, b[$.

1 Montrer l'existence de $c \in]a, b[$ tel que : $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

2 En déduire que si $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ tend vers l lorsque x tend vers a ($x > a$), alors il en est de même pour $\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$.

3 Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^x}{(x+1)e^x - 1}$.

Exercice 17 (Théorème de Darboux)

1 et 4

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable. Montrer que $f'(I)$ est un intervalle.

Exercice 18 (Prolongement dérivable)

2

Montrer que la fonction

$$f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$$

est prolongeable par continuité en 0. Soit F ce prolongement. Montrer que F est dérivable en 0.

Exercice 19 (Application de l'égalité des accroissements finis)

3

Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, 1])$, vérifiant $f(1) - f(0) = 1$. Montrer que pour tout entier naturel non nul n , il existe des éléments distincts x_1, \dots, x_n de $[0, 1]$ tels que :

$$\sum_{k=1}^n f'(x_k) = n.$$

Exercice 20 (ENS 09)

4

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 telle que $f(0) = 0$ et $|f'(0)| < 1$. Montrer que $\Omega = \{x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = 0\}$ est un ouvert.

Dimension finie

Sommaire

1. Dimension d'un espace vectoriel	313
2. Dimension d'un sous-espace vectoriel	318
3. Rang d'une famille finie de vecteurs	320
4. Applications linéaires et dimension finie	321
4.1. Structure des \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie	321
4.2. Applications linéaires et coordonnées	321
4.3. Le théorème du rang et ses conséquences	323
4.4. Formes linéaires et hyperplans	326
5. Questionnaire 9 : Dimension finie	328
6. Feuille de TD 13 : Dimension finie	329
6.1. Familles de vecteurs	329
6.2. Sous-espaces vectoriels	329
6.3. Applications linéaires	330
6.4. Rang	332

Dans tout ce chapitre, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} et E un \mathbb{K} -espace vectoriel

1. DIMENSION D'UN ESPACE VECTORIEL

Définition (Espace finiment engendré)

Un \mathbb{K} -espace vectoriel E est dit *finiment engendré* s'il admet une famille génératrice finie.

1.a

Exemple (Espaces finiment engendrés)

- (1) L'espace vectoriel trivial $\{0\}$ est donc finiment engendré, ainsi qu'une droite ou un plan vectoriel (et l'espace \mathbb{R}^3).
- (2) Plus généralement, \mathbb{K}^n est un espace vectoriel finiment engendré.
- (3) $\mathbb{R}[X]$ n'est pas finiment engendré.

i

Voici la proposition fondamentale dont les autres résulteront, et qui relie familles génératrices et libres avec la cardinalité :

Proposition (fondamentale en dimension finie)

Soit (x_1, \dots, x_n) (où $n \in \mathbb{N}^*$) une famille de vecteurs de E , et soit aussi (y_0, \dots, y_n) une famille de vecteurs de $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$. La famille (y_0, \dots, y_n) est alors liée.

1.a

Démonstration

Par récurrence sur n . C'est clair lorsque $n = 1$ (les vecteurs y_0 et y_1 sont alors colinéaires).

Supposons le résultat vrai au rang $n \geq 1$ fixé, et montrons-le au rang $n + 1$. On considère une famille (x_1, \dots, x_{n+1}) de vecteurs de E , et une famille (y_0, \dots, y_{n+1}) de vecteurs de $\text{Vect}(x_1, \dots, x_{n+1})$. Pour tout entier $m \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$, il existe des scalaires $\lambda_{1,m}, \dots, \lambda_{n+1,m}$ tels que :

$$y_m = \sum_{1 \leq k \leq n+1} \lambda_{k,m} x_k.$$

Si les scalaires $\lambda_{n+1,0}, \dots, \lambda_{n+1,n+1}$ sont nuls, alors les vecteurs y_0, \dots, y_{n+1} appartiennent à $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$, et sont donc liés par hypothèse de récurrence. Sinon, on peut – quitte à réordonner les vecteurs y_0, \dots, y_{n+1} – supposer $\lambda_{n+1,n+1}$ non nul. L'idée consiste alors se débarrasser des coefficients selon le nouveau vecteur x_{n+1} , en posant, pour tout entier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$z_m = y_m - \frac{\lambda_{n+1,m}}{\lambda_{n+1,n+1}} y_{n+1},$$

On vérifie alors que z_0, \dots, z_n appartiennent à $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$, et forment donc – d'après l'hypothèse de récurrence – une famille liée : il existe des scalaires non tous nuls μ_0, \dots, μ_n , tels que

$$\sum_{0 \leq m \leq n} \mu_m z_m = 0_E.$$

En posant $\mu_{n+1} = -\frac{1}{\lambda_{n+1,n+1}} \sum_{0 \leq m \leq n} \lambda_{n+1,m} \mu_m$, on constate que la combinaison linéaire $\sum_{0 \leq m \leq n+1} \mu_m y_m$ n'est pas triviale, mais à résultat nul : la famille (y_0, \dots, y_{n+1}) est liée. □

Corollaire (de la proposition fondamentale)

Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{K} . Soit (x_1, \dots, x_n) une famille de n vecteurs de E . Si cette famille est génératrice dans E , toute famille d'éléments de E d'au moins $n + 1$ vecteurs est liée. Si cette famille est libre, aucune famille d'au plus $n - 1$ vecteurs n'est génératrice dans E .

1.b

Démonstration

Soit (y_1, \dots, y_k) une famille de vecteurs de E .

Dans le cas où $k \geq n + 1$, alors (y_1, \dots, y_{n+1}) – donc sa surfamille (y_1, \dots, y_k) – est liée.

Dans le cas où $k < n$, supposer le caractère générateur de (y_1, \dots, y_k) entraîne le caractère lié de (x_1, \dots, x_n) , ce qui prouve le résultat par contraposition. □

Dans un espace vectoriel finiment engendré, toute famille libre est finie.

Si pour tout entier naturel n , on peut trouver des familles libres d'au moins n vecteurs de E , alors E n'est pas finiment engendré.

Exercice (Lemme de l'ajout liant)

Montrer que si (x_1, \dots, x_n) est libre et (x_1, \dots, x_n, y) est liée, alors $y \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$.

1

Théorème de la base incomplète

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel finiment engendré, et (x_1, \dots, x_m) (resp. (y_1, \dots, y_n)) une famille libre (resp. une famille génératrice finie de E) (m et n sont des entiers naturels non nuls).

Il est possible de compléter la famille (x_1, \dots, x_m) à l'aide de vecteurs de la famille (y_1, \dots, y_n) de manière à former une base de E .

1.c

La démonstration est assez technique, en voici d'abord un résumé : on choisit une famille « intermédiaire » entre la famille libre (x_1, \dots, x_m) et la famille génératrice $(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$ qui reste libre, et dont le nombre de termes soit maximal. On montre alors que cette famille est génératrice.

Démonstration

Pour clarifier la rédaction, on effectue le changement de notation $x_{m+i} = y_i$, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Ainsi, $(y_1, \dots, y_n) = (x_{m+1}, \dots, x_{m+n})$. La famille (x_1, \dots, x_m) est libre, mais pas nécessairement génératrice. La famille (x_1, \dots, x_{m+n}) est génératrice, mais pas nécessairement libre. On considère l'ensemble :

$$S = \{\text{Card } I, (\llbracket 1, m \rrbracket \subset I \subset \llbracket 1, m+n \rrbracket) \wedge ((x_i)_{i \in I} \text{ est libre})\}.$$

S est une partie non vide (elle comprend m) et majorée (par $m+n$) de \mathbb{N} , donc elle admet un plus grand élément α , provenant d'(au moins) une famille libre $(x_i)_{i \in I}$, dont on cherche à montrer le caractère générateur. Il suffit de montrer que pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $y_j = x_{m+j}$ appartient à $\text{Vect}(x_i)_{i \in I}$. Soit donc $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ quelconque. Si $j+m \in I$, alors y_j est l'un des vecteurs de $(x_i)_{i \in I}$, et l'assertion est évidente.

Si $j+m \notin I$, alors $\text{Card}(I \cup \{j+m\}) = \alpha + 1$, et la famille $(x_i)_{i \in I \cup \{j+m\}}$ est liée : il en existe une combinaison linéaire non triviale à résultat nul. D'après le lemme de l'ajout liant, $x_{j+m} \in \text{Vect}(x_i)_{i \in I}$.

La famille $(x_i)_{i \in I}$ est libre et génératrice dans E : c'est une base de E . □

Un cas particulier intéressant : une famille génératrice pouvant être liée, il n'est pas question de lui adjoindre des vecteurs pour en faire une base. Cependant, on peut former une base en lui ôtant un ou plusieurs vecteurs (cas particulier du théorème précédent), sauf¹ dans le cas où l'espace vectoriel est nul. Par conséquent, de toute famille génératrice d'un espace vectoriel non nul, on peut extraire une base.

De même, toute famille libre d'un espace finiment engendré non nul E peut se compléter en une base de E .

Bien sûr, on ne peut pas adjoindre n'importe quel vecteur, et il est fort possible qu'on ait plusieurs choix convenables : donner des exemples.

Corollaire (Existence d'une base)

Tout espace vectoriel finiment engendré, non réduit au vecteur nul, admet une base.

1.d

1. à moins qu'on accepte les familles indexées par l'ensemble vide

Démonstration

Un tel espace vectoriel admet une famille génératrice finie, famille dont on peut extraire une base. □

Théorème (Définition de la dimension)

Si E est un \mathbb{K} -espace vectoriel finiment engendré, non réduit au vecteur nul, toutes les bases de E sont finies et ont le même nombre d'éléments. 1.e

On rappelle que le nombre d'éléments (ou cardinal) d'une famille est le cardinal de son ensemble d'indexation (ou de sa source si on la voit comme une application).

Définition (Dimension)

Dans ce contexte, ce nombre appelé *dimension* de E , et noté $\dim E$. Par convention, la dimension de l'espace vectoriel nul est 0. Un espace vectoriel qui n'est pas de dimension finie est dit de dimension infinie. 1.b

Démonstration

Considérons deux bases (x_1, \dots, x_m) et (y_1, \dots, y_n) de E (il en existe, et elles sont finies, d'après la proposition fondamentale). La famille (x_1, \dots, x_m) est génératrice, et (y_1, \dots, y_n) est libre, donc $n \leq m$. En échangeant les rôles des deux bases, $m \leq n$. Finalement, $m = n$. □

Exemple (Base canonique)

Comme \mathbb{K}^n admet pour base sa base canonique, de cardinal n , \mathbb{K}^n est de dimension finie n . ii

Ainsi, un espace vectoriel est finiment engendré si et seulement si il est de dimension finie (on utilisera dorénavant plutôt cette dernière expression).

Un espace vectoriel est de dimension nulle si et seulement si il est réduit au vecteur nul.

Nouvelles définitions d'une droite et d'un plan vectoriel : espaces vectoriels de dimensions 1 et 2 respectivement.

Importance du corps de base : \mathbb{C} est un *plan* vectoriel réel, mais aussi une *droite* vectorielle complexe.

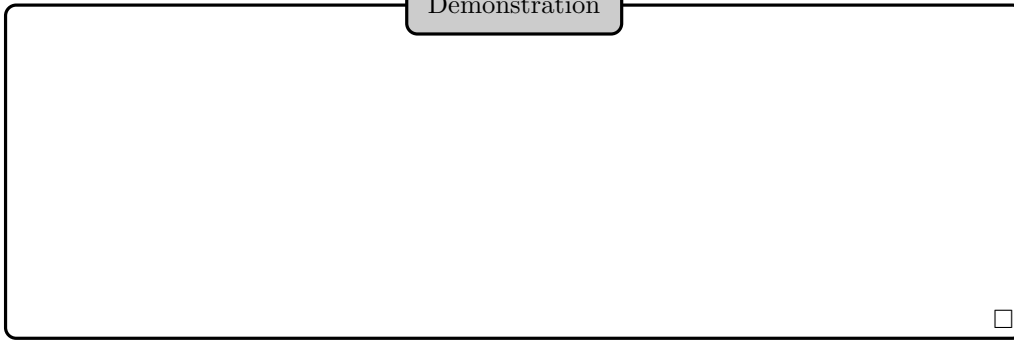
Voilà une proposition très importante en pratique :

Proposition (Caractérisation des bases en dimension finie connue)

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Soit (x_1, \dots, x_n) une famille de n éléments de E . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (1) (x_1, \dots, x_n) est libre.
 - (2) (x_1, \dots, x_n) engendre E .
 - (3) (x_1, \dots, x_n) est une base.
- 1.f

Démonstration



Grâce à cette proposition, si on connaît la dimension n de E , on peut juger si une famille de vecteurs de E est une base de E : on limite l'étude à son éventuelle liberté ou à son éventuel caractère générateur (il est souvent plus fastidieux de vérifier qu'une famille est génératrice), puis on précise que cette famille est bien de cardinal n .

Une famille génératrice de E doit avoir au moins $n (= \dim E)$ vecteurs (contraposée : pour qu'une famille ne soit pas génératrice, il suffit qu'elle ait strictement moins de n vecteurs). Cependant, une famille de plus de n vecteurs peut ne pas être génératrice :

Une famille libre de E ne doit pas avoir plus de n vecteurs (contraposée : une famille de plus de n vecteurs est liée). Cependant, une famille de moins de n vecteurs peut très bien être liée :

Exemple (Dimensions)

Soit (x_1, \dots, x_m) une famille libre de vecteurs de E . On a alors : $\dim \text{Vect}(x_1, \dots, x_m) = m$.
Si E' est isomorphe à E de dimension finie, alors E' est de dimension finie, la même que E .

iii

Exercice (Base en dimension 4)

Soit $(u_1, \dots, u_4) = ((1, 2, 3, 1), (2, 1, 2, 1), (0, 1, 2, 3), (0, 0, 1, 1))$. Montrer que (u_1, \dots, u_4) est une base de \mathbb{K}^4 .

2

Exercice (Travail en basse dimension)

Parcourir l'exercice 1 de la feuille de TD. On pourra y revenir quand on aura terminé le cours.

3

Proposition (Dimension d'un produit cartésien)

Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_m)$ et $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ sont deux bases respectives des espaces vectoriels de dimensions finies E et F ($m, n \in \mathbb{N}^*$), alors la famille $((e_1, 0), \dots, (e_m, 0), (0, f_1), \dots, (0, f_n))$ est une base de $E \times F$. En particulier, $\dim E \times F = \dim E + \dim F$.

1.g

Démonstration

□

La formule $\dim E \times F = \dim E + \dim F$ subsiste si E ou F est de dimension nulle.

Cette formule passe mal. Pour éviter d'écrire l'énormité $\dim(E \times F) = \dim(E) \dim(F)$, on peut se rappeler que $\mathbb{K}^m \times \mathbb{K}^n$ est isomorphe à \mathbb{K}^{m+n} , ou prendre le cas où $F = \{0\}$.

Par une récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dim(E^n) = n \dim(E)$.

Exercice (Isomorphisme entre somme et produit en cas de somme directe)

Montrer que si F et G sont supplémentaires dans E , alors $E = F \oplus G$ et $F \times G$ sont isomorphes. En particulier, si les espaces vectoriels considérés sont de dimension finie, alors $\dim E = \dim F + \dim G$.

4

2. DIMENSION D'UN SOUS-ESPACE VECTORIEL

Proposition (Dimension d'un sous-espace vectoriel)

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n , et soit F un sous-espace vectoriel de E . L'espace vectoriel F est alors de dimension finie, et $\dim F \leq \dim E$. De plus, on a l'égalité $\dim E = \dim F$ si et seulement si $E = F$.

2.a

Démonstration

Écartons le cas évident où F est nul.

Considérons l'ensemble Ω des familles libres de vecteurs de F . Cet ensemble n'est pas vide, puisque F admet au moins un vecteur non nul. Comme tout élément de Ω est une famille libre de vecteurs de E , son cardinal est d'au plus n . En particulier, il existe un élément de Ω , de cardinal maximal. Cette famille de vecteurs de F est libre par appartenance à Ω , et génératrice (grâce au lemme de l'ajout liant) : c'est une base de F , qui est donc de dimension finie.

Cette base de F pouvant se compléter en une base de E , on a nécessairement $\dim F \leq \dim E$.

Si $E = F$, alors évidemment, $\dim E = \dim F$. Si réciproquement $\dim E = \dim F$, prenons une base de F . Elle peut se compléter en une base de E . Par contrainte sur le cardinal commun aux bases de E , cette complétion n'en est pas vraiment une, et cette base de F est une base de E .

□

Proposition (Dimension d'un supplémentaire)

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n , et F un sous-espace vectoriel de E . Alors F admet un supplémentaire G dans E , et la dimension de tout supplémentaire de F est $\dim E - \dim F$.

2.b

Démonstration

On écarte le cas évident où F est trivial. On sait que F admet alors une base (x_1, \dots, x_m) . On peut compléter cette famille libre de vecteurs de E en une base $(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n)$ de E . On vérifie alors que $\text{Vect}(x_{m+1}, \dots, x_n)$ est un supplémentaire de F dans E .

Si G est un supplémentaire quelconque de F dans E , on a vu précédemment que $\dim F + \dim G = \dim(F + G)$. □

Dans le contexte de la démonstration précédente, si F et G admettent respectivement pour bases (x_1, \dots, x_m) et (y_1, \dots, y_k) , alors $(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_k)$ (la *concaténée* de ces deux familles, dans cet ordre) est une base de E .

Proposition (Dimension d'une somme (Formule de Grassmann))

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, et F, G deux sous-espaces vectoriels de E . On a alors :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

2.c

Démonstration

Déjà, $F, G, F + G$ et $F \cap G$ sont de dimension finie. $F \cap G$ admet un supplémentaire G' dans G . Il suffit alors de prouver que G' et F sont supplémentaires dans $F + G$, et la proposition précédente donne le résultat annoncé. □

Remarquez l'analogie avec les cardinaux des ensembles finis. Nous verrons que cette analogie va encore plus loin.

Corollaire (Caractérisation de la supplémentarité en dimension finie)

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel de dimension finie E . Deux quelconques de ces trois propositions entraînent la troisième :

- (1) $F \cap G = \{0\}$.
- (2) $F + G = E$.
- (3) $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

2.d

Démonstration

□

Proposition (Dimension d'une somme de sous-espace)

Soit F_1, \dots, F_p des sous-espaces vectoriels de E , de dimension finie. On a

$$\dim\left(\sum_{i=1}^p F_i\right) \leq \sum_{i=1}^p \dim(F_i),$$

et cette inégalité est une égalité si et seulement si la somme est directe.

2.e

Démonstration

□

3. RANG D'UNE FAMILLE FINIE DE VECTEURS

Définition (Rang d'une famille finie de vecteurs)

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, et $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E . Le *rang* de la famille \mathcal{F} est la dimension (finie) du sous-espace vectoriel de E engendré par \mathcal{F} :

$$\text{rg}(x_1, \dots, x_n) = \dim \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$$

3.a

Dans ce contexte, comme (x_1, \dots, x_n) est une famille génératrice de $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$, le rang r de \mathcal{F} vérifie $0 \leq r \leq n$. De plus, si E est de dimension finie, le rang r vérifie $r \leq \dim E$.

Donner des exemples d'inégalités strictes :

Le rang est nul si et seulement si chacun des vecteurs x_i est nul.

Le rang est égal à 1 si et seulement si au moins un des vecteurs n'est pas nul, et tous les autres vecteurs lui sont colinéaires.

Le rang est égal à deux si et seulement si la famille possède deux vecteurs non colinéaires x_{i_0} et x_{j_0} , et tous les autres x_i sont combinaisons linéaires de ces vecteurs.

En pratique, comment déterminer le rang de (x_1, \dots, x_n) ? L'idée naturelle est d'extraire de (x_1, \dots, x_n) une base de $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ (si la famille n'est pas nulle), dont le nombre de termes est la dimension de $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$, donc le rang de (x_1, \dots, x_n) .

On observe que le rang d'une famille est inchangé si :

- (1) On multiplie l'un des vecteurs par un scalaire non nul.
- (2) On échange des vecteurs de la famille.
- (3) On a ôté à l'un des vecteurs une combinaison linéaire des autres (attention aux erreurs de raisonnement lors de l'application de cette observation).
- (4) On a supprimé un vecteur combinaison linéaire des autres.

Une fois la famille génératrice (x_1, \dots, x_n) « allégée » en une famille libre, mais toujours génératrice de $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$, il suffit d'en calculer le nombre de termes pour obtenir le rang de la famille.

4. APPLICATIONS LINÉAIRES ET DIMENSION FINIE

4.1. STRUCTURE DES \mathbb{K} -ESPACES VECTORIELS DE DIMENSION FINIE

Théorème d'isomorphie

Deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes si et seulement si ils ont même dimension.

4.a

Démonstration

Soit E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie n .
 On sait déjà que si E et F sont isomorphes, alors ils ont même dimension.
 Si réciproquement E et F ont même dimension, montrons qu'ils sont isomorphes.
 Si E et F sont de dimension nulle, alors ils ne comprennent que le vecteur nul, et sont donc isomorphes.
 Sinon, ils admettent des bases (x_1, \dots, x_n) et (y_1, \dots, y_n) et on définit une application linéaire φ de E dans F en envoyant x_i sur y_i , pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Cette application linéaire envoyant une base sur une base, elle réalise un isomorphisme de E sur F . □

Pour tout corps de base, et tout entier n , il existe au moins un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n ($\{0_{\mathbb{K}}\}$ si $n = 0$, et \mathbb{K}^n sinon).

Ainsi, la structure d'un espace vectoriel de dimension finie sur un corps \mathbb{K} fixé est entièrement déterminée par un simple nombre entier. La structure d'espace vectoriel (au moins de dimension finie), bien qu'elle fasse appel à celles de groupe, anneau, corps, est donc très simple.

En corollaire, on peut fixer un représentant agréable de chaque classe d'isomorphie, à savoir \mathbb{K}^n .

4.2. APPLICATIONS LINÉAIRES ET COORDONNÉES

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimensions finies respectives m et n non nulles. Se donner une application linéaire f de E dans F revient à donner l'image d'une base \mathcal{B} de E dans F . Si \mathcal{C} est une base de F , nous sommes donc ramenés à donner, pour chacun des m vecteurs de \mathcal{B} , ses n coordonnées dans \mathcal{C} . Cela signifie que f est déterminée par ces mn nombres (dans un certain ordre). Nous reviendrons largement sur cette observation lors du cours sur les matrices.

Plus formellement, on a la :

Proposition (Dimension de $L(E, F)$)

Si E et F sont deux espaces de dimension finies respectives m et n , alors $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie, et :

$$\dim \mathcal{L}(E, F) = mn$$

4.b

Démonstration

□

Proposition (Image d'un vecteur par une application linéaire)

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies respectives m et n non nulles, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_m)$ et $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ deux bases respectives de E et F . Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

Pour tout $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$, soit $\begin{pmatrix} c_{1,k} \\ \vdots \\ c_{n,k} \end{pmatrix}$ le système de coordonnées de $u(e_k)$ dans \mathcal{C} .

Soit x un vecteur quelconque de E , de système de coordonnées $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$ dans \mathcal{B} . Alors

le système de coordonnées de $y = u(x)$ dans \mathcal{C} est $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$, où :

$$\forall l \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \beta_l = \sum_{k=1}^m c_{l,k} \alpha_k$$

4.c

Démonstration

□

Exercice (Un isomorphisme en cas de supplémentarité)

Soit E et H des espaces vectoriels de dimension finie, F et G des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E . Montrer que $\mathcal{L}(E, H)$ et $\mathcal{L}(F, H) \times \mathcal{L}(G, H)$ sont isomorphes. Ce résultat subsiste-t-il en dimension infinie ?

5

Donnée d'une application linéaire sur des sous-espaces

Supposons que $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_p$, et que l'on se soit donné $u_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$ pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$. Il existe alors une unique application linéaire u de E dans F telle que, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $u|_{E_i} = u_i$.

4.1

4.3. LE THÉORÈME DU RANG ET SES CONSÉQUENCES

Définition (Rang d'un morphisme)

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels, et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$. Si $\text{Im}(\varphi)$ est de dimension finie, on appelle *rang* de φ la dimension de $\text{Im}(\varphi)$.

4.a

Exemple (Rang d'un morphisme)

- (1) Si E est de dimension finie de base (e_1, \dots, e_m) , le rang de φ est le rang de la famille $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_m))$ (cela reste vrai pour une famille génératrice), et donc inférieur ou égal m .
- (2) Si F est de dimension finie n , alors le rang r (est fini et) vérifie $r \leq n$.
- (3) Si E et F sont de dimensions finies respectives m et n , alors $r \leq \min(m, n)$.
- (4) Bien sûr si E ou F est de dimension finie n , alors on peut parler du rang r de toute application $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$.

i

Lemme préparatoire au théorème du rang

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors φ induit un isomorphisme de tout supplémentaire de $\text{Ker } \varphi$ dans E sur $\text{Im } \varphi$.

4.d

Démonstration

Soit G un supplémentaire de $\text{Ker } \varphi$ dans E . On restreint φ à G au départ, et à $\text{Im } \varphi$ à l'arrivée, ce qui donne une application linéaire ψ de G dans $\text{Im } \varphi$. On montre aisément que cette application est surjective et injective : elle réalise donc un isomorphisme de G sur $\text{Im } \varphi$.

□

On utilise surtout ce lemme en dimension finie, mais il est valable en dimension quelconque. En corollaire immédiat, on a le fameux :

Théorème du rang

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels, E étant de dimension finie. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$. On a alors :

$$\text{rg}(\varphi) + \dim \text{Ker } \varphi = \dim E$$

4.e

Démonstration

L'existence d'un supplémentaire G de $\text{Ker } \varphi$ dans E et le lemme précédent donnent immédiatement le résultat.

□

En pratique, cette formule, la *formule du rang*, est très utile, plus que l'isomorphisme du lemme. C'est pour cette raison qu'on a qualifié de lemme la première assertion et de théorème la seconde.

La dimension de F n'intervient pas : il peut très bien ne pas être de dimension finie. En fait, il est facile de s'en rendre compte car en « grossissant » F , on ne change rien au rang de φ et à la dimension de $\text{Ker } \varphi$ (alors qu'il serait compliqué de « grossir » E).

Même si $E = F$, $\text{Im } \varphi$ et $\text{Ker } \varphi$, sous-espaces vectoriels de E , ne sont pas nécessairement supplémentaires. En revanche, ils le sont si et seulement si ils sont en somme directe (d'après le corollaire 2.d page 319).

En corollaire, on obtient une sorte d'analogue de la proposition sur les applications entre ensembles finis de même cardinal :

Proposition (Isomorphismes en même dimension finie)

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de même dimension finie n , et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

- (1) f est injective ;
- (2) f est surjective ;
- (3) f est un isomorphisme.

4.f

Démonstration

f est injective (resp. surjective) si et seulement si $\dim \ker(f) = 0$ (resp. $\text{rg}(f) = n$). La formule du rang ($\text{rg } \varphi + \dim \text{Ker } \varphi = n$) montre donc l'équivalence entre les deux premières assertions. Ces deux assertions sont donc équivalentes à leur conjonction, c'est-à-dire à la dernière.

□

On applique très souvent cette dernière proposition dans le cas d'un endomorphisme en dimension finie.

Proposition (Inverse unilatéral d'un endomorphisme en dimension finie)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, où E est de dimension finie. S'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $w \in \mathcal{L}(E)$) tel que $v \circ u = \text{Id}_E$ (resp. $u \circ w = \text{Id}_E$), alors $u \in \text{GL}(E)$, et v (resp. w) est la bijection réciproque de u .

4.g

Démonstration

□

Attention, ce résultat ne subsiste pas en dimension infinie : penser au morphisme de dérivation dans $\mathbb{R}[X]$, où aux shifts dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Proposition (Conservation du rang par composition avec un isomorphisme)

Soit E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, G)$.

- (1) Si u est un isomorphisme, alors v et $v \circ u$ ont même rang.
- (2) Si v est un isomorphisme, alors u et $v \circ u$ ont même rang.

4.h

Démonstration

La première assertion est immédiate (il suffit d'ailleurs que u soit surjective pour que $\text{rg}(v) = \text{rg}(v \circ u)$).

La seconde provient du fait que $\text{Im}(v \circ u) = v(\text{Im } u)$, et du fait qu'un isomorphisme envoie un sous-espace vectoriel sur un sous-espace vectoriel de même dimension (il suffit d'ailleurs que v soit injective pour que $\text{rg}(v \circ u) = \text{rg}(u)$).

□

Exercice (Caractérisations de supplémentarité de l'image et du noyau)

Faire l'exercice 14 de TD.

6

Exercice (Sommes d'images et de noyaux)

Faire l'exercice 17 de TD.

7

4.4. FORMES LINÉAIRES ET HYPERPLANS

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$.

On rappelle qu'une forme linéaire sur un \mathbb{K} -espace vectoriel E est un élément de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. Ce dernier ensemble est appelé *dual* de E , et est parfois noté E^* . Si E est de dimension finie, alors E^* est de dimension finie, celle de E .

Exercice (Forme linéaire non nulle)

Montrer qu'une forme linéaire est soit nulle, soit surjective.

8

Proposition (Preliminaire à la définition d'un hyperplan)

Soit H un sous-espace vectoriel de E . Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (1) $\dim H = n - 1$;
- (2) Il existe une droite vectorielle D de E telle que $E = D \oplus H$;
- (3) Il existe une forme linéaire non nulle f de E telle que $H = \text{Ker } f$.

4.i

Démonstration

- (1) \Rightarrow (2) : soit $u \in E \setminus H$, et $D = \mathbb{K}u$. On vérifie alors que $E = D \oplus H$.
 (2) \Rightarrow (3) : prendre un vecteur directeur x de D complété en une base de E par des vecteurs de H , et envoyer x sur 1, tous les autres sur 0.
 (3) \Rightarrow (1) : appliquer le théorème du rang.

□

Définition (Hyperplan)

On se place dans le contexte de la proposition précédente. On appelle *hyperplan (vectoriel)* de E tout sous-espace vectoriel de E vérifiant l'une de ces conditions. On dit également que f *définit* H .

4.b

Si un sous-espace vectoriel F de E contient un hyperplan H de E , alors $F = E$ ou $F = H$. De façon pompeuse, les hyperplans sont les éléments maximaux pour la relation d'ordre d'inclusion dans l'ensemble des sous-espaces vectoriels stricts de E .

Pour tout scalaire non nul λ , λf définit encore H . En fait, deux formes linéaires non nulles définissent un même hyperplan si et seulement si elles sont proportionnelles (c'est-à-dire liées).

Pour tout vecteur u n'appartenant pas à H , on a $E = H \oplus \mathbb{K}u$.

Proposition (Équation d'hyperplan)

Soit \mathcal{B} une base de E . On note x_1, \dots, x_n les composantes d'un vecteur x de E selon les vecteurs de \mathcal{B} . Une partie H de E est un hyperplan (de E) si et seulement si elle admet dans \mathcal{B} une équation du type

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0,$$

où les scalaires a_1, \dots, a_n ne sont pas tous nuls.

4.j

Démonstration

Introduire la forme linéaire $x \mapsto \sum_{i=1}^n a_i x_i$ dans un sens, évaluer en x la forme linéaire considérée dans l'autre. □

Deux équations $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$ et $\sum_{i=1}^n b_i x_i = 0$ (ni les a_i ni les b_i n'étant tous nuls) définissent un même hyperplan si et seulement si il existe un scalaire (non nul) λ tel que $(b_1, \dots, b_n) = \lambda(a_1, \dots, a_n)$.

On peut définir la notion d'hyperplan en dimension infinie, en ne conservant que les deux dernières assertions (qui sont bien toujours équivalentes en dimension infinie).

Exemple (Équations d'hyperplans)

- (1) $x + 2y = 0$ est une équation d'hyperplan dans \mathbb{R}^2 , c'est-à-dire une équation de droite.
- (2) $x + y + z = 0$ est une équation d'hyperplan dans \mathbb{R}^3 , c'est-à-dire une équation de plan.
- (3) $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n x_i = 0\}$ est une équation d'hyperplan dans \mathbb{R}^n .

ii

Exercice (Intersection d'hyperplans)

On suppose E de dimension finie n . Montrer que l'intersection de m hyperplans de E est de dimension au moins $n - m$.

Réciproquement, montrer que tout sous-espace vectoriel de E de dimension $n - m$ est l'intersection de m hyperplans.

9

5. QUESTIONNAIRE 9 : DIMENSION FINIE

- 1 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^7)$ telle que $\text{Im } f + \text{Ker } f = \mathbb{R}^7$.
 - a $\text{Im } f$ et $\text{Ker } f$ sont supplémentaires dans \mathbb{R}^7 ;
 - b $f|_{\text{Im } f}$ est injective.
- 2 Soit F un sous-espace vectoriel non trivial d'un espace vectoriel E de dimension n , et soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .
 - a Existe-t-il une sous-famille de \mathcal{B} qui soit une base de F ?
 - b Existe-t-il une sous-famille de \mathcal{B} qui soit une base d'un supplémentaire de F (dans E) ?

6. FEUILLE DE TD 13 : DIMENSION FINIE

6.1. FAMILLES DE VECTEURS

Exercice 1 (Travail en basse dimension)

0

- 1** Montrer que les vecteurs $x_1 = (0, 1, 1)$, $x_2 = (1, 0, 1)$ et $x_3 = (1, 1, 0)$ forment une base de \mathbb{R}^3 . Trouver dans cette base les composantes du vecteur $x = (1, 1, 1)$.
- 2** Donner, dans \mathbb{R}^3 , un exemple de famille libre, qui n'est pas génératrice.
- 3** Donner, dans \mathbb{R}^3 , un exemple de famille génératrice, mais qui n'est pas libre.
- 4** Dans \mathbb{R}^4 on considère l'ensemble E des vecteurs (x_1, x_2, x_3, x_4) vérifiant l'équation $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. L'ensemble E est-il un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 ? Si oui, en donner une base.
- 5** Soient $v_1 = (1, 0, 0, -1)$, $v_2 = (2, 1, 0, 1)$, $v_3 = (1, -1, 1, -1)$, $v_4 = (7, 2, 0, -1)$ et $v_5 = (-2, -3, 1, 0)$. Donner une base du sous-espace vectoriel $F = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$. Déterminer un supplémentaire G de F dans \mathbb{R}^4 .
- 6** (Mines MP 08) Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x = y - 2z \text{ et } y = 3t\}$. Quelle est la structure de F ? Donner une base de F et la compléter en une base de \mathbb{R}^4 .

Exercice 2 (Liberté d'une famille de formes linéaires)

4

- Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, et $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ des formes linéaires sur E ($k \in \mathbb{N}^*$). Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :
- (1) $(\varphi_1, \dots, \varphi_k)$ est libre dans $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.
 - (2) Pour tous scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, il existe un vecteur x de E tel que, pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, on ait : $\varphi_i(x) = \lambda_i$.

Exercice 3 (Travail dans le \mathbb{Q} -espace vectoriel des réels)

5

- 1** (*X MP 08*) On se place dans le \mathbb{Q} -espace vectoriel \mathbb{R} . La famille $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ est-elle liée ?
- 2** Le \mathbb{Q} -espace vectoriel \mathbb{R} est-il de dimension finie ?

6.2. SOUS-ESPACES VECTORIELS

Exercice 4 (Supplémentaire commun à deux sous-espaces (Mines MP 08))

2

- Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie.
- 1** Soit F et G deux sous-espaces vectoriels stricts de E . Montrer que $F \cup G \neq E$.
- 2** Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E ayant même dimension. Montrer que F et G possèdent un supplémentaire commun.

Exercice 5 (Sous-espaces stables par un endomorphisme nilpotent cyclique (*X PC 09*))

2

- Soit E un espace vectoriel de dimension n , (e_1, \dots, e_n) une base de E et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}, u(e_i) = e_{i+1}$ et $u(e_n) = 0$. Déterminer les sous-espaces stables par u .

Exercice 6 (Sous-espace inclus dans son image)

3

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, U un sous-espace vectoriel de E .

1 Montrer que si U est de dimension finie, alors, pour tout endomorphisme f de E : $(U \subset f(U)) \Rightarrow (U = f(U))$.

2 Montrer que la propriété précédente tombe en défaut si on ne suppose plus U de dimension finie.

Exercice 7 (Le b.a.-ba des extensions de corps)

5

Soit K un corps, L un sous-corps de K . Montrer que K est un L -espace vectoriel. On suppose que le L -espace vectoriel K est de dimension finie p . On considère un K -espace vectoriel E de dimension finie n . Montrer que E est un L -espace vectoriel de dimension finie np .

6.3. APPLICATIONS LINÉAIRES

Exercice 8 (Non équivalence entre injectivité et surjectivité d'un endomorphisme)

0

Donner un exemple d'endomorphisme d'un espace vectoriel injectif et non surjectif, puis d'un endomorphisme surjectif et non injectif.

Exercice 9 (Existence d'une application linéaire à valeurs imposées (*X PC 09*))

0

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies.

1 Soit $(x, y) \in E \times F$. À quelle condition existe-t-il $f \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que $f(x) = y$?

2 Soient (x_1, y_1) et (x_2, y_2) dans $E \times F$. À quelle condition existe-t-il $f \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$?

Exercice 10 (Propagation des propriétés par linéarité)

0 à 1

Soit E et F deux espaces vectoriels, E étant de dimension finie. Soit $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$.

1 Montrer que si f est nulle sur une famille génératrice de E , alors f est identiquement nulle.

2 Montrer que si f, g coïncident sur une famille génératrice de E , alors $f = g$.

3 Montrer que si (dans le cas où $E = F$), pour tout $x \in E$, $(x, f(x))$ est liée, alors f est une homothétie.

Exercice 11 (Endomorphismes cycliques (*Centrale PC 09*))

1

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n . On dit qu'un endomorphisme f de E est *cyclique* s'il existe $x_0 \in E$ tel que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E .

1 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$. Montrer que f est cyclique

2 Montrer que le commutant d'un endomorphisme cyclique est constitué de ses polynômes.

Exercice 12 (De la nilpotence ponctuelle à la nilpotence globale)

2

1 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$\forall x \in E, \exists p_x \in \mathbb{N}^*, \quad f^{p_x}(x) = 0.$$

Montrer que f est nilpotent.

2 Montrer que ce résultat ne subsiste pas en dimension infinie.

Exercice 13 (Quand l'inverse est un polynôme)

2

Soit f un automorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie non nulle. Montrer que f^{-1} est un polynôme en f .

Exercice 14 (Supplémentarité de l'image et du noyau d'un endomorphisme)

2

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) $\text{Ker } u = \text{Ker } u^2$;
- (2) $\text{Im } u = \text{Im } u^2$;
- (3) $E = \text{Ker } u \oplus \text{Im } u$.

Exercice 15 (Sur le dual)

2

Soit E un espace vectoriel. On note E^* son dual.

1 Montrer que si f et g sont deux formes linéaires sur E de même noyau, alors f et g sont colinéaires.

2 On suppose ici que $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\begin{aligned} \Phi_n : E &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto f^{(n)}(0) \end{aligned} .$$

Montrer que $(\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est libre.

3 Ici, E est de dimension 3, et u est un endomorphisme de E tel que $u^2 = 0$. Montrer l'existence de $(a, f) \in E \times E^*$ tel que, pour tout $x \in E$:

$$u(x) = f(x)a.$$

Exercice 16 (Endomorphismes commutant)

3

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que $f^2 - f \circ g + 2f - \text{Id}_E = 0$. Montrer que $f \circ g = g \circ f$.

Exercice 17 (Sommes d'images et de noyaux)

3

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ avec $E = \text{Im}(f) + \text{Im}(g) = \text{Ker}(f) + \text{Ker}(g)$. Montrer que ces sommes sont directes.

Exercice 18 (Dimension et annulation sur un sous-espace)

3

1 (*Mines MP 09*) Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, G un sous-espace de E . On pose $L = \{u \in \mathcal{L}(E, F), G \subset \text{Ker } u\}$. Montrer que L est un espace vectoriel et donner sa dimension.

2 (*X PC 09*) Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie n et F un sous-espace vectoriel de E de dimension p avec $1 \leq p \leq n - 1$. Déterminer la dimension de $\{\varphi \in E^*, \varphi|_F = 0\}$.

Exercice 19 (Finitude ponctuelle des itérées (*ENS Lyon MP 09*))

3

Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie. Caractériser les endomorphismes f de E tels que, pour tout x de E , l'ensemble $\{f^n(x), n \in \mathbb{N}\}$ soit fini.

Exercice 20 (Une décomposition en produit d'automorphisme et de projecteur)

4

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe un automorphisme g de E et un projecteur p de E tels que $f = g \circ p$.

6.4. RANG

Exercice 21 (Calculs de rang)

0

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension 3, $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = 0$ et $f \neq 0$. Montrer que $\text{rg}(f) = 1$.

Exercice 22 (Inégalités et rang)

1

1 Soit $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$ deux morphismes entre espaces vectoriels de dimensions finies. Montrer :

$$|\text{rg}(u) - \text{rg}(v)| \leq \text{rg}(u + v) \leq \text{rg}(u) + \text{rg}(v).$$

2 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, et u, v deux éléments de $\mathcal{L}(E)$. Montrer :

$$\text{rg}(u) + \text{rg}(v) - n \leq \text{rg}(u \circ v) \leq \min(\text{rg}(u), \text{rg}(v))$$

Exercice 23 (Égalité de rangs)

3

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, E)$ telles que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$. Montrer que $\text{Im}(g)$ et $\text{Ker}(f)$ sont supplémentaires dans E , puis que $f, g, g \circ f, f \circ g$ ont le même rang.

Exercice 24 (Une somme de rangs)

3

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = 0$ et $f + g \in \text{GL}(E)$. Montrer : $\text{rg}(f) + \text{rg}(g) = \dim E$.

Suites récurrentes

Sommaire

1. Introduction	333
2. Quelques exemples classiques	334
2.1. Suites arithmétiques	334
2.2. Suites géométriques	334
2.3. Suites affines	335
2.4. Suites homographiques	335
2.5. Suites définies par une relation $u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + \beta u_n$	336
3. Étude générale	338
3.1. Propriétés élémentaires	338
3.2. Compléments : applications contractantes	340
4. Application à l'approximation	343
4.1. Méthode de dichotomie	343
4.2. Méthode de Newton	344
5. Questionnaire 10 : Suites récurrentes	346
6. Feuille de TD 14 : Suites récurrentes	347

Dans ce chapitre, I désigne un intervalle réel d'intérieur non vide, et $f : I \rightarrow I$ est une application.

1. INTRODUCTION

On se propose d'étudier les suites définies par $u_0 \in I$, et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

Nous donnerons ainsi, selon les hypothèses émises sur f (régularité, monotonie, etc.), des conséquences générales sur de telles suites récurrentes.

L'étude d'une telle suite récurrente est étroitement liée à celle des points fixes de f (du moins si f est continue), d'après le fait suivant :

Proposition (Suite récurrente et point fixe)

Si (u_n) converge vers $l \in I$, et si f est continue en l , alors l est un point fixe de f (i.e. $f(l) = l$).

1.a

Démonstration

□

En particulier, si f est continue sur un intervalle *fermé*, la suite (u_n) ne peut converger qu'en un point fixe de f (et donc si en outre f n'a pas de point fixe, la suite (u_n) ne peut converger).

Attention, il se peut que f soit continue sur I , n'ait qu'un seul point fixe, et que (u_n) converge, sans que (u_n) converge vers ce point fixe. Par exemple, la fonction carré sur $]0, 1]$ n'admet qu'un point fixe (à savoir 1), mais pour tout $u_0 \in]0, 1[$, la suite (u_n) converge vers 0.

Cette proposition simple relie points fixes de f et suites récurrentes définies par f : chacun de ces deux thèmes peut contribuer à l'étude de l'autre. Nous verrons plus loin (paragraphe sur l'approximation) comment ces suites récurrentes permettent de trouver des points fixes (ou des zéros) d'une fonction.

Cas plus compliqués de suites récurrentes

On rappelle qu'on a considéré une fonction de I dans I , donc telle que l'ensemble de définition soit stable par l'application. Dans le cas général d'une fonction réelle d'une variable réelle, il n'y a aucune raison que ce soit le cas : il est alors essentiel, pour prouver que la suite récurrente est bien définie, de trouver une partie de \mathbb{R} sur laquelle l'itératrice est définie, stable par l'application, et comprenant le terme initial.

Dans l'optique d'obtenir des renseignements supplémentaires, on privilégiera les « petites » parties.

1.1

2. QUELQUES EXEMPLES CLASSIQUES

On donne ici quelques exemples classiques (qu'il faut connaître, ou savoir rapidement retrouver), dont l'étude ne pose aucune difficulté (sauf peut-être celle des suites homographiques).

2.1. SUITES ARITHMÉTIQUES

Définition (Suite arithmétique)

Une suite *arithmétique* est une suite récurrente $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admettant pour itératrice une fonction du type $f : x \mapsto x + r$ (pour un certain $r \in \mathbb{R}$). Le nombre r est appelé *raison* de la suite arithmétique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2.a

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r . Pour tout entier naturel n , on a : $u_n = u_0 + nr$. On en déduit le comportement asymptotique de (u_n) .

De plus, pour tout entier naturel n :

$$\sum_{k=0}^n u_k = (n+1)u_0 + \frac{n(n+1)}{2}r$$

2.2. SUITES GÉOMÉTRIQUES

Définition (Suite géométrique)

Une suite *géométrique* est une suite récurrente admettant pour itératrice une fonction du type $f : x \mapsto rx$, pour un certain $r \in \mathbb{R}$. Le nombre r est appelé *raison* de la suite géométrique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2.b

Une suite géométrique dont le premier terme est non nul a une unique raison.

Soit (u_n) une suite géométrique de raison r . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n = u_0 r^n$$

(avec la convention $0^0 = 1$ si besoin est, c'est-à-dire lorsque $r = n = 0$).

On en déduit le comportement asymptotique d'une suite géométrique.

De plus, si $r \neq 1$, on a, pour tout entier naturel n :

$$\sum_{k=0}^n u_k = u_0 \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

Si $r = 1$, la somme vaut $(n+1)u_0$: on peut retrouver ce résultat en faisant tendre r vers 1, en reconnaissant la limite d'un taux d'accroissement.

Il faudra bien prendre garde, lors de la sommation de termes consécutifs d'une suite géométrique, à sa raison (on traitera à part le cas où $r = 1$).

2.3. SUITES AFFINES

Définition (Suite affine)

Une suite *affine* est une suite récurrente admettant pour itératrice une fonction du type $f : x \mapsto ax + b$, pour certains réels a, b .

2.c

On suppose $a \neq 1$, et on pose $l = \frac{b}{1-a}$. l est un point fixe de f (i.e. $f(l) = l$), la suite de terme général $u_n - l$ est géométrique de raison a et on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a^n \left(u_0 - \frac{b}{1-a} \right) + \frac{b}{1-a}$$

La suite (u_n) est convergente si et seulement si $|a| < 1$ ou $u_0 - \frac{b}{1-a} = 0$ (et elle converge alors vers l).

Pour tout entier naturel n , on a :

$$\sum_{0 \leq k \leq n} u_k = \left(u_0 - \frac{b}{1-a} \right) \left(\frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \right) + (n+1) \frac{b}{1-a}$$

Ne pas apprendre ces formules par cœur : ce qu'il faut retenir de cette proposition, c'est qu'en présence d'une suite affine ni arithmétique, ni géométrique, on se ramène à une suite géométrique en considérant $u_n - l$, où l est le point fixe de f .

2.4. SUITES HOMOGRAPHIQUES

Définition (Suite homographique)

Une suite *homographique* est une suite (éventuellement finie), définie par une application homographique, i.e. du type $f : x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$, où a, b, c, d sont réels, et $(c, d) \neq (0, 0)$.

2.d

Dans notre étude, on suppose que c et $ad - bc$ sont non nuls, puisque ces cas particuliers ont déjà été traités. Une telle suite peut être finie : c'est le cas de la suite définie par $u_0 = \frac{1}{10}$, et $f : x \mapsto \frac{-2x}{2x+1}$.

Pour savoir quelles valeurs initiales ne donnent qu'une suite finie, il suffit de trouver la bijection réciproque de f : les valeurs cherchées sont celles de la suite récurrente de terme initial $-\frac{1}{2}$, associée à f^{-1} .

On suppose maintenant que notre suite est infinie.

On considère le polynôme

$$P = cX^2 + (d - a)X - b$$

(les racines de ce polynôme sont les points fixes de f).

- (1) Si P n'a pas de racine réelle, (u_n) diverge.
- (2) Si P admet deux racines réelles distinctes α et β , alors (u_n) est constante si $u_0 \in \{\alpha, \beta\}$, et sinon la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{u_n - \beta}{u_n - \alpha}$ est géométrique, d'où son comportement asymptotique.

- (3) Si P admet une racine double, α , alors la suite est constante si $u_0 = \alpha$, et sinon, (u_n) ne prend pas la valeur α , et on peut poser $v_n = \frac{1}{u_n - \alpha}$. Cette dernière suite est alors arithmétique. Il en résulte que (u_n) converge vers α .

2.5. SUITES DÉFINIES PAR UNE RELATION $u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + \beta u_n$

Soit α et β deux nombres complexes.

On cherche à décrire l'ensemble $\Omega_{\alpha,\beta}$ des suites complexes (u_n) vérifiant la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + \beta u_n,$$

pour tout entier naturel n .

L'ensemble $\Omega_{\alpha,\beta}$ est clairement un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ (il comprend la suite nulle, est stable par somme, et par multiplication scalaire¹).

Proposition (Dimension d'un espace de suite récurrentes linéaires)

$\Omega_{\alpha,\beta}$ est un plan vectoriel.

2.a

Démonstration

Montrer que $\varphi : u \in \Omega_{\alpha,\beta} \mapsto (u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

□

Reste maintenant à trouver une base de $\Omega_{\alpha,\beta}$.

On considère l'équation caractéristique

$$X^2 - \alpha X - \beta = 0 \quad (\mathcal{C})$$

On montre aisément que si r est solution de \mathcal{C} , alors toute suite géométrique de raison r est un élément de $\Omega_{\alpha,\beta}$.

Premier cas : si \mathcal{C} possède deux solutions distinctes r_1 et r_2 , alors les suites (r_1^n) et (r_2^n) (avec la convention $0^0 = 1$ si besoin est) ont pour deux premiers termes respectifs $1, r_1$, et $1, r_2$. Comme

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix} = r_2 - r_1 \neq 0,$$

on peut affirmer :

$$\Omega_{\alpha,\beta} = \text{Vect}(\{(r_1^n), (r_2^n)\}).$$

1. On peut aussi le voir comme noyau d'un endomorphisme de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

Exemple (Suite de Fibonacci)

La suite de Fibonacci (F_n) est définie par $F_0 = F_1 = 1$, et la relation $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ (pour tout entier naturel n). Elle appartient donc à $\Omega_{1,1}$, dont l'équation caractéristique $X^2 - X - 1 = 0$ a pour solutions $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Il existe donc des scalaires λ et μ tels que, pour tout entier naturel n , on ait : $F_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$.

Pour déterminer λ et μ , on considère les deux premiers termes, ce qui fournit le système :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda r_1 + \mu r_2 = 1 \end{cases}$$

dont l'unique couple solution est $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right) = \left(\frac{r_1}{\sqrt{5}}, -\frac{r_2}{\sqrt{5}}\right)$. On a donc, pour tout entier naturel n :

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \right)$$

Remarque : si on prend $n = -1$, on obtient formellement $F_{-1} = 0$, ce qui donne encore $F_1 = F_0 + F_{-1}$.

i

Deuxième cas : si $\alpha = \beta = 0$. $\Omega_{0,0}$ est l'ensemble des suites complexes dont tous les termes sauf (éventuellement) les deux premiers sont nuls.

Troisième cas : si \mathcal{C} admet une unique solution non nulle r , alors $r^2 - \alpha r - \beta = 0$, mais aussi $2r - \alpha = 0$. On dispose d'un élément non nul (r^n) de $\Omega_{\alpha,\beta}$, mais cela ne suffit pas. On vérifie à la main que la suite de terme général nr^n est élément de $\Omega_{\alpha,\beta}$. En effet, pour tout entier naturel n :

$$(n+2)r^{n+2} - \alpha(n+1)r^{n+1} - \beta nr^n = r^n (n(r^2 - \alpha r - \beta) + r(2r - \alpha)) = 0$$

Comme

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ r & r \end{vmatrix} = r \neq 0,$$

on a bien

$$\Omega_{\alpha,\beta} = \text{Vect}(\{(r^n), (nr^n)\}).$$

Exemple (Suite récurrente linéaire d'ordre 2)

Une suite complexe (u_n) appartient $\Omega_{4,-4}$ si et seulement si il existe des constantes complexes λ et μ telles que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = (\lambda + \mu n)2^n$$

ii

Pour finir, signalons que cette étude, très similaire à celle des équations différentielles linéaires homogènes du second ordre à coefficients constants, est valide dans le cas de suites réelles, la seule situation inédite étant celle où \mathcal{C} admet deux solutions complexes non réelles conjuguées $re^{i\theta}$ et $re^{-i\theta}$. Dans ce cas, on a :

$$\Omega_{\alpha,\beta} \cap \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(\{(r^n \cos(n\theta)), (r^n \sin(n\theta))\})$$

Exemple ()

$$\Omega_{0,-4} \cap \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(\{(2^n \cos(n\frac{\pi}{2})), (2^n \sin(n\frac{\pi}{2}))\})$$

iii

Ce traitement du cas réel n'a d'intérêt que si l'on veut décrire toutes les suites réelles appartenant à $\Omega_{\alpha,\beta}$. Si seule l'une d'entre elles nous concerne, on peut la voir comme une suite complexe, puis simplifier son expression.

3. ÉTUDE GÉNÉRALE

On suppose la fonction f continue sur I .

Quelques recommandations générales concernant une telle étude : il est essentiel de faire un dessin (au moins au brouillon), sur lequel doivent apparaître la première bissectrice, les points fixes de f , le graphe de f , les premiers termes de la suite.

Illustration

3.1. PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES

On peut donner les variations de la suite récurrente (u_n) à partir de certaines propriétés de f (non liées à la régularité de f) :

Proposition (Comparaison de l'itératrice avec l'identité)

Si $f - \text{Id}_I \geq 0$ (resp. si $f - \text{Id}_I \leq 0$), alors u est croissante (resp. décroissante).

3.a

Illustration

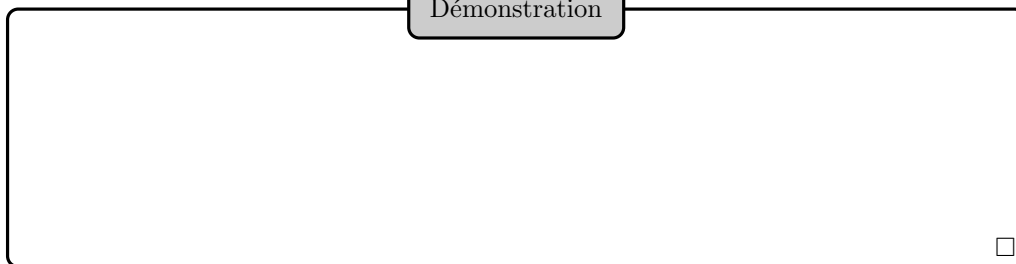
Il est donc important de déterminer si le graphe de f est au-dessus ou en dessous de la première bissectrice en un point donné. Des considérations de convexité ou concavité peuvent parfois y aider.

Proposition (Lorsque l'itératrice est croissante)

Si f est croissante, alors u est monotone. Plus précisément, la suite (u_n) est croissante si $u_0 \leq f(u_0)$, décroissante si $u_0 \geq f(u_0)$.

3.b

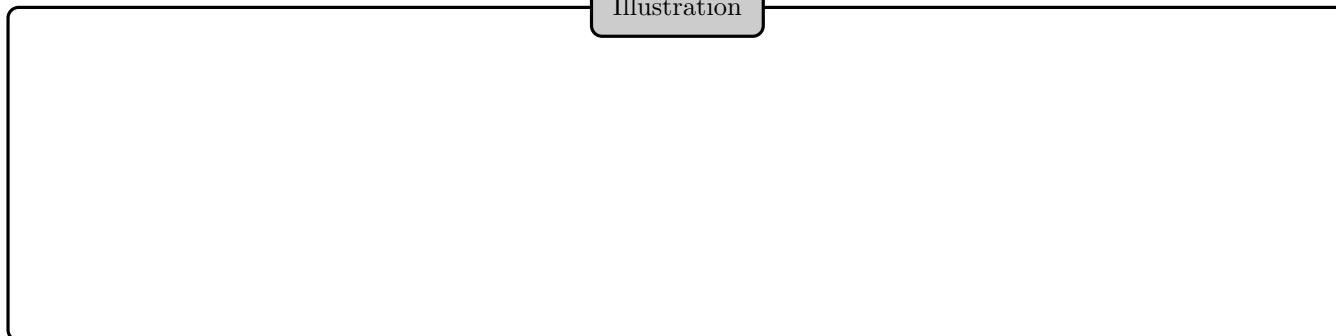
Démonstration



Attention, si f est croissante, la suite u ne l'est pas nécessairement !

Dans l'optique de prouver la convergence d'une suite récurrente définie par une fonction croissante, on peut chercher à majorer ou minorer (selon que la suite soit croissante ou décroissante) la suite (u_n) . La connaissance des points fixes de f nous facilite grandement la tâche.

Illustration

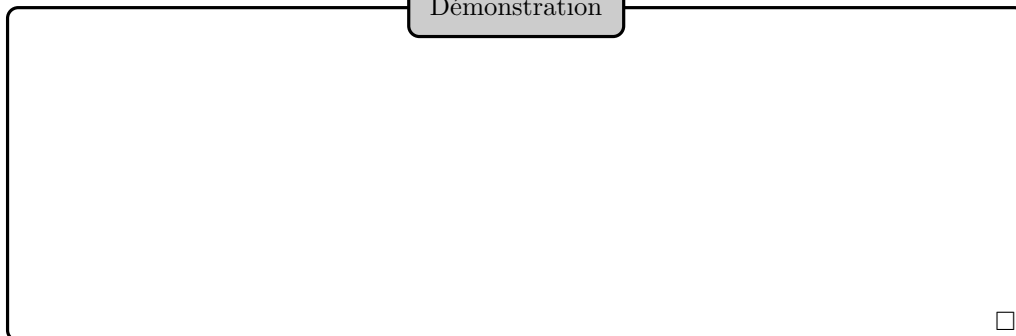


Proposition (lorsque l'itératrice est décroissante)

Si f est décroissante sur I , alors les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de monotonies contraires.

3.c

Démonstration



Illustration

3.2. COMPLÉMENTS : APPLICATIONS CONTRACTANTES

Définition (Application contractante)

Une application est dite *contractante* si elle est k -lipschitzienne, pour un certain $k \in [0, 1[$.

3.a

Toute application contractante est (uniformément) continue car lipschitzienne.

Mauvaise écriture de la contractance

Une fonction f contractante sur I vérifie :

$$\forall x, y \in I, \quad (x \neq y) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| < |x - y|),$$

mais la réciproque est fautive, et les conclusions des résultats suivants ne sont pas applicables à une fonction non contractante vérifiant pourtant cette propriété.

3.1

Théorème du point fixe de Picard

Soit I un intervalle fermé de \mathbb{R} , et f une application contractante sur I . Alors :

- (1) f admet un unique point fixe l dans I .
- (2) Toute suite récurrente définie par f est convergente, vers l , dans I , avec une vitesse au pire géométrique.

3.d

Démonstration

Cette démonstration utilise la notion de suite de Cauchy, hors-programme, sujet de l'un des DM.

On suppose f k -lipschitzienne, pour un certain $k \in [0, 1[$.

L'unicité du point fixe en cas d'existence est claire (si l et l' sont des points fixes de f , alors $(1 - k)|l - l'| \leq 0$, or $(1 - k) > 0$, donc $l = l'$).

f admet donc au plus un point fixe l .

Soit $u_0 \in I$. Une récurrence immédiate montre que, pour tout entier naturel n , on a :

$$|u_{n+1} - u_n| \leq k^n |u_1 - u_0|.$$

Pour tous entiers naturels n et m (m non nul), on a donc :

$$\begin{aligned} |u_{n+m} - u_n| &= \left| \sum_{i=0}^{m-1} u_{n+i+1} - u_{n+i} \right| \leq \sum_{i=0}^{m-1} |u_{n+i+1} - u_{n+i}| \\ &\leq k^n |u_1 - u_0| \sum_{i=0}^{m-1} k^i \leq k^n \frac{|u_1 - u_0|}{1 - k} \end{aligned}$$

La suite (u_n) est donc de Cauchy, donc convergente. Sa limite l appartient à I (puisque I est fermé), et donc l est un point fixe de f . Cela montre à la fois l'existence d'un point fixe, et la convergence de (u_n) vers ce point fixe.

Une récurrence immédiate montre que, pour tout entier naturel n , on a :

$$|u_n - l| \leq k^n |u_0 - l|.$$

Par conséquent, la suite (u_n) converge, avec une vitesse au pire géométrique, vers l'unique point fixe l de f . □

Pour affirmer l'existence d'un point fixe, le théorème des valeurs intermédiaires suffit dans le cas où I est un segment (la démonstration est donc beaucoup plus simple dans ce cas).

Corollaire (Cas suffisant de convergence au pire géométrique)

Si f est dérivable sur I , de dérivée majorée, en valeur absolue, par un nombre $k \in [0, 1[$, alors f admet un unique point fixe, et toute suite récurrente définie par f est convergente vers l'unique point fixe de f , avec une vitesse au pire géométrique.

3.e

Démonstration

D'après l'inégalité des accroissements finis (ou, plus directement encore, son corollaire), l'application f est contractante. □

Si l est un point fixe de f , en lequel f est dérivable, et que $|f'(l)| < 1$, on dit que le point fixe l est *attractif*. En effet, si le terme initial u_0 est suffisamment proche de l , alors la suite (u_n) converge, avec une vitesse au pire géométrique, vers l . Dans le même contexte, une relation comme $f'(l) = 0$ favorise encore la rapidité de convergence, et on dit que le point fixe l est *superattractif*.

Illustration

Proposition (La convergence vers un point répulsif est rare)

Une suite récurrente (u_n) définie par f , convergeant vers un point fixe l de f , en lequel f est dérivable et tel que $|f'(l)| > 1$ (un tel point est dit *répulsif*), est nécessairement stationnaire.

3.f

Démonstration

Si la suite (u_n) prend la valeur l , alors elle est stationnaire de valeur l . Supposons (par l'absurde) que (u_n) tende vers l sans prendre la valeur l . On a alors

$$\frac{u_{n+1} - l}{u_n - l} = \frac{f(u_n) - l}{u_n - l} \rightarrow f'(l).$$

Il existe donc un rang N tel que, pour tout entier $n \geq N$, on ait :

$$|u_{n+1} - l| \geq |u_n - l|.$$

On a donc, pour tout entier $n \geq N$: $|u_n - l| \geq |u_N - l|$, ce qui est absurde. □

Illustration

Exercice (Algorithme de Héron d'Alexandrie)

Étude de l'algorithme de Héron d'Alexandrie (ou de Babylone). Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Soit u définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{\alpha}{u_n} \right) \end{cases}$$

- 1 Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $u_n \geq \sqrt{\alpha}$.
- 2 Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.
- 3 Montrer que la suite (u_n) converge vers $\sqrt{\alpha}$:
- 4 Montrer que pour tout entier naturel non nul n_0 , tout entier $n \geq n_0$,

$$|u_n - \sqrt{\alpha}| \leq 2\sqrt{\alpha} \left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha}} (u_{n_0} - \sqrt{\alpha}) \right)^{2^{n-n_0}}.$$

On dit que la convergence est au pire *quadratique*. La raison en est que le point fixe est superattractif.

1

4. APPLICATION À L'APPROXIMATION

Dans ce paragraphe, on étudie des méthodes pour trouver des solutions d'une équation $f(x) = 0$.

4.1. MÉTHODE DE DICHOTOMIE

Proposition (Méthode de dichotomie)

On considère une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, telle que $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, et telle que f ne s'annule qu'en un seul point $c \in]a, b[$. On construit deux suites récurrentes (a_n) et (b_n) en posant $a_0 = a$, $b_0 = b$, et, pour tout entier naturel :

- (1) si $f(\frac{a_n+b_n}{2}) \geq 0$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$;
- (2) si $f(\frac{a_n+b_n}{2}) < 0$, on pose $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$.

Ces deux suites convergent vers c , et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |c - a_n| \leq \frac{b-a}{2^n} \quad \text{et} \quad |c - b_n| \leq \frac{b-a}{2^n}$$

4.a

Démonstration

Les deux suites ainsi construites sont clairement adjacentes, et leur limite commune c vérifie, par continuité de f en c , $f(c) = 0$. Enfin, pour tout entier naturel n , on a $|a_n - c| \leq |a_n - b_n|$, $|b_n - c| \leq |a_n - b_n|$. Comme $|a_n - b_n| = \frac{b-a}{2^n}$, on a le résultat voulu. □

Illustration

On rappelle que cette méthode permet de donner une démonstration du théorème des valeurs intermédiaires.

4.2. MÉTHODE DE NEWTON

On suppose que f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} , que f' ne s'annule pas, et que f admet un unique zéro a . Soit Γ le graphe de f .

Cette méthode est fondée sur l'espoir (pas toujours justifié) que si x_0 est une valeur approchée de a , alors l'intersection de la tangente de Γ en $(x_0, f(x_0))$ avec l'axe des abscisses fournit une meilleure approximation de a que x_0 .

Attention, cet espoir n'est pas, en général, vraiment fondé.

Illustration

Une équation de la tangente de Γ en x_0 est $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Nous sommes donc conduits à poser $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. Plus généralement, on introduit la fonction

$$\varphi : x \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

et on pose, pour tout entier naturel n : $x_{n+1} = \varphi(x_n)$.

a est l'unique point fixe de φ . De plus, pour tout réel x , $\varphi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$. a est donc un point fixe superattractif de φ .

L'exercice 15 de TD du chapitre sur la dérivation montre que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un réel c_x compris entre a et x , tel que :

$$\varphi(x) = \varphi(a) + (x - a)\varphi'(a) + \frac{(x - a)^2}{2}\varphi''(c_x) = a + \frac{(x - a)^2}{2}\varphi''(c_x)$$

Si l'on a une majoration $|\varphi''| \leq M$ (on l'a toujours sur un segment donné contenant a), on trouve donc

$$|\varphi(x) - a| \leq \frac{1}{2}M|x - a|^2$$

que l'on peut écrire

$$\frac{1}{2}M|\varphi(x) - a| \leq \left(\frac{1}{2}M|x - a|\right)^2$$

et donc par récurrence, pour tout entier naturel p :

$$|x_p - a| \leq \frac{2}{M} \left(\frac{1}{2} M |x_0 - a| \right)^{2^p}$$

La méthode fonctionne donc bien si l'on choisit x_0 tel que $\frac{1}{2} M |x_0 - a| < 1$, donc pour u_0 suffisamment proche de a : la vitesse de convergence est grande, on dit qu'elle est *quadratique*.

Exercice (Application de la méthode de Newton)

Soit $\alpha > 0$. On cherche à approcher $\sqrt{\alpha}$ avec la méthode de Newton, en prenant la fonction $f : x \mapsto x^2 - \alpha$. Que remarque-t-on ?

2

5. QUESTIONNAIRE 10 : SUITES RÉCURRENTES

I désigne un intervalle réel d'intérieur non vide, et f est une application de I dans lui-même. Pour tout $x_0 \in I$, on peut donc définir la suite (x_n) de terme initial x_0 vérifiant la relation $x_{n+1} = f(x_n)$.

1 On suppose que la suite (x_n) converge vers l .

- (1) (V/F) $l \in I$.
- (2) (V/F) Si $l \in I$, alors l est un point fixe de f .
- (3) (V/F) Soit (m_n) une suite d'entiers naturels. La suite définie par son terme initial $v_0 = x_0$ et la relation de récurrence $v_{n+1} = f^{m_n}(v_n)$ converge.

2 On se place dans le cas où $I =]0, 1]$.

- (1) (V/F) S'il existe $x_0 \in I$ tel que (x_n) converge vers 0, alors f est prolongeable par continuité en 0.
- (2) (V/F) Si pour tout $x_0 \in I$, la suite (x_n) converge vers 0, alors f est prolongeable par continuité en 0.
- (3) (V/F) Si f est continue sur I , et s'il existe $x_0 \in I$ tel que la suite (x_n) converge vers 0, alors f est prolongeable par continuité en 0.
- (4) (V/F) Si f est continue sur I , et si pour tout $x_0 \in I$, la suite (x_n) converge vers 0, alors f est prolongeable par continuité en 0.

6. FEUILLE DE TD 14 : SUITES RÉCURRENTES

Exercice 1 (Étude élémentaire de suites récurrentes)

0

1 On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x^3}{9} + \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}$$

et on définit la suite (x_n) en posant $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Montrer la convergence de (x_n) .

2 Étudier la convergence de la suite (u_n) définie par : $u_0 = a > 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{a}{u_n} \right)$.

3 Étudier les suites récurrentes définies par un terme initial et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est successivement la fonction sinus, la fonction cosinus, la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$, la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$, la fonction $x \mapsto 1+x^2$.

4 (X PC 09) Étudier la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par : $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n^3 + 3}{3u_n + 1}$.

Exercice 2 (Suites récurrentes linéaires, ou presque)

0

Pour chacune des suites suivantes, expliciter le terme général en fonction de l'indice.

1 (u_n) définie par $u_0 = 1, u_1 = 3$, et $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2 (u'_n) définie par $u'_0 = 0, u'_1 = 2$ et $u'_{n+2} = 2u'_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3 (v_n) définie par $v_1 = 1, v_2 = 4$ et $v_{n+2} = \frac{v_n^3 + 1}{v_n^2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4 (w_n) définie par : $w_1 = 1, w_2 = 3$ et $w_{n+2} = -w_{n+1} + 6w_n + 4$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5 (z_n) définie par : $z_1 = 1, z_2 = 3$ et $z_{n+2} = 2z_{n+1} - z_n + 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 (Suites homographiques)

0

1 Étudier la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{2 - u_n}$.

2 Étudier la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n - 4}{u_n - 3}$.

3 Soit $a, b \in \mathbb{R}^*$. On définit la suite (u_n) par $u_0 \in \mathbb{R}^*$ et l'itératrice $x \mapsto a + \frac{b}{x}$. On suppose que l'équation $x^2 = ax + b$ admet deux solutions réelles α, β , avec $|\alpha| > |\beta|$. Étudier la suite (u_n) .

Exercice 4 (Comportement asymptotique de suites récurrentes)

2

1 Soit $s > 0$ et $a_0 \in]0, 1/s[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_{n+1} = a_n - sa_n^2$. Montrer que $a_n \sim \frac{1}{sn}$.

Indication : on pourra écrire : $\frac{1}{na_n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k-1}} \right) + \frac{1}{na_0}$.

2 (X PC 08) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$. Étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
Donner un équivalent de u_n .

3 (INT PSI 08) On considère la suite définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^2}$. Étudier la convergence de u_n . Trouver un équivalent de u_n quand n tend vers l'infini.

4 (ENS Lyon MP 09) La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$. Donner un équivalent de u_n .

Exercice 5 (Suite récurrente et fonction lipschitzienne (ENS Cachan MP 08))

3

Soit f une fonction 1-lipschitzienne de $[0, 1]$ dans lui-même, (x_n) la suite définie par $x_0 \in [0, 1]$ et $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + f(x_n))$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (x_n) converge.

Exercice 6 (Suite récurrente à l'envers)

3

Rappeler le domaine de définition de la fonction arccos. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \cos(u_{n+1})$. Que dire de u_0 ?

Polynômes

Sommaire

1. Polynômes à une indéterminée	349
1.1. Construction de l'anneau $\mathbb{K}[X]$	349
1.2. Degré d'un polynôme	352
1.3. Division euclidienne	354
2. Fonctions polynomiales	357
2.1. Définition. Racines d'un polynôme	357
2.2. Ordre de multiplicité d'une racine	359
2.3. Polynôme dérivé	360
3. Polynômes scindés, fonctions symétriques élémentaires des racines	363
4. Arithmétique de l'anneau des polynômes	365
4.1. Compléments sur la divisibilité	365
4.2. PGCD	365
4.3. Polynômes premiers entre eux	367
4.4. PPCM	368
5. Polynômes irréductibles, décomposition	368
5.1. Polynômes irréductibles	368
5.2. Le théorème de d'Alembert-Gauss. Application à la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$	370
6. Feuille de TD 15 : Polynômes	372
6.1. Arithmétique des polynômes	372
6.2. Polynômes et algèbre linéaire	373
6.3. Racines d'un polynôme	375
6.4. Divers	376

Dans tout ce chapitre, la lettre \mathbb{K} désignera indifféremment le corps des nombres réels ou le corps des nombres complexes. Cela dit, il est possible de définir des polynômes sur tout corps (et même sur tout anneau commutatif).

Nous avons déjà une idée intuitive de la notion de polynôme, mais pas de définition précise. En fait, il serait facile de définir les polynômes que nous connaissons de façon fonctionnelle, mais ceci soulèverait plusieurs problèmes : tout d'abord, cela cacherait l'intérêt formel des polynômes, l'aspect fonctionnel dans des espaces non numériques (on parlera par exemple de polynôme de matrices ou d'endomorphismes). De plus, cette notion s'étendrait mal au cas d'un corps de base quelconque, et surtout fini.

Je parle de la notion d'idéal, mais vous pouvez laisser de côté cette définition hors-programme (qui peut toutefois tomber en DS, où elle vous serait rappelée).

Sauf mention contraire, A, B, C, P, Q, R désignent des éléments de $\mathbb{K}[X]$, α un élément de \mathbb{K} .

1. POLYNÔMES À UNE INDÉTERMINÉE

1.1. CONSTRUCTION DE L'ANNEAU $\mathbb{K}[X]$

Définition (Support d'une suite)

On appelle *support* de la suite $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ la partie suivante de \mathbb{N} :

$$\{n \in \mathbb{N}, u_n \neq 0\}.$$

1.a

Définition (Suite presque nulle)

On dit qu'une suite (u_n) d'éléments de \mathbb{K} est *presque nulle* si elle est de support fini. Notons $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ l'ensemble des suites d'éléments de \mathbb{K} presque nulles.

1.b

(u_n) est de support fini si et seulement si il existe un rang à partir duquel son terme général est nul. $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Nous voulons munir $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ d'une opération de multiplication. En vue de la formule de multiplication de deux polynômes, on pose :

Définition (Produit de suites presque nulles)

Pour tous éléments $P = (u_n)$ et $Q = (v_n)$ de $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$, on pose $PQ = (\mu_n)$, où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mu_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} = \sum_{i,j \geq 0, i+j=n} u_i v_j.$$

1.c

On pose $X = (\delta_{1,n})_{n \in \mathbb{N}} = (0, 1, 0, 0, \dots) \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$. On montre facilement par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, X^k est la suite de terme général $\delta_{k,n}$ (et en particulier un élément de $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$).

Pour tout élément $P = (u_n)$ de $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$, on a donc $P = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k X^k$, notation que l'on retiendra.

Désormais, nous noterons $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des suites presque nulles à coefficients dans \mathbb{K} , et ses éléments seront appelés *polynômes (en l'indéterminée X)*.

Dans une phrase telle que « Soit $P = \sum_{k \geq 0} a_k X^k$ un polynôme », on considèrera implicitement que les coefficients a_k sont des scalaires.

Définition (Base canonique de l'espace des polynômes)

La famille infinie $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base du \mathbb{K} -espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$, appelée *base canonique de $\mathbb{K}[X]$* .

1.d

Lemme (La multiplication polynomiale est interne)

Le produit de deux suites presque nulles est une suite presque nulle.

1.a

Démonstration

□

Proposition (Anneau des polynômes à une indéterminée)

$(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ est un anneau commutatif.

1.b

Démonstration

□

Munie d'une structure très riche (anneau et espace vectoriel), on dit que $\mathbb{K}[X]$ est une \mathbb{K} -algèbre. On l'appelle *algèbre (ou anneau) des polynômes à coefficients dans \mathbb{K} (et à une indéterminée)*.

En fait cette construction et ces notations sont généralisables à tout corps \mathbb{K} (éventuellement fini), et même à tout anneau commutatif non nul : si A est un tel anneau, on définit l'anneau des polynômes $A[X]$ à une indéterminée à coefficients dans A .

Cela s'applique à $A = \mathbb{K}[X]$! On définit alors l'anneau $\mathbb{K}[X, Y]$ des polynômes à deux indéterminées, à coefficients dans \mathbb{K} . On peut évidemment généraliser à n indéterminées, pour tout $n \geq 1$.

Ce n'est pas un sous-anneau de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, car la multiplication dans $\mathbb{K}[X]$ n'est pas induite par celle de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Définition (Monôme, polynôme constant)

On appelle *monôme* tout polynôme du type λX^k , où $(\lambda, k) \in \mathbb{K}^* \times \mathbb{N}$. Un polynôme *constant* est un polynôme du type λ , où $\lambda \in \mathbb{K}$.

1.e

Définition (Composé d'un polynôme par un autre)

Soit $A = \sum_{k \geq 0} a_k X^k$ un élément de $\mathbb{K}[X]$. Pour tout polynôme B , on pose $A(B) = \sum_{k \geq 0} a_k B^k$, le *composé* du polynôme B par le polynôme A .

1.f

Exemple (Composé de polynômes)

Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(X) = P$.

i

Exercice (Composés de polynômes)

Pour $A = X^2 + 1$ et $B = X + 3$, calculer $A(B)$ et $B(A)$.

1

1.2. DEGRÉ D'UN POLYNÔME

Définition (Degré d'un polynôme)

Soit $P = \sum_{k \geq 0} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, P non nul. On appelle *degré* de P et note $\deg(P)$ le plus grand entier p tel que $a_p \neq 0$. Par convention, le degré du polynôme nul vaut $-\infty$.

1.g

Valuation d'un polynôme

On a une notion analogue à celle du degré en prenant le plus petit entier et non le plus grand : la *valuation* de P non nul (par convention la valuation du polynôme nul vaut $+\infty$). Les propriétés que nous verrons pour le degré ont des analogues pour la valuation, que je vous incite à énoncer et démontrer.

1.1

Définition (Coefficient dominant, polynôme unitaire)

On appelle *coefficient dominant* d'un polynôme $P = \sum_{k \geq 0} a_k X^k$ non nul de degré p le coefficient a_p , *i.e.* celui de son terme de plus haut degré. Un polynôme *unitaire* (ou *normalisé*) est un polynôme (non nul) de coefficient dominant égal à 1. Le *normalisé* d'un polynôme non nul P , de coefficient dominant λ , est le polynôme $\frac{1}{\lambda}P$.

1.h

Proposition (Degré d'une somme, d'un produit)

Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. On a :

- (1) $\deg(P + Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$, une condition suffisante d'égalité étant $\deg P \neq \deg Q$.
- (2) $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$.

1.c

Démonstration

□

Donner un exemple où l'inégalité est stricte :

Comme indiqué, nous avons une condition suffisante (« si ») mais pas nécessaire (« seulement si ») :

Corollaire (Intégrité de l'anneau des polynômes)

L'anneau $\mathbb{K}[X]$ est intègre.

1.d

Démonstration

□

En particulier, tout polynôme non nul est simplifiable pour le produit.

Corollaire (Polynômes inversibles)

Un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ est inversible si et seulement si son degré est nul (*i.e.* si et seulement si c'est un polynôme constant non nul).

1.e

Démonstration

□

Ces résultats expliquent pourquoi on a posé $\deg 0 = -\infty$.

Cela permet en particulier de prouver que pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, tous scalaires λ et μ :

$$\deg(\lambda P + \mu Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$$

Proposition (Degrés échelonnés)

Soit $(P_k)_{1 \leq k \leq m}$ une famille de polynômes *tous non nuls*. On suppose que

$$\deg P_1 < \dots < \deg P_m$$

(on dit que l'on a une famille de polynômes à *degrés échelonnés*).

La famille $(P_k)_{1 \leq k \leq m}$ est alors libre.

1.f

Démonstration

□

Définition (Espace des polynômes de degré au plus n)Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $\mathbb{K}_n[X]$ par

$$\{P \in \mathbb{K}[X], \deg P \leq n\}$$

1.i

$\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$, de dimension¹ $n + 1$, dont une base (dite *canonique*) est $(1, X, \dots, X^n)$.

Si $n \geq 1$, $\mathbb{K}_n[X]$ n'est pas un sous-anneau de $\mathbb{K}[X]$, car non stable par multiplication.

Exercice (Degré d'un polynôme composé)

Faire l'exercice 8 de TD.

2

Exercice (Exemple de base polynomiale)

Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de polynômes, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(P_n) = n$.
Montrer que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.

3

1.3. DIVISION EUCLIDIENNE

Définition (Relation de divisibilité dans l'anneau des polynômes)

Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. On dit que B *divise* A , ou que A est un *multiple* de B , s'il existe $C \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BC$.

On note alors $B|A$.

On note $A\mathbb{K}[X]$ (resp. $\mathcal{D}(A)$) l'ensemble des multiples (resp. des diviseurs) de A .

1.j

Exemple (Divisibilité dans l'anneau des polynômes)

$$X^2 + 1 \text{ divise } X^4 + 4X^2 + 3.$$

Le polynôme nul ne divise que lui-même, mais est divisible par tout polynôme.

ii

La relation de divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$ est réflexive, transitive, mais non antisymétrique :

1. et non n , comme on le lit trop souvent.

Si $B|A$, alors $BC|AC$ pour tout $C \in \mathbb{K}[X]$ (la réciproque est vraie si $C \neq 0$, par intégrité).
 Si B divise A et A est non nul, alors $\deg B \leq \deg A$.

Définition (Polynômes associés)

On dit que deux polynômes A et B sont *associés* s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $A = \lambda B$

1.k

Justification de l'expression symétrique :

Proposition (Caractérisations des polynômes associés)

Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (1) A et B sont associés.
- (2) A divise B et B divise A .
- (3) A et B ont même degré, et l'un divise l'autre.

1.g

Démonstration

□

Théorème de division euclidienne dans l'anneau des polynômes

Étant donné deux polynômes A et B de $\mathbb{K}[X]$, où $B \neq 0$, il existe un unique couple (Q, R) de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ vérifiant :

$$A = BQ + R \quad \text{et} \quad \deg R < \deg B$$

1.h

Définition (Quotient et reste d'une division euclidienne polynomiale)

Dans ce contexte, on appelle Q le *quotient* et R le *reste* de la division euclidienne de A par B .

1.i

Démonstration

Unicité :

□

Démonstration

Existence : notons $m = \deg(B)$, b_m le coefficient dominant de B .

Pour tout entier $n \geq m$, on pose l'hypothèse de récurrence \mathcal{H}_n : pour tout polynôme A de degré strictement inférieur à n , on a existence d'un tel couple.

Amorçage au rang m : soit $A \in \mathbb{K}[X]$, $\deg(A) < m$. Le couple $(0, A)$ convient ($A = 0 \times B + A$ et $\deg(A) < \deg(B)$).

Hérédité : fixons un entier $n \geq m$, et supposons le résultat vérifié à ce rang. Soit $A \in \mathbb{K}[X]$, $\deg(A) < n + 1$.

Si $\deg(A) < n$, l'hypothèse de récurrence permet de conclure directement.

Supposons $\deg(A) = n$, notons a_n son coefficient dominant.

Posons $A_1 = A - \frac{a_n}{b_m} X^{n-m} B$. Comme $\deg(A_1) < n$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence, obtenant $(Q_1, R_1) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $A_1 = Q_1 B + R_1$ et $\deg(R_1) < \deg(B)$.

On a

$$A = \left(\frac{a_n}{b_m} X^{n-m} + Q_1 \right) B + R_1,$$

d'où l'existence d'un tel couple pour A : l'hérédité est prouvée.

□

Le polynôme B divise A si et seulement si le reste de la division euclidienne de A par B est nul.

La preuve de l'existence est intéressante en tant que telle, puisqu'elle nous fournit un algorithme pour effectuer cette division euclidienne :

Algorithme de division euclidienne :

Données : B de degré $m \geq 0$, de coefficient dominant $b_m \neq 0$, A de degré $n \geq m$.

$Q \leftarrow 0$; $R \leftarrow A$.

Pour k allant de $n - m$ à 0 par pas de -1 :

- $q_k \leftarrow r_{k+m}/b_m$.

- $R \leftarrow R - q_k X^k B$.

Exercice (Division euclidienne polynomiale)

Effectuer la division euclidienne de $A = X^5 + 2X^4 - 3X^2 + X + 2$ par $B = X^3 - X + 1$.

4

Dans certains exercices, il est demandé ou il est utile de calculer le reste dans une division euclidienne. Nous verrons qu'il n'est pas toujours nécessaire d'effectuer une division euclidienne pour ce faire.

Exercice (Idéaux de l'anneau des polynômes à une indéterminée)

Une partie \mathcal{I} de $\mathbb{K}[X]$ en est un *idéal* si c'est un sous-groupe additif, stable par multiplication par un élément quelconque de $\mathbb{K}[X]$.

Montrer qu'une partie \mathcal{I} de $\mathbb{K}[X]$ en est un idéal si et seulement si il existe $A \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$\mathcal{I} = A\mathbb{K}[X].$$

5

2. FONCTIONS POLYNOMIALES

2.1. DÉFINITION. RACINES D'UN POLYNÔME

Définition (Fonction polynomiale)

Soit $A = \sum_{k \geq 0} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, on pose

$$A(\alpha) = \sum_{k \geq 0} a_k \alpha^k$$

(dans cette somme, seul un nombre fini de termes sont non nuls).

La fonction de \mathbb{K} dans \mathbb{K} , définie par $x \mapsto A(x)$, est appelée *fonction polynomiale* associée au polynôme A , et notée \tilde{A} , voire A .

2.a

Cette définition est consistante avec celle d'un polynôme composé.

Proposition (Morphisme d'évaluation d'un polynôme)

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. L'application $\mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}$, $P \mapsto P(\alpha)$ est à la fois une forme linéaire et un morphisme d'anneaux.

2.a

Le reste de la division euclidienne de P par $X - \alpha$ (où $\alpha \in \mathbb{K}$) est $P(\alpha)$.

Définition (Racine d'un polynôme)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On dit que α est un *zéro* (ou une *racine*) de P si $P(\alpha) = 0$.

2.b

Comme $P(0)$ est le coefficient constant, on voit tout de suite si 0 est racine de P . De même, 1 est racine si et seulement si la somme des coefficients est nulle.

α est une racine de P si et seulement si le reste de la division euclidienne de P par $X - \alpha$ est nul, si et seulement si $(X - \alpha)$ divise P .

Comme l'évaluation en α est une forme linéaire non nulle, l'ensemble des polynômes admettant α pour racine est un hyperplan. Comme cette évaluation est également un morphisme d'anneaux, cet ensemble est aussi un idéal de $\mathbb{K}[X]$.

Exercice (Polynôme admettant p racines distinctes)

Montrer que si $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont p racines distinctes de P , alors P est divisible par $\prod_{1 \leq i \leq p} (X - \alpha_i)$.

6

En particulier, si $\deg P = p$, alors il existe une constante non nulle λ (le coefficient dominant de P) telle que :

$$P = \lambda \prod_{1 \leq i \leq p} (X - \alpha_i)$$

Exemple (Polynôme admettant n racines distinctes)

Factorisation de $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$:

i

Corollaire (Un polynôme non nul n'a pas plus de racines que son degré)

Un polynôme non nul de degré n admet au plus n racines distinctes.

2.b

Ainsi, si un élément $\mathbb{K}_n[X]$ s'annule $n + 1$ fois au moins, c'est le polynôme nul.

Voici en exercice un sujet extrêmement classique, faisant désormais officiellement partie du programme.

Exercice (Polynômes d'interpolation de Lagrange)

Soit a_0, \dots, a_n des scalaires distincts deux à deux, b_0, \dots, b_n des scalaires.

1 Montrer qu'il existe un unique polynôme P de $\mathbb{K}_n[X]$ tel que $P(a_i) = b_i$ pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. C'est le *polynôme interpolateur de Lagrange* aux points (a_i, b_i) ($i \in \llbracket 0, n \rrbracket$).

2 Déterminer explicitement ce polynôme.

3 Déterminer les polynômes $Q \in \mathbb{K}[X]$ tels que $Q(a_i) = b_i$ pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

7

Proposition (Du polynôme à la fonction polynomiale)

L'application naturelle

$$\begin{aligned} \tilde{\cdot} : \mathbb{K}[X] &\rightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{K}} \\ P &\mapsto \tilde{P} \end{aligned}$$

est un morphisme injectif de \mathbb{K} -espaces-vectoriels et d'anneaux.

2.c

Démonstration

□

L'injectivité peut tomber en défaut dans le cas où le corps de base est quelconque. Donner un exemple lorsque le corps est fini :

Comment calculer rapidement la valeur d'une fonction polynomiale en un point ? Grâce à l'algorithme de Horner :

On écrit $P(X) = ((\dots((a_n X + a_{n-1})X + a_{n-2})X + \dots)X + a_1)X + a_0$.

$V = P(\alpha)$

$V \leftarrow a_n$

Pour i allant de $n - 1$ à 0 par pas de -1 :

$V \leftarrow V * \alpha + a_i$

Cela permet d'évaluer un polynôme en moins de produits que la méthode naïve.

Exemple (Algorithme de Horner)

$2X^3 + 3X^2 - X + 4 = ((2X + 3)X - 1)X + 4$. En 3 :
 2 puis $2 * 3 + 3 = 9$ puis $9 * (3) - 1 = 26$ puis $26 * (3) + 4 = 82$

ii

2.2. ORDRE DE MULTIPLICITÉ D'UNE RACINE

Définition (Ordre de multiplicité d'une racine)

Soit α une racine de P non nul. α est appelée *racine d'ordre (de multiplicité) p* (de P) si p est le plus grand entier tel que $(X - \alpha)^p$ divise P .
 On dit que α est racine *multiple* (simple, double, triple, ...) si son ordre vaut 2 au moins (exactement 1, 2, 3, ...).

2.c

L'existence de l'ordre vient de ce que $(X - \alpha)^{\deg P + 1}$ ne divise pas P non nul. En particulier, l'ordre de α dans P est inférieur ou égal à $\deg(P)$.

On dit aussi parfois que α est racine d'ordre 0 pour parler d'une non racine (ce sera le cas dans ce cours).

Exercice (Caractérisation de l'ordre d'une racine)

Montrer que $\alpha \in \mathbb{K}$ est racine d'ordre $p \in \mathbb{N}$ dans P si et seulement si il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ n'admettant pas α pour racine tel que $P = (X - \alpha)^p Q$.

8

Lemme Ordre de multiplicité d'une racine dans un produit

Soit $P = QR$ un polynôme, $\alpha \in \mathbb{K}$. Notons m_P, m_Q, m_R les ordres respectifs de α pour les polynômes P, Q, R . On a alors $m_P = m_Q + m_R$.

2.d

Démonstration

□

Corollaire (Ordre de multiplicité)

Si $P = QR$, α est une racine d'ordre r de P , et n'est pas racine de Q , alors α est racine d'ordre r de R .

2.e

Exercice (Polynôme admettant des racines distinctes données avec multiplicité)

Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$. Montrer que si $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont p racines distinctes de P , d'ordre respectivement supérieur ou égal à r_1, \dots, r_p , alors P est divisible par $\prod_{1 \leq i \leq p} (X - \alpha_i)^{r_i}$.

9

En particulier, si $\deg P = \sum_{i=1}^p r_i$, et si λ est le coefficient dominant de P , alors

$$P = \lambda \prod_{1 \leq i \leq p} (X - \alpha_i)^{r_i}$$

Corollaire (Nombre de racines d'un polynôme comptées avec leur multiplicité)

Un polynôme non nul de degré n possède au plus n racines comptées avec leur ordre de multiplicité.

2.f

2.3. POLYNÔME DÉRIVÉ

Définition (Polynôme dérivé)

Soit $P = \sum_{k \geq 0} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. On définit le *polynôme dérivé* P' de P par

$$P' = \sum_{k \geq 1} k a_k X^{k-1} (= \sum_{k \geq 0} (k+1) a_{k+1} X^k)$$

2.d

Contrairement au cas des fonctions, la question de la dérivabilité ne se pose pas, et la notation $(X^2 + X)'$ par exemple est licite.

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on « reconnaît » bien la dérivation usuelle, c'est-à-dire que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $(\widetilde{P}') = (\tilde{P})'$.

Proposition (Degré du polynôme dérivé)

Si $\deg P > 0$, alors $\deg P' = \deg P - 1$.
Le polynôme P est constant si et seulement si $P' = 0$.

2.g

Démonstration

□

Proposition (La dérivation polynomiale est linéaire)

La dérivation est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$.

2.h

Ce morphisme est surjectif non injectif (ce qui prouve au passage qu'on travaille en dimension infinie, même si on le savait depuis le début).

Proposition (Dérivée d'un produit)

Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$. On a :

$$(AB)' = A'B + AB'$$

2.i

La dérivation n'est pas un endomorphisme de l'anneau $\mathbb{K}[X]$:

Démonstration

□

Définition (Dérivées successives d'un polynôme)

Pour tout $r \in \mathbb{N}$, on définit, par récurrence, le polynôme dérivé d'ordre r , par :

$$P^{(0)} = P \text{ et } \forall r \geq 0, P^{(r+1)} = (P^{(r)})'$$

2.e

Exercice (Dérivée r -ième)

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Donner la dérivée r -ième de $(X - \alpha)^n$.

10

Itérée de la dérivation, l'application dérivée r -ième est linéaire.

Proposition (Formule de Leibniz)

Pour tous polynômes P et Q , tout entier $r \in \mathbb{N}$, on a :

$$(PQ)^{(r)} = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} P^{(k)} Q^{(r-k)}$$

2.j

Démonstration

□

Proposition (Formule de Taylor)

Pour tous $P \in \mathbb{K}[X]$, $\alpha \in \mathbb{K}$:

$$P(X) = \sum_{p \geq 0} \frac{P^{(p)}(\alpha)}{p!} (X - \alpha)^p$$

2.k

Démonstration

□

Cette formule est utile pour décomposer un polynôme dans la base $((X - \alpha)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ des puissances de $(X - \alpha)$. On a donc aussi :

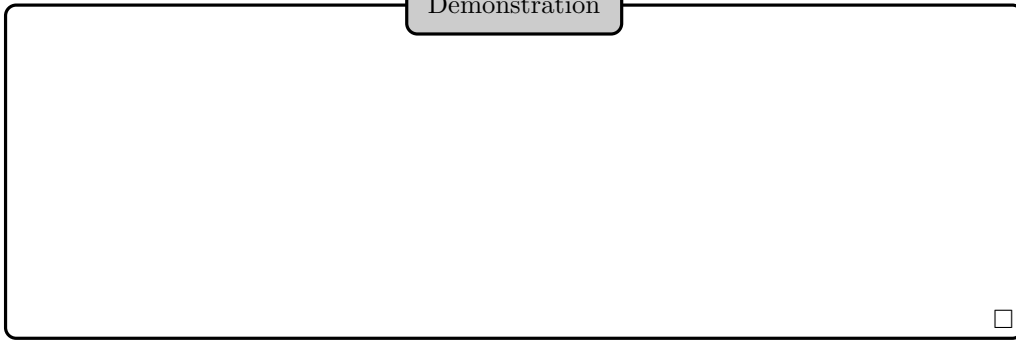
$$P(\alpha + X) = \sum_{p \geq 0} \frac{P^{(p)}(\alpha)}{p!} X^p$$

Proposition (Ordre d'une racine du polynôme dérivé)

Soit $r \geq 1$, $P \in \mathbb{K}[X]$. Si α est racine d'ordre r de P , alors α est racine d'ordre $r - 1$ du polynôme dérivé P' .

2.1

Démonstration



La réciproque est fautive :

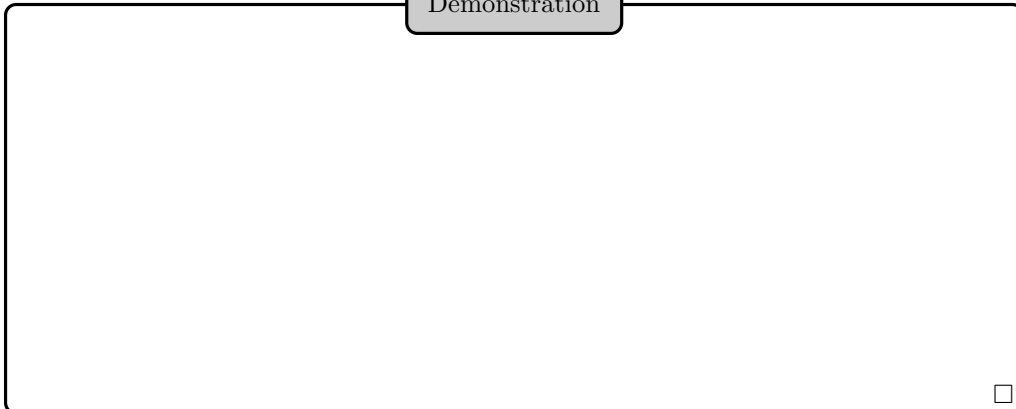
Proposition (Caractérisation de l'ordre d'une racine)

α est racine d'ordre r de P si et seulement si

$$P(\alpha) = \dots = P^{(r-1)}(\alpha) = 0 \text{ et } P^{(r)}(\alpha) \neq 0$$

2.m

Démonstration



Moyen mnémotechnique : l'ordre est le nombre de polynômes s'annulant en α ci-dessus, ou encore prendre $r = 0$ ou $r = 1$.

α est donc une racine multiple de P si et seulement si $P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$.

3. POLYNÔMES SCINDÉS, FONCTIONS SYMÉTRIQUES ÉLÉMENTAIRES DES RACINES

Définition (Polynôme scindé)

Un polynôme non nul est dit *scindé* sur \mathbb{K} s'il peut s'écrire sous la forme

$$P = \lambda \prod_{1 \leq k \leq p} (X - \alpha_k)$$

où $\lambda, \alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont des éléments de \mathbb{K} .

3.a

Le fait d'être scindé est stable par produit, pas par somme :

Exemple (Polynômes scindés)

- (1) $X^2 + 1$ est scindé sur \mathbb{C} , mais pas sur \mathbb{R} .
- (2) Si un polynôme est scindé sur \mathbb{K} , alors ses coefficients sont dans \mathbb{K} , mais la réciproque est fautive.
- (3) Un polynôme complexe de degré n admettant n racines complexes distinctes est scindé, mais la réciproque est fautive :
- (4) En revanche, $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}$ est scindé sur \mathbb{K} si et seulement si il possède n racines dans \mathbb{K} , comptées avec leur ordre de multiplicité.

i

Exemple (Premières relations coefficients racines)

Soit $s, p \in \mathbb{K}$. On sait que les racines de $A = X^2 - sX + p$ ont pour somme s et pour produit p .

ii

Nous allons généraliser ces formules à un polynôme scindé sur \mathbb{K} non constant quelconque.

On considère un polynôme P scindé sur \mathbb{K} : $P = \lambda \prod_{k=1}^p (X - \alpha_k)$, où $p \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$, et $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{K}$. Il existe des scalaires $\sigma_1, \dots, \sigma_p$ tels que

$$P = \lambda \prod_{k=1}^p (X - \alpha_k) = \lambda (X^p - \sigma_1 X^{p-1} + \dots + (-1)^p \sigma_p).$$

Un calcul trivial donne, pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$:

$$\sigma_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq p} \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_k}.$$

Retenir en particulier que

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sum_{k=1}^p \alpha_k \\ \sigma_2 &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq p} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \\ \sigma_p &= \prod_{k=1}^p \alpha_k \end{aligned}$$

Définition (Fonctions symétriques élémentaires des racines)

Les quantités σ_i sont appelées les *fonctions symétriques élémentaires* des racines du polynôme P .

3.b

Exemple (Fonctions symétriques élémentaires des racines)

Détailler les fonctions symétriques élémentaires des racines pour les polynômes scindés sur \mathbb{K} de degrés 2 et 3.

iii

Chaque σ_k peut être vu comme un polynôme en les indéterminées $\alpha_1, \dots, \alpha_p$, de degré global et de valuation k .

En fait, tout polynôme symétrique en les α_k (*i.e.* inchangé en permutant ces indéterminées) peut s'exprimer au moyen de ces fonctions symétriques élémentaires. Par exemple,

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2.$$

Ainsi, $X^3 - X^2 + 3X + 1$ n'est pas scindé sur \mathbb{R} , puisque la somme des carrés de ses racines est strictement négative (je vous invite à trouver une autre preuve, plus élémentaire).

4. ARITHMÉTIQUE DE L'ANNEAU DES POLYNÔMES

4.1. COMPLÉMENTS SUR LA DIVISIBILITÉ

Exercice (Lemme d'algèbre linéaire pour l'arithmétique des polynômes)

Soit E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels, $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$, E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E . Montrer :

$$\varphi(E_1 + E_2) = \varphi(E_1) + \varphi(E_2) \quad \text{et} \quad \varphi(E_1 \cap E_2) \subset \varphi(E_1) \cap \varphi(E_2),$$

cette dernière inclusion pouvant être stricte. Cependant, vérifier que c'est une égalité si φ est injective, ou si φ est nulle.

11

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. L'application $\varphi_P : A \mapsto AP$ de multiplication par P est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$, nul ou injectif.

Pour tous polynômes P, Q et R :

Si P divise Q et R , il divise $\lambda Q + \mu R$.

Si P divise Q , il divise QR .

Pour tout polynôme D , D est un diviseur commun à P et Q si et seulement si D est un diviseur commun à P et $Q - PR$.

Si A et B sont deux polynômes, B non nul, R le reste de la division euclidienne de A par B , alors

$$\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(B) \cap \mathcal{D}(R).$$

4.2. PGCD

Si P est un polynôme, on note P^* le normalisé de P si P n'est pas nul, et le polynôme nul si P l'est lui-même.

Proposition (PGCD pour deux polynômes)

Soient A et B deux éléments de $\mathbb{K}[X]$. Il existe un unique polynôme nul ou unitaire D tel que $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(D)$, *i.e.* :

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], (P|A \text{ et } P|B) \Leftrightarrow P|D.$$

De plus, il existe un couple de polynômes (U, V) tel que $AU + BV = A \wedge B$.

4.a

Démonstration

Commencer par l'unicité.

Pour l'existence, on écarte le cas où A ou B est nul, puis on se ramène au cas où $\deg(A) \geq \deg(B) \geq 0$. On définit par récurrence les suites (R_k) , (Q_k) , (U_k) , (V_k) de la manière suivante.

$R_0 = A$, $U_0 = 1$, $V_0 = 0$ de sorte que $R_0 = U_0A + V_0B$.

$R_1 = B$, $U_1 = 0$, $V_1 = 1$, de sorte que $R_1 = U_1A + V_1B$.

Pour tout entier naturel k tel que R_k et R_{k+1} soient définis, et si $R_{k+1} \neq 0$, on définit Q_{k+2} (resp. R_{k+2}) comme le quotient (resp. le reste) de la division euclidienne de R_k par R_{k+1} . On définit alors $U_{k+2} = U_k - Q_{k+2}U_{k+1}$ et $V_{k+2} = V_k - Q_{k+2}V_{k+1}$ de sorte que si $R_k = U_kA + V_kB$ et $R_{k+1} = U_{k+1}A + V_{k+1}B$, alors $R_{k+2} = U_{k+2}A + V_{k+2}B$. Les diviseurs communs à R_k et R_{k+1} sont les diviseurs communs à A et B , et la suite des degrés des R_k est strictement décroissante à partir du rang 1

□

Définition (PGCD de deux polynômes)

On dit que D est le *pgcd* de A et de B . On note $D = \text{pgcd}(A, B)$, ou $D = A \wedge B$. On dit que $AU + BV = A \wedge B$ est une *relation de Bézout* pour A et B , et que (U, V) est un couple de coefficients de Bézout pour le couple (A, B) .

4.a

En fait² on a

$$A\mathbb{K}[X] + B\mathbb{K}[X] = (A \wedge B)\mathbb{K}[X]$$

- (1) Si $A = 0$, alors $A \wedge B$ vaut B^* .
- (2) Plus généralement $A \wedge B = B^*$ si et seulement si B divise A .
- (3) $A \wedge B = B \wedge A$
- (4) D est le polynôme unitaire de plus haut degré divisant A et B .
- (5) Si on a des polynômes associés, $\mathcal{D}(A_1) = \mathcal{D}(A_2)$ et $\mathcal{D}(B_1) = \mathcal{D}(B_2)$, alors $A_1 \wedge B_1 = A_2 \wedge B_2$.
- (6) $\forall A, B, C \in \mathbb{K}[X], (A - BC) \wedge B = A \wedge B$
- (7) Pour tous polynômes A, B, C , on a $(CA) \wedge (CB) = C^*(A \wedge B)$.
- (8) Il n'y a pas unicité du couple de Bézout.

Algorithme d'Euclide³

$(U_0, V_0) \leftarrow (1, 0)$

$(U_1, V_1) \leftarrow (0, 1)$

Tant que $B \neq 0$

$Q \leftarrow$ quotient de la division euclidienne de A par B

$(A, B) \leftarrow (B, A - QB)$

$(U_0, U_1) \leftarrow (U_1, U_0 - QU_1)$

$(V_0, V_1) \leftarrow (V_1, V_0 - QV_1)$

Fin tant que

Si $A \neq 0$

$\lambda \leftarrow$ coefficient dominant de A .

$A \leftarrow A/\lambda$, $U_0 \leftarrow U_0/\lambda$, $V_0 \leftarrow V_0/\lambda$.

Résultat : (A, U_0, V_0) .

2. La « bonne » définition de $A \wedge B$ consisterait à observer que $A\mathbb{K}[X] + B\mathbb{K}[X]$ est un idéal, donc de la forme $C\mathbb{K}[X]$ pour un certain polynôme, uniquement déterminé si on impose en outre qu'il soit nul ou unitaire.

3. que vous pouvez prouver en utilisant un invariant de boucle

4.3. POLYNÔMES PREMIERS ENTRE EUX

Définition (Polynômes premiers entre eux)

Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. On dit que A et B sont *premiers entre eux* si $A \wedge B = 1$, *i.e.* les seuls diviseurs communs à A et B sont les polynômes constants non nuls (*i.e.* de degré 0).

4.b

Proposition (Identité de Bézout pour les polynômes)

Deux polynômes A et B sont premiers entre eux si et seulement si il existe deux polynômes U et V tels que

$$AU + BV = 1$$

4.b

Démonstration

□

Théorème de Gauss

Si A divise BC et A est premier avec B , alors A divise C .

4.c

Démonstration

□

Si A est premier avec BC , il est premier avec B et avec C .

Si A est premier avec B et avec C , alors A est premier avec BC . Plus généralement, si chaque A_i est premier avec chaque B_j , alors $A_1 \dots A_m$ et $B_1 \dots B_n$ sont premiers entre eux.

Cas particulier : si $A \wedge B = 1$, alors $A^m \wedge B^n = 1$ pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$.

Si λ et μ sont deux scalaires distincts, alors $(X - \lambda) \wedge (X - \mu) = 1$.

Plus généralement, si λ_i, μ_j sont des scalaires distincts deux à deux et α_i, β_j sont des entiers naturels, alors

$$\prod (X - \lambda_i)^{\alpha_i} \wedge \prod (X - \mu_j)^{\beta_j} = 1$$

Ainsi, deux polynômes scindés sur \mathbb{K} sont premiers entre eux si et seulement si ils n'ont pas de racine commune.

Si A et B premiers entre eux divisent C , alors AB divise C .

Il existe des polynômes A_1 et B_1 premiers entre eux tels que $A = (A \wedge B)A_1$ et $B = (A \wedge B)B_1$.

4.4. PPCM

Définition (PPCM de deux polynômes)

Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Il existe un unique polynôme M , nul ou unitaire tel que

$$A\mathbb{K}[X] \cap B\mathbb{K}[X] = M\mathbb{K}[X].$$

On dit que M est le *ppcm* de A et B , on le note $\text{ppcm}(A, B)$ ou $A \vee B$.

4.c

Démonstration

Justification de cette définition :

□

Invariance du ppcm par association.

Si A ou B est nul, le ppcm est nul.

$A \vee B = B^*$ si et seulement si B est un multiple de A .

Si A et B sont non nuls, alors le ppcm est non nul, et est le commun multiple unitaire de plus petit degré de A et B .

$$(CA) \vee (CB) = C^*(A \vee B)$$

Si A et B sont premiers entre eux, alors $A \vee B = (AB)^*$, et réciproquement dans le cas où A et B sont non nuls.

Pour tous polynômes A et B , on a

$$(A \wedge B)(A \vee B) = (AB)^*.$$

On généralise comme dans le cas de \mathbb{Z} les notions de PGCD et PPCM au cas d'une famille finie de polynômes. Il faudra à cet égard distinguer polynômes premiers entre eux deux à deux et polynômes premiers entre eux dans leur ensemble.

5. POLYNÔMES IRRÉDUCTIBLES, DÉCOMPOSITION

5.1. POLYNÔMES IRRÉDUCTIBLES

Définition (Polynôme irréductible sur un corps)

On appelle polynôme *irréductible* (sur \mathbb{K}) tout polynôme P non constant de $\mathbb{K}[X]$ dont les seuls diviseurs dans $\mathbb{K}[X]$ sont les polynômes constants ou associés à P :

$$\forall A, B \in \mathbb{K}[X], P = AB \Rightarrow (\deg A = 0 \text{ ou } \deg B = 0)$$

5.a

Exemple (Polynômes irréductibles)

- (1) Tout polynôme de degré 1 est donc irréductible.
- (2) Un polynôme de degré 2 n'est pas toujours irréductible, mais peut l'être.
- (3) Un polynôme de degré supérieur ou égal à 2 est non irréductible s'il possède une racine et *a fortiori* s'il est scindé, mais ces conditions ne sont pas nécessaires.
- (4) En revanche elles le deviennent si le degré du polynôme est 2 ou 3.
- (5) En particulier, un polynôme réel de degré impair ≥ 3 n'est jamais irréductible sur \mathbb{R} .

i

Si P est irréductible, alors les associés de P sont irréductibles.

Pour tous $A, P \in \mathbb{K}[X]$, où P est irréductible, $(P \wedge A)$ vaut 1 ou P^* , *i.e.* P et A sont premiers entre eux ou P divise A .

Si deux polynômes irréductibles ne sont pas associés, ils sont premiers entre eux (en particulier deux polynômes unitaires irréductibles distincts).

Si P irréductible divise un produit, alors il divise un terme de ce produit.

Proposition (Existence d'un diviseur irréductible)

Tout polynôme non constant est divisible par au moins un polynôme irréductible.

5.a

Démonstration

□

Proposition (Décomposition en produit d'irréductibles)

Tout polynôme A non constant s'écrit

$$A = \lambda P_1^{\alpha_1} \dots P_m^{\alpha_m},$$

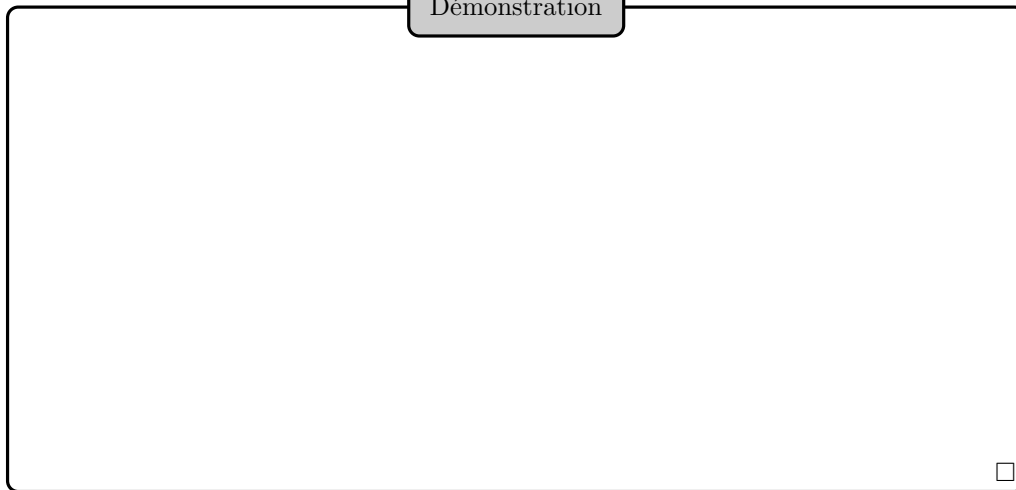
où $m > 0$, les P_i sont des polynômes irréductibles unitaires distincts deux à deux, et les α_i sont des entiers strictement positifs.

Une telle écriture est unique à l'ordre des facteurs près.

Cette décomposition s'appelle *décomposition canonique de A en produit de facteurs irréductibles*.

5.b

Démonstration



On peut décrire les diviseurs de A d'après sa décomposition.

On peut calculer $A \wedge B$ et $A \vee B$ si on connaît les décompositions de A et de B .

5.2. LE THÉORÈME DE D'ALEMBERT-GAUSS. APPLICATION À LA FACTORISATION DANS $\mathbb{C}[X]$ ET $\mathbb{R}[X]$

Théorème de d'Alembert-Gauss

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ possède une racine dans \mathbb{C} .

5.c

Démonstration

Admise !

□

Corollaire (Polynômes irréductibles complexes)

L'ensemble des polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ est l'ensemble des polynômes de degré 1.

5.d

Corollaire (Décomposition en produit d'irréductibles, cas complexe)

Tout polynôme non constant P de $\mathbb{C}[X]$ est scindé sur \mathbb{C} , *i.e.* P peut s'écrire sous la forme

$$P = \lambda \prod_{1 \leq k \leq p} (X - \alpha_k)^{m_k}$$

pour $p \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$, des complexes $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ deux à deux distincts, et des entiers naturels non nuls m_1, \dots, m_p .

5.e

Définition (Polynôme conjugué)

Soit $P = \sum_{k \geq 0} a_k X^k$ un polynôme. On appelle *polynôme conjugué* de P et on note \bar{P} le polynôme $\sum_{k \geq 0} \bar{a}_k X^k$.

5.b

Proposition (Racine conjuguée du polynôme conjugué)

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, α une racine complexe d'ordre $r \in \mathbb{N}$. Le complexe $\bar{\alpha}$ est alors racine d'ordre r de \bar{P} .

5.f

Dans le cas particulier où le polynôme P est réel et la racine α non réelle, $\bar{\alpha}$ est racine de P , de même ordre que α .

Proposition (Polynômes irréductibles réels)

Les polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 sans racine réelle (*i.e.* de discriminant strictement négatif).

5.g

Démonstration

□

Proposition (Décomposition en produit d'irréductibles, cas réel)

Tout polynôme non constant P de $\mathbb{R}[X]$ peut s'écrire comme produit de son coefficient dominant, de polynômes réels unitaires de degré 1 et de polynômes réels unitaires de degré 2 sans racine réelle.

5.h

Exercice (Décomposition, cas réel)

- 1 Factoriser $X^4 + bX^2 + c$ dans $\mathbb{R}[X]$, où b et c sont des réels tels que $b^2 - 4c < 0$.
- 2 Factoriser $X^n - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

12

6. FEUILLE DE TD 15 : POLYNÔMES

La lettre \mathbb{K} désigne le corps \mathbb{R} des nombres réels ou le corps \mathbb{C} des nombres complexes, n, p, q sont des entiers naturels.

6.1. ARITHMÉTIQUE DES POLYNÔMES

Exercice 1 (Calculs de restes)

0

4 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $a, b \in \mathbb{K}$, $a \neq b$. Quel est le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)$, par $(X - a)(X - b)$?

5 Trouver le reste de la division euclidienne de $X^6 - 5X^4 + 3X^3 - X^2 + X + 2$ par $(X - 1)^3$.

6 Trouver par trois méthodes le reste de la division euclidienne de $P = X^5 + 4X^3 + 3X^2 - X + 6$ par $(X - 1)^2(X + 2)$.

7 Chercher le reste de la division euclidienne de $(X + 1)^n - X^n - 1$ par $X^2 + X + 1$.

8 Soit $B = X^3 - X^2 + X - 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $A_n = (X^2 + X + 1)^n - X^{2n} - X^n - 1$.

i Donner une condition sur n pour que B divise A_n .

ii Donner le reste de la division euclidienne de A_n par B .

Exercice 2 (Contraintes de restes)

0

1 Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{K}_3[X]$ divisibles par $X + 1$ et dont les restes des divisions par $X + 2, X + 3, X + 4$ sont égaux.

2 (*Mines PSI 09*) Trouver le polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré minimal tel que : P divisé par $X^2 + X + 1$ donne un reste égal à $X - 1$ et P divisé par $(X - 1)^2$ donne un reste égal à $2 - X$.

Exercice 3 (Divisibilité de polynômes)

0

1

i Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Démontrer que $P - X$ divise $P(P) - X$.

ii Résoudre dans \mathbb{C} : $(z^2 + 3z + 1)^2 + 3z^2 + 8z + 4 = 0$.

2 Trouver $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tels que $X^2 + X + 1$ divise $X^5 + \lambda X^3 + \mu X^2 + 1$.

3 Soit $A, B, P \in \mathbb{K}[X]$ avec P non constant. Montrer que si $A \circ P$ (autre notation pour $A(P)$) divise $B \circ P$, alors A divise B .

Exercice 4 (Couple de Bézout)

0

Trouver un couple de Bézout pour $A = X^5 + 1$ et $B = X^7 + X^6 + X^3 + 1$.

Exercice 5 (Décomposition en produit d'irréductibles)

0, 5 pour la dernière

1 Factoriser $P(X) = 3X^4 + 11X^3 + 20X^2 + 7X - 5$, sachant que P admet au moins deux racines rationnelles (comptées avec leur ordre de multiplicité).

2 Factoriser $X^8 + X^4 + 1$ sur \mathbb{R} .

3 (*CCP MP 08*) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Factoriser en produit d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$: $X^{2n} - 2\cos(\theta)X^n + 1$.

4 Démontrer que $1 + (X - 1)^2(X - 3)^2$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Exercice 6 (Couple de Bézout optimal)

1

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ non associés et $D = P \wedge Q$.

Montrer qu'il existe un unique couple (U, V) de polynômes tels que :

$$UP + VQ = D, \deg U < \deg Q - \deg D \text{ et } \deg V < \deg P - \deg D$$

Exercice 7 (Polynômes positifs)

1

Soit $\mathcal{E} = \{P \in \mathbb{R}[X] : \exists Q, R \in \mathbb{R}[X] \text{ tq } P = Q^2 + R^2\}$.

1 Montrer que \mathcal{E} est stable par multiplication.

2 Montrer que $\mathcal{E} = \{P \in \mathbb{R}[X] \text{ tq } \forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0\}$.

Exercice 8 (Degré d'un polynôme composé)

2

Montrer que pour tous polynômes non constants P et Q , $\deg(P(Q)) = \deg(P) \deg(Q)$.

6.2. POLYNÔMES ET ALGÈBRE LINÉAIRE

Exercice 9 (Familles de $\mathbb{R}_3[X]$ (TPE PC 08))

0

Soit $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{R}_3[X]$.

1 On suppose que : $P_1(1) = P_2(1) = P_3(1) = P_4(1) = 0$. La famille (P_1, P_2, P_3, P_4) est-elle liée ?

2 On suppose que : $P_1(0) = P_2(0) = P_3(0) = P_4(0) = 1$. La famille (P_1, P_2, P_3, P_4) est-elle liée ?

Exercice 10 (Puissances de matrices)

0, 1 pour la méthode

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1 Calculer $A^3 - 3A^2 + 2A$.

2 Quel est le reste de la division euclidienne de X^n par $X^3 - 3X^2 + 2X$?

3 Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

4 A est-elle inversible ?

Exercice 11 (Un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$ (TPE PC 08))

0

1 Soit $\phi : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P + P'$. Montrer que ϕ est un automorphisme.

2 Étudier de même $\psi : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto aP + XP'$, où $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 12 (Un opérateur sur les polynômes)

1

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $U_p = \frac{\prod_{k=0}^{p-1} (X-k)}{p!}$, $p \in \mathbb{N}$ (par convention, un produit indexé par l'ensemble vide vaut 1), et

$$\begin{aligned} \Delta : \mathbb{K}[X] &\rightarrow \mathbb{K}[X] \\ P &\mapsto P(X+1) - P(X) \end{aligned}$$

1 Démontrer que la famille $(U_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.

2 Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\Delta^n(U_p)$.

3 En déduire que : pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$, on a $P = P(0) + (\Delta P)(0)U_1 + (\Delta^2 P)(0)U_2 + \dots + (\Delta^n P)(0)U_n$.

4 (*X MP 09*) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que P prend en tout entier relatif une valeur entière relative si et seulement si les coordonnées de P dans la base (U_p) sont entières.

5 (*X MP 09*) On prolonge naturellement l'application Δ en un endomorphisme de $\mathbb{K}^{\mathbb{K}}$. Soit $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ une fonction. Montrer que f est polynomiale si et seulement si il existe un entier naturel n tel que $\Delta^n(f) = 0$.

6 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n . Démontrer que la famille $(P(X), P(X+1), \dots, P(X+n))$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$

Exercice 13 (Bases d'espaces polynomiaux)

2

1 (*TPE*) Soit $a, b \in \mathbb{K}$, $a \neq b$, et $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose $P_k = (X-a)^k(X-b)^{n-k}$. Démontrer que la famille (P_0, \dots, P_n) est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

2 (*Mines PSI 09*) Soit P un polynôme de degré n et a_0, \dots, a_n des scalaires deux à deux distincts. Montrer que la famille $(P(X+a_k))_{0 \leq k \leq n}$ constitue une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 14 (Formes linéaires sur des espaces de polynômes)

2

1 (*Mines MP 09*) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un unique (c_1, \dots, c_n) de \mathbb{R}^n tel que, pour tout P de $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$:

$$\int_{-1}^1 P(t) dt = 2P(0) + \sum_{k=1}^n c_k (P(k) + P(-k) - 2P(0)).$$

2 (*Centrale MP 07*) Soit $A = \{P \in \mathbb{R}_n[X], \sum_{k=1}^n P^{(k)}(1) = 0\}$. Quelle est la dimension de A ? Donner une base de A .

3 (*X MP 09*) Déterminer les $a \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ tels qu'il existe $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_4[X], \quad P'(a) = \alpha P(-2) + \beta P'(-2) + \gamma P(-1) + \delta P(1/2).$$

Exercice 15 (Une relation polynomiale (*X MP 08*))

3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{C}[X]$ unitaire de degré n , scindé à racines simples. On note a_1, \dots, a_n les racines de P . Montrer que pour tout $Q \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$:

$$\sum_{i=1}^n \frac{Q(a_i)}{P'(a_i)} = \frac{Q^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}.$$

6.3. RACINES D'UN POLYNÔME

Exercice 16 (Équation d'inconnue polynomiale (*Mines MP 08, X MP 09*))

1

- 1 Soit $\mathcal{A} = \{P \in \mathbb{C}[X], P \neq 0 \text{ et } P(X^2) = P(X)P(X-1)\}$. Soit $P \in \mathcal{A}$. Montrer que les racines de P sont de module 1. Déterminer \mathcal{A} .
- 2 (*Mines PC 09*) Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $(X+4)P(X) = XP(X+1)$.
- 3 (*Centrale PC 09*) Déterminer les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P .
- 4 Trouver les $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P = P'P''$.

Exercice 17 (Relations coefficients-racines)

2

- 1 (*X PC 08*) Soit $P = X^3 + 2X^2 + X + 1$. Déterminer le nombre de racines réelles de P . On note x_1, x_2, x_3 les racines de P . Déterminer : $x_1 + x_2 + x_3, x_1x_2x_3, \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}, \frac{1}{x_1-2} + \frac{1}{x_2-2} + \frac{1}{x_3-2}, x_1^5 + x_2^5 + x_3^5$.
- 2 Soit x_1, x_2, x_3, x_4 les racines de $X^4 + X + 1$. Calculer $\sum_{i=1}^4 \frac{1}{x_i-1}$.
- 3 Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$. Montrer que ces nombres sont en progression géométrique si et seulement si $(ab + ac + bc)^3 = abc(a + b + c)^3$.

Exercice 18 (Polynômes scindés)

2

- 1 (*Mines MP 09*) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur \mathbb{R} . Montrer que P' est scindé sur \mathbb{R} .
- 2 (*X MP 09*) Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur \mathbb{R} et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $Q + aQ'$ est scindé sur \mathbb{R} .
- 3 (*X MP 09*) Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$ des polynômes scindés sur \mathbb{R} . On pose $R = \sum_{k=0}^n a_k Q^{(k)}$. Montrer que R est scindé sur \mathbb{R} .

Exercice 19 (Multiplicité de racines)

2

- 1 (*Mines MP 07, X MP 09*) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que les racines complexes du polynôme $\prod_{k=0}^n (X-k) + a$ sont de multiplicité au plus 2.
- 2 (*X MP 09*) Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ scindé sur \mathbb{R} . Montrer que toute racine multiple de P' est racine de P .

Exercice 20 (Majoration du module des racines (*X-ENS PSI 08*))

2

Soient $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ et $P = a_0 + a_1X + \dots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n$. Montrer que les racines complexes de P ont un module majoré par $\max\{1, |a_0| + |a_1| + \dots + |a_{n-1}|\}$

Exercice 21 (Etude des racines d'un polynôme (*Mines MP 08*))

3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P(X) = nX^n - \sum_{k=0}^{n-1} X^k \in \mathbb{C}[X]$.

- 1 Soit z une racine de P distincte de 1. Montrer que $|z| < 1$.
- 2 Montrer que les racines de P sont simples.

Exercice 22 (Polynôme complexe laissant stable l'ensemble des rationnels (*Mines PSI 08*))

3

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On suppose que $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$. Montrer que $P \in \mathbb{Q}[X]$.

6.4. DIVERS

Exercice 23 (Irrationalité de π)

1

1 Soit $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que le polynôme $P_n = \frac{X^n(bX-a)^n}{n!}$ et ses dérivées successives prennent, en 0 et $\frac{a}{b}$, des valeurs entières.

2 Montrer que la suite de terme général $I_n = \int_0^\pi P_n(t) \sin(t) dt$ converge vers 0.

3 Montrer par l'absurde que $\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Exercice 24 (D'un polynôme positif à un autre)

3

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$. Démontrer que pour tout réel x , on a $(P + P' + P'' + \dots)(x) \geq 0$.

Exercice 25 (Une curiosité polynomiale)

4

Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ et $P = X^2 + aX + b$. Montrer : $\forall n \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z}, P(n)P(n+1) = P(k)$.

Analyse asymptotique

Sommaire

1. Relations de comparaison pour les fonctions	377
1.1. Définitions et premiers exemples	377
1.2. Propriétés	379
1.3. Quelques relations de comparaison usuelles	381
2. Développements limités	382
2.1. Définitions et propriétés élémentaires	382
2.2. Développements limités usuels	384
2.3. Opérations sur les développements limités	384
3. Applications des développements limités	388
3.1. Positions relatives d'une courbe et de sa tangente en un point	389
3.2. Développements asymptotiques	389
4. Feuille de TD 16 : Analyse asymptotique	392
4.1. Comparaison de fonctions	392
4.2. Formules de Taylor	392
4.3. Calcul de développements limités	392
4.4. Utilisation des développements limités	393
4.5. Développements asymptotiques	394

Nous avons déjà introduit les relations de comparaison pour les suites (les revoir).

1. RELATIONS DE COMPARAISON POUR LES FONCTIONS

Ce paragraphe ne fait qu'introduire trois définitions simples, et en donne quelques propriétés, tout aussi simples. L'écueil possible de l'élève dans ce chapitre est de ne pas comprendre les symboles utilisés, et de leur appliquer sans précaution les règles usuelles de l'algèbre. Bien connaître la définition de ces symboles, et retrouver systématiquement de tête leurs propriétés suffit à contourner cet écueil.

Par défaut, les fonctions considérées sont définies sur un intervalle I .

1.1. DÉFINITIONS ET PREMIERS EXEMPLES

Définition (Relation de domination en a)

On dit que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est *dominée* par g au voisinage de a (ou en a), ou que $f(x)$ est dominée par $g(x)$ lorsque x tend vers a , s'il existe un réel positif M et un voisinage \mathcal{D}_a de a tel que $|f(x)| \leq M|g(x)|$ sur $\mathcal{D}_a \cap I$.

On note alors $f(x) = O_{x \rightarrow a}(g(x))$ ou $f = O_a(g)$ (ou simplement $f(x) = O(g(x))$ ou $f = O(g)$ dans le cas où $a = 0$).

1.a

Cela revient donc à dire qu'il existe un voisinage \mathcal{D}_a de a et une fonction $\alpha : \mathcal{D}_a \rightarrow \mathbb{R}$ bornée telle que $f(x) = \alpha(x)g(x)$, pour tout $x \in \mathcal{D}_a \cap I$.

Les notations « o » et « O » sont appelées *notations de Landau*.

Définition (Relation de négligeabilité en a)

On dit que f est *négligeable* devant g au voisinage de a (ou en a), ou que $f(x)$ est négligeable devant $g(x)$ lorsque x tend vers a , s'il existe un voisinage \mathcal{D}_a de a et une fonction ε définie sur \mathcal{D}_a et de limite nulle en a , tels que pour tout $x \in \mathcal{D}_a \cap I$, on ait $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$.

On note alors $f(x) = o_{x \rightarrow a}(g(x))$ ou $f = o_a(g)$ (ou simplement $f(x) = o(g(x))$ ou $f = o(g)$ dans le cas où $a = 0$).

1.b

Définition (Équivalence en a)

On dit que f est *équivalente* à g au voisinage de a (ou en a), ou que $f(x)$ est équivalente à $g(x)$ lorsque x tend vers a , si l'application $f - g$ est négligeable devant g au voisinage de a .

On note alors $f(x) \sim_{x \rightarrow a} g(x)$ ou $f \sim_a g$ (ou simplement $f(x) \sim g(x)$ ou $f \sim g$ dans le cas où $a = 0$).

1.c

Cela revient donc à dire qu'il existe un voisinage \mathcal{D}_a de a et une fonction $\alpha : \mathcal{D}_a \rightarrow \mathbb{R}$ de limite 1 en a telle que $f(x) = \alpha(x)g(x)$, pour tout $x \in \mathcal{D}_a \cap I$.

Situation courante pour la comparaison de fonctions

Supposons ici, comme c'est souvent le cas, que f et g ne s'annulent pas au voisinage de a , ou qu'elles ne s'annulent qu'en a sur un voisinage de a . Dans ce cas, $f(x) = O_{x \rightarrow a}(g(x))$ (resp. $f(x) = o_{x \rightarrow a}(g(x))$, $f(x) \sim_{x \rightarrow a} g(x)$) signifie que $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a (resp. de limite nulle en a , de limite 1 en a).

1.1

Dans la pratique, a est très souvent nul, et l'on peut d'ailleurs toujours s'y ramener dans le cas où a est fini, par translation de la variable. On peut également s'y ramener lorsque a est infini, via le changement de variable $y = \frac{1}{x}$.

Ces relations sont *locales*, dans la mesure où, pour comparer f et g en a , il suffit de connaître f et g sur un voisinage de a . Ces relations ne disent donc rien du comportement global de f et g .

Nous n'emploierons **jamais** ces relations de comparaison pour comparer à la fonction identiquement nulle, car les trois assertions $f(x) = o_{x \rightarrow a}(0)$, $f(x) = O_{x \rightarrow a}(0)$ et $f(x) \sim_{x \rightarrow a} 0$ signifient que f est identiquement nulle au voisinage de a , ce qui est très rarement le cas des fonctions considérées (sauf de la fonction identiquement nulle). **Pour résumer, le fait de comparer à la fonction nulle est très très douteux.**

Exemple (Relation de domination)

- (1) $f(x) = O_{x \rightarrow a}(1)$ signifie que f est bornée au voisinage de a .
- (2) $\sin(x) = O(x)$ et $x = O(\sin(x))$, $\sin(x) = O_{x \rightarrow +\infty}(x)$.
- (3) $x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = O(x^2)$.

i

Exemple (Négligeabilité)

- (1) $x = o_{x \rightarrow +\infty}(x^2)$, mais $x^2 = o_{x \rightarrow 0}(x)$.
- (2) $f(x) = o_{x \rightarrow a}(1)$ signifie que f tend vers 0 en a .

ii

Exemple (Équivalence)

- (1) $\sin(x) \sim x, e^x - 1 \sim x$. Plus généralement, si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$, alors $f(x) - f(a) \sim_{x \rightarrow a} f'(a)(x - a)$.
- (2) $x^2 + x \sim_{x \rightarrow +\infty} x^2, x^2 + x \sim_{x \rightarrow 0} x, x^2 + x \sim_{x \rightarrow 1} 2$.

iii

1.2. PROPRIÉTÉS

Utilisation abusive des relations de Landau

En pratique, nous emploierons les notations $O_{x \rightarrow a}(g(x)), o_{x \rightarrow a}(g(x))$ comme abréviations respectives pour « (la valeur en x d')une fonction dominée par g en a » et « (la valeur en x d')une fonction négligeable devant g en a ». Cet emploi est tout à fait abusif, puisque nous allons utiliser *la même notation pour désigner des objets différents*. Par exemple, $\sin(x) = o(1), x = o(1)$, mais ces « égalités » ne conduisent pas à $\sin(x) = x \dots$. De même,

$$\tan(x) - \sin(x) = (x + o(x)) - (x + o(x)) = o(x),$$

et non 0 (car $o(x) - o(x) = o(x)$).

1.2

1.2.1. *Opérations et relations de comparaison.* Les démonstrations des résultats ici énoncés proviennent de propriétés élémentaires sur les fonctions numériques (du genre, le produit de fonctions bornées au voisinage de a est borné au voisinage de a) : on laisse le lecteur les détailler.

Plutôt que d'apprendre ces résultats par cœur, on les retrouvera.

Proposition (Propriétés de transitivité)

- (1) si $f = o_a(g)$, alors $f = O_a(g)$;
- (2) si $f = O_a(g)$ et $g = O_a(h)$, alors $f = O_a(h)$;
- (3) si $f = o_a(g)$ et $g = O_a(h)$, ou si $f = O_a(g)$ et $g = o_a(h)$, alors $f = o_a(h)$;
- (4) si $f \sim_a g$, alors $f = O_a(g)$ et $g = O_a(f)$;
- (5) si $f \sim_a g$ et $g = O_a(h)$, alors $f = O_a(h)$;
- (6) si $f \sim_a g$ et $g = o_a(h)$, alors $f = o_a(h)$;
- (7) si $f \sim_a g$ et $g \sim_a h$, alors $f \sim_a h$.

1.a

La relation \sim_a est une relation d'équivalence, ce qui permet de dire que f et g sont équivalentes (ou pas) au voisinage de a .

Les relations o_a et O_a sont transitives, O_a est réflexive mais pas o_a , et aucune d'entre elles n'est symétrique ni antisymétrique.

Proposition (Propriétés liées aux combinaisons linéaires)

Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

- (1) Si $f = O_a(h)$ et $g = O_a(h)$, alors $\lambda f + \mu g = O_a(h)$.
- (2) Si $f = o_a(h)$ et $g = o_a(h)$, alors $\lambda f + \mu g = o_a(h)$.
- (3) Si $f \sim_a h$ et $g = o_a(f)$, alors $f + g \sim_a h$.
- (4) Si $g = o_a(f)$, alors $f + g \sim_a f$.

1.b

Faire TRES attention lorsqu'on somme des équivalents :

Exercice (Les équivalents ne passent pas à la somme)

Montrer que l'équivalence en a se comporte mal avec la somme.

1

Exemple (Somme d'équivalents)

Écrire $\cos(x) \sim 1 - \frac{x^2}{2}$ n'est pas faux, mais beaucoup moins intéressant que $1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$. On a d'ailleurs souvent intérêt à écrire $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

iv

Exercice (Équivalent d'un polynôme en 0 et en l'infini)

Soit $P = \sum_{k \geq 0} \lambda_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, non nul, de valuation q et de degré p . Montrer que $P(x) \sim \lambda_q x^q$ et $P(x) \sim_{x \rightarrow \pm\infty} \lambda_p x^p$.

2

Proposition (Relations de comparaison et produit)

- (1) Si $f = O_a(h)$ et $g = O_a(k)$ alors $fg = O_a(hk)$.
- (2) Si $f = o_a(h)$ et $g = O_a(k)$ alors $fg = o_a(hk)$ (en particulier : si $f = o(h)$ et $g = o(k)$ alors $fg = o(hk)$).
- (3) Si $f = o_a(g)$, alors pour tout $\alpha > 0$, $f^\alpha = o_a(g^\alpha)$ (f et g sont supposées à valeurs dans \mathbb{R}_+^* si $\alpha \notin \mathbb{N}$).
- (4) Si $f \sim_a g$ et $h \sim_a k$, alors $fh \sim_a gk$.

1.c

1.2.2. Propriétés supplémentaires sur les équivalents.

Proposition (Conservation locale du signe par les équivalents)

Si $f \sim_a g$, alors f et g gardent le même signe au voisinage de a .

1.d

Il n'y a rien de tel pour les autres relations.

Proposition (Équivalence et limites)

- (1) Si $f \sim_a g$ et si $\lim_a g = l \in \bar{\mathbb{R}}$, alors $\lim_a f = l$.
- (2) Réciproquement, si $\lim_a f = \lim_a g = l$, avec l réel non nul, alors $f \sim_a g$.

1.e

La réciproque ne se généralise absolument pas au cas où l est infini ou nul :

Proposition (Équivalence et puissance)

Si $f \sim_a g$, alors pour tout α , $f^\alpha \sim_a g^\alpha$ (si $\alpha \notin \mathbb{Z}$, on suppose f et g à valeurs dans \mathbb{R}_+^*).
Cas particulier : $\frac{1}{f} \sim_a \frac{1}{g}$.

1.f

Proposition (Équivalence et quotient)

Si g_1 et g_2 ne s'annulent pas au voisinage de a (sauf peut-être en a), et si $f_1 \sim_a f_2$ et $g_1 \sim_a g_2$, alors $\frac{f_1}{g_1} \sim_a \frac{f_2}{g_2}$.

1.g

Proposition (Changement de variable)

Soit $\varphi : J \rightarrow I$, qui tend vers a en $b \in J$.

- (1) Si f est dominée par g en a , alors $f \circ \varphi$ est dominée par $g \circ \varphi$ en b .
- (2) Si f est négligeable devant g en a , alors $f \circ \varphi$ est négligeable devant $g \circ \varphi$ en b .
- (3) Si $f \sim_a g$, alors $f \circ \varphi \sim_b g \circ \varphi$.

1.h

Exemple (Relations de comparaison et composition à gauche)

Attention ! La proposition précédente montre que les relations de comparaison se comportent bien avec la composition à droite (*i.e.* le changement de variable). Cependant, ces relations se comportent mal avec la composition à gauche :

- (1) Bien que $(1+x) \sim (1+x^2)$, $\ln(1+x)$ et $\ln(1+x^2)$ ne sont pas équivalents en 0.
- (2) De même, $x^2 \sim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + x$, mais $\neg(e^{x^2} \sim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2+x})$.
- (3) Également, $x = o_{x \rightarrow +\infty}(x^2)$ en $+\infty$, mais en composant à gauche par la fonction inverse,

$$\neg \left(\frac{1}{x} = o_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} \right) \right).$$

En composant à droite par la fonction inverse, on obtient la formule valable

$$\frac{1}{x} = o_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2}.$$

v

1.3. QUELQUES RELATIONS DE COMPARAISON USUELLES

On montre sans difficulté les relations de comparaisons suivantes, à connaître :

Exemple (Relations comparaison usuelles)

- (1) $\sin x \sim x$, $\tan x \sim x$, $\ln(1+x) \sim x$, $e^x - 1 \sim x$, $(1+x)^m - 1 \sim mx$ et $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$.
- (2) $x^m - 1 \sim_{x \rightarrow 1} m(x-1)$, $\ln x \sim_{x \rightarrow 1} x-1$.
- (3) Si α, β, γ sont strictement positifs :
- (a) $x^\beta = o_{x \rightarrow +\infty}(e^{\alpha x})$, $e^{\alpha x} = o_{x \rightarrow -\infty}(|x|^{-\beta})$ en $-\infty$.
- (b) $\ln(x)^\gamma = o_{x \rightarrow +\infty}(x^\beta)$ en $+\infty$, $|\ln x|^\gamma = o(x^{-\beta})$.
- (4) Soit $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ une fraction rationnelle.
- Au voisinage de 0, $f(x)$ est équivalente au quotient des monômes de plus bas degré.
 - Au voisinage de $+\infty$, $f(x)$ est équivalente au quotient des monômes de plus haut degré.

vi

2. DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, et $a \in I$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Le but d'un développement limité d'une fonction en un point est d'approcher cette dernière par une fonction polynomiale, d'une façon qui rende compte du comportement de f au voisinage de a . Ainsi, pour une fonction f continue en a , la fonction constante de valeur $f(a)$ est l'approximation constante la plus pertinente au voisinage de a . Si f est dérivable en a , alors l'approximation affine la plus pertinente de f au voisinage de a est la fonction $x \mapsto f(a) + (x-a)f'(a)$. Le but des développements limités est de formaliser et généraliser ces remarques.

Illustration

2.1. DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES

Soit I un intervalle et soit $a \in I$. On considère une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Définition (Développement limité)

On dit que f admet un *développement limité* à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ en a (ou au voisinage de a) s'il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$f(x) = P_n(x) + o_{x \rightarrow a}((x-a)^n).$$

2.a

On écrit pour raccourcir que f admet un $DL_n(a)$ (ou plus rarement un $DL_n(a, I)$) pour dire que f admet un développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ en a .

Vous rencontrerez parfois la notion de *développement limité au sens fort* à l'ordre n , où le $o_{x \rightarrow a}((x-a)^n)$ est remplacé par $O_{x \rightarrow a}((x-a)^{n+1})$, ce qui est plus précis.

En considérant la fonction $g : x \mapsto f(a+x)$, on peut toujours ramener en 0 l'étude et la recherche d'un développement limité : f admet un développement limité en a à l'ordre n si et seulement si g admet un développement limité en 0 à l'ordre n .

On suppose que f admet un $DL_n(a)$.

Proposition (Unicité de la partie régulière d'un développement limité)

On a unicité du polynôme P_n ci-dessus.

2.a

Démonstration

□

Cette unicité autorise la définition suivante :

Définition (Partie régulière d'un développement limité)

Dans le contexte ci-dessus, P_n est appelé *partie régulière* du développement limité à l'ordre n de f en a (ou encore partie régulière d'ordre n de f en a).

2.b

La partie régulière sera *toujours* décomposée selon la base $(1, X - a, \dots, (X - a)^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$, car c'est ainsi que le comportement local de f au voisinage de a se lit le mieux.

Exemple (Développements limités d'ordre 0 et 1)

- (1) D'après la formule de Taylor-Young, toute fonction f de classe \mathcal{C}^n admet un développement limité à l'ordre n en $a \in I$. En particulier, une fonction de classe \mathcal{C}^∞ admet un développement limité en a à tout ordre. Cet exemple fondamental justifie les développements limités usuels à venir.
- (2) f admet un $DL_0(a)$ si et seulement si f est continue en a , et sa partie régulière est alors $f(a)$.
- (3) f admet un $DL_1(a)$ si et seulement si f est dérivable en a , et sa partie régulière est alors $f(a) + f'(a)(X - a)$.
- (4) $f : x \mapsto x^3 \sin \frac{1}{x}$ (prolongée par continuité en 0) admet un $DL_2(0)$, et n'est pourtant pas deux fois dérivable en 0.
- (5) On peut même donner un exemple de fonction admettant un $DL_n(0)$ (où n est un entier naturel non nul fixé), et qui n'est même pas continue au voisinage de 0.

i

Proposition (Troncature d'un développement limité)

Si f admet un $DL_n(a)$, et si $P_n = \sum_{k=0}^n a_k(X - a)^k$ est sa partie régulière, alors pour tout $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, f admet un $DL_p(a)$, de partie régulière $\sum_{k=0}^p a_k(X - a)^k$.

2.b

Démonstration

□

Bien entendu, plus l'ordre d'un développement limité est élevé, plus l'information est précise, même s'il est fort possible que la partie régulière soit inchangée. À cet égard, on peut donner l'exemple pathologique suivant :

Exercice (Fonction non nulle dont toutes les parties régulières en 0 sont nulles)

On considère la fonction $f : x \mapsto \exp(-1/x^2)$, prolongée par continuité en 0. Montrer que cette fonction admet un développement limité en 0 à tout ordre, et que toutes les parties régulières sont nulles.

3

Cet exemple montre que la donnée des toutes les parties régulières en 0 ne permet pas de retrouver la fonction : il y a perte d'information. Il montre aussi qu'en général, $f(x)$ n'est pas la limite de $(P_n(x))$.

Exercice (Développement limité d'une fonction paire, impaire)

On suppose que f admet un $DL_n(0)$, de partie régulière P_n . Montrer que si f est paire (resp. impaire), alors le polynôme P_n est pair (resp. impair).

4

Plus généralement, les relations fonctionnelles que vérifie f (comme une équation différentielle par exemple) donnent des renseignements sur ses divers développements limités. On pourra regarder le DM sur la recherche du $DL_7(0)$ de la fonction tangente.

2.2. DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS USUELS

Voir la feuille. Toutes ces formules n'ont pas été trouvées avec la formule de Taylor-Young, certaines d'entre elles proviennent de propriétés (à venir) des opérations sur les développements limités.

2.3. OPÉRATIONS SUR LES DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

C'est le paragraphe le plus important en pratique. Son but est de prouver l'existence de certains développements limités, et surtout de donner des techniques pour les calculer, tout en s'affranchissant de la formule de Taylor-Young.

2.3.1. *Translation de la variable.* On a vu comment se ramener au calcul d'un développement limité en 0, mais il faut savoir repartir dans l'autre sens.

Exercice (Développer ailleurs qu'en 0)

Donner des développements limités à l'ordre 3 en a (en lequel la fonction est définie) de \ln , de \exp , et de \cos .

5

Dans toutes les techniques que nous allons présenter, nous nous limiterons à un développement limité en 0. Nous supposons donc ici que I comprend 0.

2.3.2. *Opérations algébriques.*

Proposition (Développement limité d'une combinaison linéaire, d'un produit)

On considère deux fonctions f, g définies sur I sauf peut-être en 0 , et admettant un développement limité en 0 à l'ordre n . Soient P_n et Q_n les parties régulières respectives de ces deux développements limités. On considère aussi deux réels λ et μ quelconques.

- (1) La fonction $\lambda f + \mu g$ admet un développement limité à l'ordre n en 0 , de partie régulière $\lambda P_n + \mu Q_n$.
- (2) La fonction f/g admet un développement limité en 0 à l'ordre n , dont la partie régulière est le polynôme $P_n Q_n$ tronqué à l'ordre n (on ne garde que les termes de degré $\leq n$).

2.c

Démonstration

□

Sauf mention contraire, les fonctions sont définies sur un intervalle I contenant 0 , et n désigne un entier naturel.

On peut s'économiser des calculs, en remarquant que si P_n (resp. Q_n) est de valuation p (resp. q), alors on peut tronquer Q_n (resp. P_n) au degré $n - p$ (resp. $n - q$).

Exercice (Développement limité d'un produit)

Développement limité à l'ordre 5 en 0 de $x \mapsto \ln(1+x)(1 - \cos x)$.

(réponse : $\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{8}x^5 + o(x^5)$)

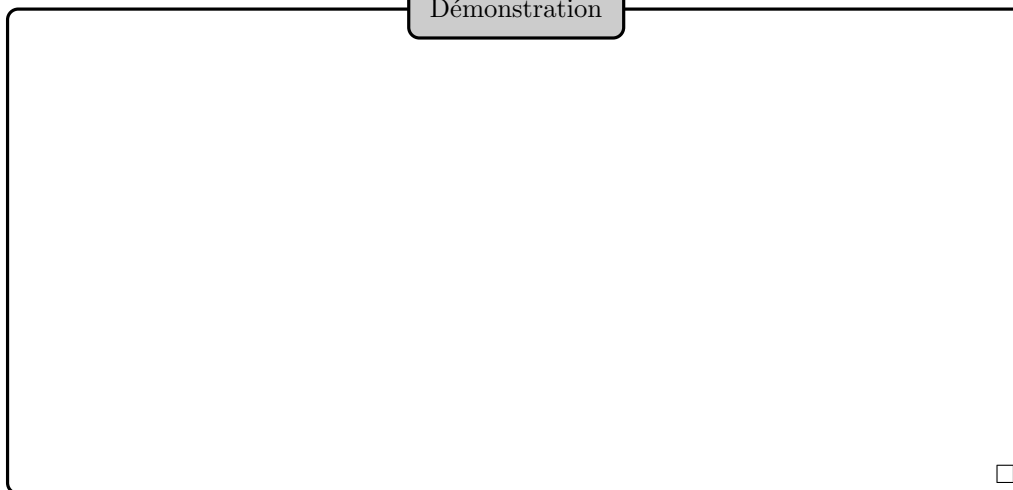
6

Lemme pour le développement limité d'un quotient

Soit $u : I \rightarrow \mathbb{R}$, où I comprend 0 . On suppose que u admet un développement limité en 0 à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ de partie régulière P_n , et que $u(0) = 0$. La fonction $h : x \mapsto \frac{1}{1-u(x)}$ est alors définie au voisinage de 0 dans I , et admet un développement limité à l'ordre n en 0 , de partie régulière le polynôme $1 + P_n + \dots + P_n^n$ tronqué au degré n .

2.d

Démonstration



Proposition (Développement limité d'un inverse)

Soit f définie sur I , admettant un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 , de valeur non nulle en 0 . La fonction $1/f$, définie au voisinage de 0 , et admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 .

2.e

Démonstration

f admet un développement limité à l'ordre n en 0 : en particulier, elle est continue en 0 , puis, comme $f(0) \neq 0$, f ne s'annule pas sur un voisinage de 0 .
En effet, il suffit d'écrire $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f(0)} \frac{1}{1 - \frac{f(0)-f(x)}{f(0)}}$ pour se ramener au lemme.

□

La démonstration ne fait pas qu'affirmer l'existence d'un développement limité, elle donne aussi un moyen de le calculer.

Exercice (Développement limité d'un inverse)

Développement limité en 0 à l'ordre 7 de $\frac{1}{\cos}$.
(réponse : $1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61x^6}{720} + o(x^7)$)

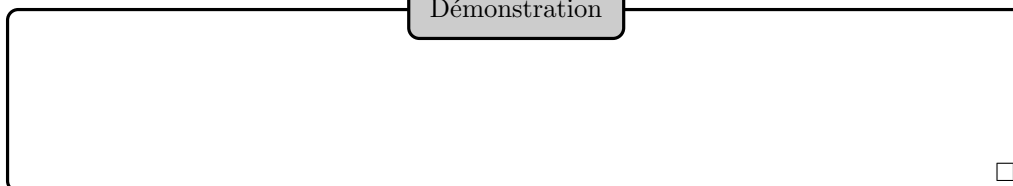
7

Corollaire (Développement limité d'un quotient)

Si f et g admettent un développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ en 0 , et si $g(0) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ admet un développement limité à l'ordre n en 0 .

2.f

Démonstration



2.3.3. *Composition.* La composition n'est pas au programme. Nous allons seulement montrer comment calculer un développement limité d'une composée sur un exemple :

Exercice (Développement limité d'une composée)

Développement limité en 0 à l'ordre 8 de $x \mapsto \ln(1 + x - \sin(x))$.
(réponse : $\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{72}x^6 + \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{720}x^8 + o(x^8)$)

8

En revanche, on peut utiliser sans scrupules la composition dans le cas de $f \circ g$, où g est un monôme (de degré ≥ 1). Si $f(x) = \sum_{0 \leq k \leq n} a_k x^k + o(x^n)$ et $g : x \mapsto \lambda x^m$ ($\lambda \in \mathbb{R}^*$, $m \geq 1$), alors $f \circ g$ admet un développement limité en 0 à l'ordre mn , de partie régulière :

$$\sum_{k=0}^n a_k \lambda^k x^{km} + o(x^{mn}).$$

Exemple (Développement limité d'une composée par un monôme)

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^n (-x^2)^k + o(x^{2n}).$$

ii

Exercice (Développement limité d'une composée par un monôme)

Développement limité de $x \mapsto \cos(6x^3)$ à l'ordre 12 en 0.
(réponse : $1 - 18x^6 + 54x^{12} + o(x^{12})$)

9

Enfin, on précise que même si on veut développer $f \circ g$ en 0, on utilisera le développement limité de f en $g(0)$: il sera donc parfois nécessaire de développer ailleurs qu'en 0 pour développer en 0.

Exercice (Développement limité d'une composée induisant un développement en 1)

Développer $x \mapsto e^{(e^x)}$ à l'ordre 4 en 0.

10

2.3.4. *Développement limité d'une primitive, d'une dérivée.* Nous commençons par étudier l'existence d'un développement limité pour une primitive, ce qui nous permettra d'étudier le cas d'une dérivée.

Lemme pour l'intégration d'un développement limité

Soit $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, telle que $g(x) = o(x^n)$. Soit h la primitive de g s'annulant en 0. On a alors $h(x) = o(x^{n+1})$.

2.g

Démonstration

Soit ε un réel strictement positif. Il existe un réel strictement positif η tel que pour tout point $t \in [-\eta, \eta]$, on ait $|g(t)| \leq \varepsilon |t|^n$. On en déduit alors que pour tout $x \in [-\eta, \eta]$, on a $|h(x)| \leq \varepsilon |x|^{n+1}$.

□

Proposition (Intégration d'un développement limité)

Soit f une fonction définie et continue sur I , admettant un développement limité d'ordre n en 0 de partie régulière $P_n = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, et soit F une primitive de f sur I . La fonction F admet alors un développement limité en 0 à l'ordre $n + 1$, de partie régulière

$$F(0) + \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} X^{k+1}$$

2.h

Démonstration

Appliquer le lemme précédent à la fonction $x \mapsto f(x) - P_n(x)$. □

La partie régulière de F est donc la primitive de la partie régulière de f prenant la valeur $F(0)$ en 0.

C'est une propriété très utile en pratique. Nous l'avons utilisée à maintes reprises pour les calculs de développements limités usuels.

Cette propriété permet remarquablement de passer de l'ordre n à l'ordre $n + 1$. Elle est donc souvent préférable à une méthode concurrente (exemple de $\ln \circ \cos$).

Exemple (Intégration d'un développement limité)

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}).$$

iii

Exercice (Intégration d'un développement limité)

Donner le développement limité en 0 à l'ordre 5 de $f : x \mapsto -\ln(1 - x)$.

11

Corollaire (Dérivation d'un développement limité)

Soit f une fonction continûment dérivable sur I , admettant un développement limité en 0 à l'ordre $n \geq 1$, de partie régulière P_n . On suppose en outre que f' admet un développement limité à l'ordre $n - 1$, de partie régulière Q_{n-1} . On a alors $Q_{n-1} = P'_n$.

2.i

Attention ! Le fait que f' admette un développement limité à l'ordre $n - 1$ fait partie des hypothèses, cela ne résulte pas du fait que f en admette un à l'ordre n . Par exemple $f : x \mapsto x^3 \sin \frac{1}{x}$, prolongée par continuité en 0, admet un $DL_2(0)$, mais f' n'admet pas de $DL_1(0)$ (pourquoi, au fait ?).

Notons toutefois que si f est de classe \mathcal{C}^n ($n \in \mathbb{N}^*$), alors f' est de classe \mathcal{C}^{n-1} , et admet donc un développement limité à l'ordre $n - 1$ en tout point où elle est définie.

3. APPLICATIONS DES DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

L'intérêt principal des développements limités est sans doute de permettre le calcul de certaines limites ou des équivalents (de suites comme de fonctions), notamment en levant des formes indéterminées. Voici trois autres applications des développements limités. Remarquons aussi qu'on peut définir les notions de développement limité à gauche et à droite.

3.1. POSITIONS RELATIVES D'UNE COURBE ET DE SA TANGENTE EN UN POINT

On suppose que f admet un développement limité à l'ordre $n \geq 2$ en x_0 :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^n).$$

Le graphe Γ de f admet alors une tangente au point d'abscisse x_0 , d'équation :

$$y = a_0 + a_1(x - x_0).$$

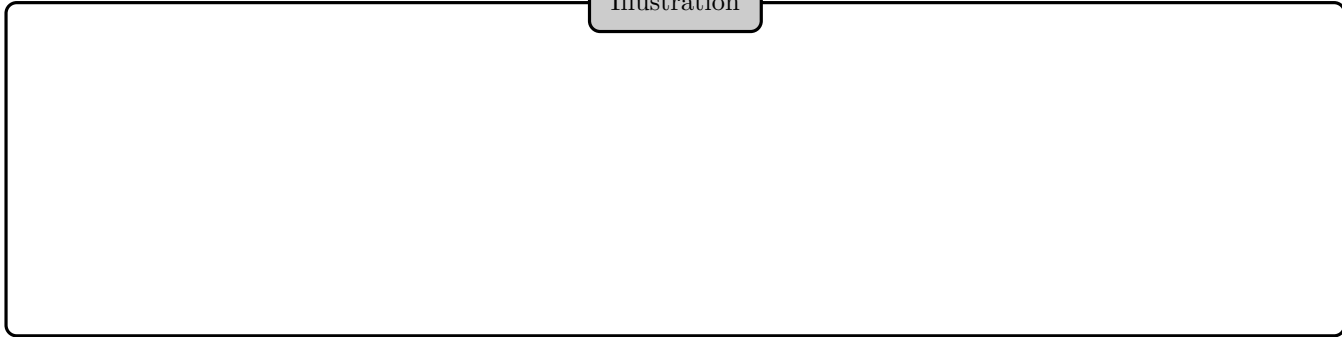
On suppose en outre qu'au moins un des coefficients a_2, \dots, a_n n'est pas nul. On définit $m = \min\{k \in \llbracket 2, n \rrbracket, a_k \neq 0\}$. On a alors

$$f(x) - a_0 - a_1(x - x_0) \sim_{x \rightarrow x_0} a_m(x - x_0)^m$$

Il s'ensuit la discussion suivante :

- Si m est pair alors
 - (1) Si $a_m > 0$, la courbe est localement au-dessus de la tangente.
 - (2) Si $a_m < 0$, la courbe est localement en dessous de la tangente.
- Si m est impair alors la courbe « traverse » sa tangente, et on dit que $(x_0, f(x_0))$ est un *point d'inflexion*.

Illustration



Exercice (Positions relatives d'un graphe et de sa tangente)

Étudier la position du graphe de l'application $x \mapsto \ln(1 + x^2)$ par rapport à sa tangente en 0 et 1.

12

3.2. DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES

La notion de développement limité s'étend au cas où $a = \pm\infty$. On suppose que I est un voisinage de $+\infty$.

Définition (Développement limité en l'infini)

On dit que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ admet un *développement limité* à l'ordre n en $+\infty$ s'il des réels a_0, \dots, a_n tels que :

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n} + o_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^n} \right).$$

3.a

On définit de même la notion de développement limité en $-\infty$.

f admet un développement limité en $+\infty$ à l'ordre n si et seulement si $x \mapsto f\left(\frac{1}{x}\right)$, définie sur un intervalle $]0, \alpha[$, admet un développement limité au voisinage de 0 à l'ordre n . Nous pouvons donc, encore une fois, nous ramener à une étude en 0.

D'après cette remarque, on a des résultats pour les développements limités en $+\infty$ analogues à ceux que nous avons trouvés pour les développements limités en 0.

La partie régulière n'est évidemment pas un polynôme (y rajouter un terme ferait bien plus qu'affiner le résultat, elle le bouleverserait).

Exercice (Développement limité en l'infini)

Donner un développement limité à l'ordre 2 de

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x+1+\sqrt{1+x^2}}$$

en $0, +\infty$.

13

Supposons que l'on puisse écrire

$$f(x) = a_0x + a_1 + \frac{a_2}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^{n-1}} + o_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^{n-1}} \right)$$

(on parle de *développement asymptotique* à la précision $\frac{1}{x^{n-1}}$).

Comme dans le cas d'une tangente, Γ admet une droite asymptote au voisinage de $+\infty$, dont une équation est $y = a_0x + a_1$. S'il existe m tel que

$$f(x) - a_0x - a_1 \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_m}{x^{m-1}},$$

on peut alors situer Γ par rapport à son asymptote au voisinage de $+\infty$.

Exercice (Développement asymptotique)

1 Donner le développement asymptotique à la précision $\frac{1}{x^3}$ de $\sqrt[3]{1+x+x^3}$ en $+\infty$.
(réponse : $x + \frac{1}{3x} + \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{9x^3} + o_{x \rightarrow +\infty}(\frac{1}{x^3})$.)

2 Donner un développement asymptotique à la précision $\frac{1}{x^2}$ en $-\infty$ de

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x+1+\sqrt{1+x^2}}.$$

14

Exercice (Formule de Stirling faible)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}}{n!}$. On cherche à montrer que la suite (u_n) converge vers un réel strictement positif K .

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right)$.

1 Vérifier que $v_n \sim \frac{1}{12n^2}$.

2 En déduire que la suite $(\sum_{k=1}^n v_k)$ converge.

3 Conclure.

15

Exercice (Intégrales de Wallis)

Faire le DM sur les intégrales de Wallis.

16

Théorème (Formule de Stirling)

On a

$$n! \sim \sqrt{2n\pi} \left(\frac{n}{e} \right)^n.$$

3.a

Démonstration

□

4. FEUILLE DE TD 16 : ANALYSE ASYMPTOTIQUE

4.1. COMPARAISON DE FONCTIONS

Exercice 1 (Équivalents de fonctions)

0

Donner des équivalents simples aux points considérés pour les fonctions définies par les formules suivantes :

- 1 $2e^x - \sqrt{1+4x} - \sqrt{1+6x^2}$ en 0.
- 2 $(\cos x)^{\sin x} - (\cos x)^{\tan x}$ en 0.
- 3 $\arctan x + \arctan \frac{3}{x} - \frac{2\pi}{3}$ en $\sqrt{3}$.
- 4 $\sqrt{x^2+1} - 2\sqrt[3]{x^3+x} + \sqrt[4]{x^4+x^2}$ en $+\infty$.
- 5 $\operatorname{argch}\left(\frac{1}{\cos x}\right)$ en 0.

4.2. FORMULES DE TAYLOR

Exercice 2 (Dérivées successives en 0)

2

Soit $f : x \mapsto \frac{x^3}{1+x^6}$. Calculer $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4.3. CALCUL DE DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Exercice 3 (Développements limités en 0)

0

Donner le développement limité en 0 à l'ordre indiqué des fonctions :

- 1 \tan à l'ordre 7.
- 2 $x \mapsto \sin(\tan(x))$ à l'ordre 7.
- 3 $x \mapsto (\ln(1+x))^2$ à l'ordre 4.
- 4 $x \mapsto \exp(\sin(x))$ à l'ordre 3.
- 5 $x \mapsto \sin^6(x)$ à l'ordre 9.
- 6 $\cos(x) \cdot \ln(1+x)$ à l'ordre 4.
- 7 $\frac{1}{\cos x}$ à l'ordre 4.
- 8 $\arcsin(\ln(1+x^2))$ à l'ordre 6.
- 9 $(1+x)^{\frac{1}{1+x}}$ à l'ordre 3.

Exercice 4 (Développement limité d'une réciproque)

3

- 1 Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{1-x \sin(x)}$ définit une bijection d'un voisinage de 0 sur \mathbb{R} .
- 2 Montrer que f^{-1} admet un $DL_3(0)$, et le calculer.
- 3 Même étude pour $g : x \mapsto 2x + \sin(x)$.

4.4. UTILISATION DES DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Exercice 5 (Calcul de limite par les développements limités)

0

- 1 Déterminer la limite en 0 de $\frac{\arctan x - \sin x}{\tan x - \arcsin x}$.
- 2 Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan x - \operatorname{sh} 2x}{(1 - \cos 3x) \arctan x}$.
- 3 (CCP MP) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - 4 \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{2x} + 3 \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{3x} \right)$.

Exercice 6 (Positions relatives locales d'une courbe et de sa tangente en un point)

0

Étudier la position du graphe de l'application $x \mapsto \ln(1 + x + x^2)$ par rapport à sa tangente en 0 et 1.

Exercice 7 (Branches infinies de fonctions numérique par les développements limités)

0

- 1 Étudier les branches infinies de la fonction $f : x \mapsto x^2 \arctan\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$.
- 2 Étudier les branches infinies de la fonction $g : x \mapsto x \sqrt{\frac{x-1}{3x+1}}$.

Exercice 8 (Équivalent par un développement limité)

2

Donner le $DL_7(0)$ de $f : x \mapsto \arcsin(\arctan x) - \arctan(\arcsin x)$. En déduire un équivalent de cette fonction.

Exercice 9 (Résultat combinatoire par les développements limités)

3

- 1 Développer de deux manières $(1 - e^x)^n$ en 0 à l'ordre $n + 2$.
- 2 En déduire $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} k^p$ pour $p \in \llbracket 0, n + 2 \rrbracket$.

Exercice 10 (Développements asymptotiques de suites)

2

- 1 Donner un développement asymptotique de la suite de terme général $(1 + \frac{1}{n})^n$ à la précision $\frac{1}{n^3}$.
- 2 Donner un développement asymptotique à deux termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ donnée par $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} = \ln(n + u_n)$.
- 3 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x^n + x - 1 = 0$ d'inconnue $x \in [0, 1]$ admet une unique solution v_n . Donner un développement asymptotique à deux termes de v_n .
- Indication :** une fois la limite de (v_n) déterminée, on pourra poser $w_n = 1 - v_n$, puis utiliser le logarithme.
- 4 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note x_n l'unique solution dans $]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}[$ de l'équation $\tan(x) = x$. Donner un développement asymptotique à la précision $\frac{1}{n^2}$ de x_n .
- 5 Soit (x_n) la suite récurrente de terme initial $x_0 \in]0, \pi/2]$ et d'itératrice sinus. Donner un développement asymptotique à deux termes de x_n (ne donner qu'un équivalent si les séries ne sont pas connues).

Exercice 11 (Développements asymptotiques de fonctions)

2

- 1 Donner un développement à la précision $\frac{1}{x^3}$ de la fonction arctangente en $+\infty$.
- 2 Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'équation $x + \ln(x) = a$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$ possède une unique solution, notée $f(a)$. Donner un développement asymptotique à deux termes de f en $+\infty$.
- 3 Montrer que pour tout $\alpha > e$, l'équation $e^x = \alpha x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$ admet exactement deux solutions, que nous noterons $f(\alpha)$ et $g(\alpha)$, avec $f(\alpha) < g(\alpha)$. Donner des développements asymptotiques à deux termes de f et g en 0 et $+\infty$ respectivement.

Exercice 12 (Suite récurrente par sinus de l'angle moitié (*Mines-Pont MP 06*))

4

Soit $u_0 \in]0, 2\pi[$, puis $u_{n+1} = \sin(u_n/2)$.

- 1 Montrer que (u_n) tend vers 0.
- 2 Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} (2^n u_n) = A$ pour un certain $A > 0$.
- 3 Trouver un équivalent simple de $(u_n - A2^{-n})$ (ne faire cette question que si les séries sont connues).

Fractions rationnelles

Sommaire

1. Corps des fractions rationnelles	395
1.1. Définition	395
1.2. Propriétés	397
2. Fonctions rationnelles	399
3. Étude locale d'une fraction rationnelle	401
3.1. Partie entière d'une fraction rationnelle	401
3.2. Partie polaire d'une fraction rationnelle relativement à un pôle	402
3.3. Décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples	403
3.4. Pratique de la décomposition	404
4. Compléments	405
4.1. Dérivée logarithmique	405
4.2. Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle réelle	405
5. Feuille de TD 17 : Fractions rationnelles	407
5.1. Décomposition en éléments simples	407
5.2. Calculs liés aux fractions rationnelles	408

Comme d'habitude, \mathbb{K} désigne le corps \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Les lettres F et G (éventuellement indicées) désigneront des fractions rationnelles, P, Q désigneront des polynômes.

1. CORPS DES FRACTIONS RATIONNELLES

1.1. DÉFINITION

On sait que $\mathbb{K}[X]$ est un anneau intègre. On peut alors définir une relation d'équivalence sur l'ensemble $\mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] - \{0\})$, en posant

$$(P_1, Q_1) \mathcal{R} (P_2, Q_2) \Leftrightarrow P_1 Q_2 = P_2 Q_1$$

On note $\mathbb{K}(X)$ l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] - \{0\})$ pour la relation \mathcal{R} . Tout élément de $\mathbb{K}(X)$ est appelée *fraction rationnelle*.

Si $F \in \mathbb{K}(X)$ est la classe d'équivalence de (P, Q) , on note $F = \frac{P}{Q}$. Ainsi, on a

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_2}{Q_2} \Leftrightarrow (P_1, Q_1) \mathcal{R} (P_2, Q_2) \Leftrightarrow P_1 Q_2 = P_2 Q_1$$

Le couple (P, Q) est appelé *représentant* de la fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$.

On définit des lois d'addition et de multiplication de la façon suivante :

$$\frac{P_1}{Q_1} + \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1 Q_2 + P_2 Q_1}{Q_1 Q_2}$$

et

$$\frac{P_1}{Q_1} \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1 P_2}{Q_1 Q_2}$$

Pour légitimer ces définitions, il faut en fait vérifier que ces opérations ne dépendent pas des représentants choisis pour les deux fractions rationnelles :

Démonstration

□

Proposition (Corps des fractions rationnelles)

 $\mathbb{K}(X)$ muni de ces lois est un corps.

1.a

Démonstration

□

Définition (Corps des fractions rationnelles)

Le corps $\mathbb{K}(X)$ s'appelle *corps des fractions rationnelles* à une indéterminée et à coefficients dans \mathbb{K} .

1.a

Plus généralement, pour tout anneau intègre A , on peut définir son *corps des fractions*. Nous avons également effectué cette construction pour passer de \mathbb{Z} à \mathbb{Q} .

De plus, on a un morphisme injectif canonique d'anneaux de $\mathbb{K}[X]$ vers $\mathbb{K}(X)$, qui à P associe $\frac{P}{1}$ et la notion de fraction rationnelle étend donc bien celle de polynôme. On confondra un polynôme et sa fraction rationnelle associée.

$\mathbb{K}(X)$ est aussi un \mathbb{K} -espace vectoriel, de dimension infinie (puisque $\mathbb{K}[X]$ l'est déjà).

1.2. PROPRIÉTÉS

Définition (Conjuguée d'une fraction rationnelle)

Soit $\frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle à coefficients complexes. On appelle *conjuguée* de la fraction rationnelle la fraction $\frac{\overline{P}}{\overline{Q}}$.

1.b

Démonstration

Justification de cette définition :

□

Définition (Représentant irréductible d'une fraction rationnelle)

On appelle *représentant irréductible* d'une fraction rationnelle F tout représentant (P, Q) de F , où $P \wedge Q = 1$.

1.c

Par abus de langage, on dit que la fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ est mise sous forme irréductible si $P \wedge Q = 1$.

Proposition (Forme irréductible d'une fraction rationnelle)

- (1) Toute fraction rationnelle admet une représentation irréductible.
- (2) Si $\frac{P}{Q}$ est une forme irréductible d'une fraction rationnelle F , et si $F = \frac{P_1}{Q_1}$, alors il existe $R \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$P_1 = RP \quad \text{et} \quad Q_1 = RQ$$

- (3) Si $\frac{P}{Q}$ et $\frac{P_1}{Q_1}$ sont des formes irréductibles de F , alors il existe un scalaire non nul λ tel que

$$P_1 = \lambda P \quad \text{et} \quad Q_1 = \lambda Q$$

En particulier, P_1 et P sont associés, de même que Q_1 et Q .

1.b

Démonstration

□

Définition (Mise sous forme canonique d'une fraction rationnelle)

On appelle *forme canonique* (ou *représentant irréductible unitaire*) de $F \in \mathbb{K}(X)$ l'unique représentant irréductible de F dont le dénominateur est unitaire.

1.d

Démonstration

Justification de cette définition :

□

Exemple (Forme canonique d'une fraction rationnelle)

- (1) La forme canonique de 0 est $\frac{0}{1}$.
- (2) La forme canonique de $\frac{X^6 - X^2}{3X^4 - 2X}$ est :
- (3) si $F \in \mathbb{C}(X)$ vérifie $F = \overline{F}$, alors sa forme canonique est constituée de polynômes réels :

i

Définition (Degré d'une fraction rationnelle)

Si $F = \frac{P}{Q}$ est une fraction rationnelle, la quantité $\deg P - \deg Q \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ ne dépend pas du représentant (P, Q) de F choisi. On l'appelle *degré* de F , et on la note $\deg F$.

1.e

Démonstration

□

La fonction degré sur $\mathbb{K}(X)$ étend bien celle de $\mathbb{K}[X]$. L'unique fraction rationnelle de degré non entier est la fraction rationnelle nulle.

Proposition (Degré d'une fraction rationnelle)

On se donne deux fractions rationnelles F_1 et F_2 de $\mathbb{K}(X)$. On a :

- (1) $\deg(F_1 + F_2) \leq \max(\deg F_1, \deg F_2)$, une condition suffisante d'égalité étant $\deg(F_1) \neq \deg(F_2)$.
- (2) $\deg(F_1 F_2) = (\deg F_1) + (\deg F_2)$.

1.c

Démonstration

□

2. FONCTIONS RATIONNELLES

On se donne une fraction rationnelle $F = \frac{P}{Q}$ mise sous forme irréductible.

Définition (Pôles et racines d'une fraction rationnelle)

- (1) On appelle *racine* de F toute racine de P .
- (2) On appelle *pôle* de F toute racine de Q .

2.a

Démonstration

Justification de cette définition :

□

Un scalaire ne peut être à la fois racine et pôle d'une fraction rationnelle F (mais il peut être ni l'un ni l'autre).

Si $F = \frac{P_1}{Q_1}$ pour certains polynômes P_1 et Q_1 , alors l'ensemble des racines (resp. des pôles) de F est un sous-ensemble de l'ensemble des racines de P_1 (resp. de Q_1).

Définition (Ordre de multiplicité d'une racine ou d'un pôle d'une fraction rationnelle)

Si a est une racine (resp. un pôle) de F , son *ordre de multiplicité* est celui de a dans P (resp. Q).

2.b

Si $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{C}(X)$ admet α comme pôle (resp. racine) d'ordre n , alors $\bar{\alpha}$ est pôle (resp. racine) d'ordre n de \bar{F} .

Exercice (Pôles et racines d'une fraction rationnelle)

Donner les racines et pôles complexes, avec leur ordre de multiplicité, de

$$F = \frac{(X^6 - 1)X^3}{(X^4 - 1)(X^3 - 1)}$$

1

Définition (Fonction rationnelle)

Soit $F = \frac{P}{Q}$ mise sous forme irréductible, et soit A l'ensemble des pôles de F (i.e. l'ensemble des racines de Q). On définit la *fonction rationnelle*, notée encore F , de $\mathbb{K} - A$ dans \mathbb{K} , par :

$$\forall \alpha \in \mathbb{K} - A, F(\alpha) = \frac{P(\alpha)}{Q(\alpha)}$$

2.c

Cela étend bien le lien entre polynômes et fonctions polynomiales. Une fonction rationnelle est définie en tout point de \mathbb{K} , sauf un nombre fini. Si $F = \frac{P_1}{Q_1}$, sous forme non nécessairement irréductible, et si $Q_1(\alpha) \neq 0$, alors $F(\alpha) = \frac{P_1(\alpha)}{Q_1(\alpha)}$.

Exercice (Fonction rationnelle)

Donner la fonction rationnelle complexe associée à

$$F = \frac{X^3 - X}{(X^2 - X)(X + 3)}$$

2

Définition (Composée d'une fraction rationnelle par un polynôme)

Si $F = \frac{P}{Q}$ est une fraction rationnelle, et R est un polynôme non constant, alors la fraction rationnelle $\frac{P \circ R}{Q \circ R}$ ne dépend pas du représentant (P, Q) choisi pour F . Cette fraction rationnelle est notée $F(R)$, et appelée *composée* de F (à droite) par R .

2.d

Démonstration

□

Le degré de $F(R)$ est $\deg F \deg R$. Cette définition poserait des problèmes si R était constant.

Définition (Parité et imparité d'une fraction rationnelle)

$F \in \mathbb{K}(X)$ est dite *paire* (resp. *impaire*) si $F(-X) = F(X)$ (resp. $F(-X) = -F(X)$).

2.e

Exercice (Parité et imparité d'une fraction rationnelle)

Soit F une fraction rationnelle.

- (1) Montrer que F est paire si et seulement si on peut en retrouver un couple constitué de polynômes pairs la représentant.
- (2) Montrer que F est impaire si et seulement si on peut en retrouver un couple constitué d'un polynôme pair et d'un polynôme impair, la représentant.

3

3. ÉTUDE LOCALE D'UNE FRACTION RATIONNELLE

3.1. PARTIE ENTIÈRE D'UNE FRACTION RATIONNELLE

Proposition (Partie entière d'une fraction rationnelle)

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. Il existe un unique couple $(P, \varphi) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}(X)$ tel que

$$F = P + \varphi \quad \text{et} \quad \deg \varphi < 0$$

3.a

Définition (Partie entière d'une fraction rationnelle)

Dans le contexte de la proposition précédente, P est appelé *partie entière* de la fraction rationnelle F .

3.a

Démonstration

□

Retenir la façon dont on a obtenu la partie entière (on remarque d'ailleurs que cette méthode fonctionne même si la fraction rationnelle n'est pas mise sous forme irréductible).

La partie entière d'une fraction rationnelle paire (resp. impaire) est paire (resp. impaire).

Exemple (Partie entière d'une fraction rationnelle)

- (1) Si $\deg F < 0$, alors la partie entière de F est nulle.
- (2) Si $\deg F \geq 0$, alors le degré de sa partie entière est $\deg F$.
- (3) La partie entière de la fraction rationnelle $\frac{X^4 - 3X^3 - X^2 + X - 1}{X^2 - 2X + 1}$ est :

i

3.2. PARTIE POLAIRE D'UNE FRACTION RATIONNELLE RELATIVEMENT À UN PÔLE

Proposition (Partie polaire d'une fraction rationnelle relativement à un pôle)

Soit F une fraction rationnelle admettant α pour pôle d'ordre $r \geq 1$. Alors il existe un unique r -uplet de scalaires $(\lambda_i)_{i \in [1, r]}$ et une unique fraction rationnelle G n'admettant pas α pour pôle, tels que :

$$F = \sum_{p=1}^r \frac{\lambda_p}{(X - \alpha)^p} + G$$

3.b

Définition (Partie polaire d'une fraction rationnelle relativement à un pôle)

Dans le contexte de la proposition précédente, on appelle *partie polaire* de la fraction rationnelle F relativement au pôle α l'expression

$$\sum_{p=1}^r \frac{\lambda_p}{(X - \alpha)^p}$$

3.b

Démonstration

□

Les pôles de G sont les pôles de F (sauf α), avec mêmes ordres de multiplicité respectifs. Retenir la manière dont on a obtenu la partie polaire.

Exemple (Partie polaire)

- (1) Lorsque le pôle est d'ordre 1 (on parle alors de *pôle simple*), on peut multiplier tout par $X - \alpha$ et évaluer en α (voir aussi l'exercice de cours 5 ci-dessous).
- (2) Lorsque le pôle est d'ordre 2 (on parle alors de *pôle double*), on peut calculer λ_2 comme précédemment, et considérer $F - \frac{\lambda_2}{(X-\alpha)^2}$, dont α n'est pas pôle ou pôle simple.
- (3) Si l'unique pôle est 0, il est très facile de trouver la partie polaire relative, même si l'ordre de 0 est élevé.
- (4) Si l'unique pôle est $\alpha \neq 0$, on peut toujours se ramener au cas précédent par translation de l'indéterminée.

ii

Exercice (Partie polaire)

Calculer la partie polaire de $F = \frac{X^5}{(X-1)^4}$.

Réponse : $(F = X + 4 + \frac{10}{X-1} + \frac{10}{(X-1)^2} + \frac{5}{(X-1)^3} + \frac{1}{(X-1)^4})$

4

Exercice (Cas d'un pôle simple)

Soit $F = \frac{P}{Q}$ mise sous forme irréductible, α un pôle simple de F . Montrer que la partie polaire de F relativement à α est $\frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)(X-\alpha)}$. Généraliser au cas où $F = \frac{G}{Q}$, où $G \in \mathbb{K}(X)$ n'admet pas α pour racine ni pour pôle, et où α est racine simple de Q .

5

3.3. DÉCOMPOSITION D'UNE FRACTION RATIONNELLE EN ÉLÉMENTS SIMPLES

Dans ce paragraphe, on suppose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Théorème (Décomposition en éléments simples, cas complexe)

Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ une fraction rationnelle, dont les différents pôles sont $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, d'ordres respectifs r_1, \dots, r_n .

Il existe un unique polynôme $E \in \mathbb{C}[X]$, et une unique famille de scalaires $(\lambda_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq r_i}$ tels que :

$$F = E + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^{r_i} \frac{\lambda_{i,j}}{(X - \alpha_i)^j} \right)$$

3.c

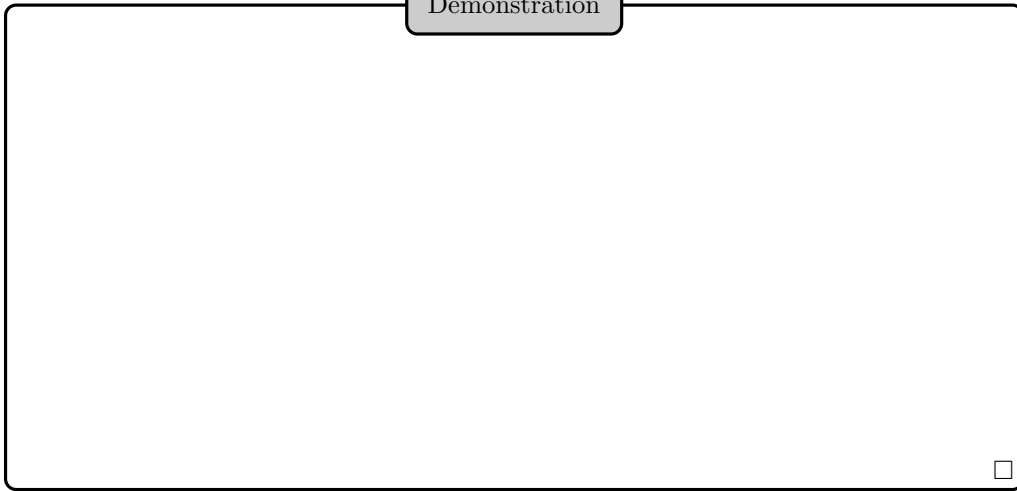
Définition (Décomposition en éléments simples, cas complexe)

Dans le contexte de ce théorème, on appelle *décomposition en élément simples* (dans $\mathbb{C}(X)$) de la fraction F l'expression :

$$E + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^{r_i} \frac{\lambda_{i,j}}{(X - \alpha_i)^j} \right)$$

3.c

Démonstration



Toute fraction rationnelle F est donc somme de sa partie entière et des parties polaires de F relativement à ses différents pôles.

3.4. PRATIQUE DE LA DÉCOMPOSITION

Le calcul de la partie entière est aisé, on se concentre sur celui des parties polaires.

Utilisation des développements limités : C'est la méthode de la démonstration du cours, à utiliser quand aucune astuce n'apparaît.

Décomposition des fractions à coefficients réels : Si la fraction rationnelle F à décomposer dans $\mathbb{C}(X)$ est réelle, alors sa partie entière est réelle, et si α est un pôle non réel de F de partie polaire

$$\sum_{p=1}^r \frac{\lambda_p}{(X - \alpha)^p}$$

alors $\bar{\alpha}$ est pôle de F de partie polaire

$$\sum_{p=1}^r \frac{\bar{\lambda}_p}{(X - \bar{\alpha})^p}$$

À utiliser pour réduire le nombre de coefficients à calculer.

Décomposition des fractions paires ou impaires : On peut aussi utiliser la parité ou l'imparité d'une fraction rationnelle pour trouver des relations simples entre les $\lambda_{i,j}$.

Plus généralement, si on trouve une transformation simple laissant F invariante, cela nous donne une information sur les parties polaires et éventuellement sur la partie entière.

Les coefficients de plus grand poids : Si α_i est un pôle d'ordre r_i , il ne doit y avoir aucune difficulté à calculer λ_{i,r_i} :

Exploitation des limites de fractions rationnelles : Voir les nombreux exemples.

Évaluation : On peut aussi évaluer en différents points. À utiliser s'il reste peu de coefficients à calculer, pas dès le départ.

Exercice (Décompositions en éléments simples)

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

1 $F = \frac{X^3+X^2-X+1}{(X^2+1)(X^2+4)}$.

2 $F = \frac{X^2-4}{(X^2-3)}$.

3 $F = \frac{1}{X^3(X^2-1)}$.

Réponse : $F = -\frac{1}{X^3} - \frac{1}{X} + \frac{1}{2(X-1)} + \frac{1}{2(X+1)}$.

4 $F = \frac{2X^4+X^3+3X^2-6X+1}{2X^3-X^2}$.

Réponse : $F = X + 1 - \frac{1}{X^2} + \frac{4}{X} - \frac{2}{X-\frac{1}{2}}$.

5 $F = \frac{2X^5-8X^3+8X^2-4X+1}{X^3(X-1)^2}$.

Réponse : $F = 2 + \frac{1}{X^3} - \frac{2}{X^2} + \frac{3}{X} - \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{1}{X-1}$.

6

4. COMPLÉMENTS

4.1. DÉRIVÉE LOGARITHMIQUE

Proposition (Décomposition en éléments simples d'une dérivée logarithmique)

Soit

$$P = \lambda \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i)^{r_i}$$

un polynôme complexe (avec $\lambda \neq 0$).

La décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\frac{P'}{P}$ (la dérivée logarithmique de P) est alors :

$$\sum_{i=1}^n \frac{r_i}{X - \alpha_i}$$

4.a

Démonstration

□

4.2. DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES D'UNE FRACTION RATIONNELLE RÉELLE

Si $F \in \mathbb{R}[X]$, et si $\alpha \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ est un pôle d'ordre r de F , alors la somme des décompositions polaires de F relatives à α et $\bar{\alpha}$ est :

$$\chi = \frac{P_1}{(X - \alpha)^r} + \frac{\bar{P}_1}{(X - \bar{\alpha})^r} = \frac{\pi}{(X^2 - sX + p)^r}$$

où $\pi \in \mathbb{R}_{2r-1}[X]$, $s = \alpha + \bar{\alpha}$, $p = \alpha\bar{\alpha}$.

Or $(1, X, (X^2 - sX + p), X(X^2 - sX + p), (X^2 - sX + p)^2, \dots, X(X^2 - sX + p)^{r-1})$ est une base de $\mathbb{R}_{2r-1}[X]$. Ainsi, on peut écrire :

$$\chi = \sum_{i=1}^r \frac{\lambda_i X + \mu_i}{(X^2 - sX + p)^i}$$

ce qui permet de trouver une décomposition (en fait dans $\mathbb{R}[X]$) de F , où tous les polynômes sont réels. C'est la *décomposition de F dans $\mathbb{R}[X]$* .

5. FEUILLE DE TD 17 : FRACTIONS RATIONNELLES

5.1. DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES

Exercice 1 (Décompositions élémentaires en éléments simples)

0

Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ de la fraction rationnelle F donnée par :

- 1 $\frac{X^5}{(X-1)^4}$.
- 2 $\frac{X^3+X^2-X+1}{(X^2+1)(X^2+4)}$.
- 3 $\frac{X^2-4}{X^2-3}$.
- 4 $\frac{1}{X^3(X^2-1)}$.
- 5 $\frac{2X^4+X^3+3X^2-6X+1}{2X^3-X^2}$.
- 6 $\frac{2X^5-8X^3+8X^2-4X+1}{X^3(X-1)^2}$.

Exercice 2 (Une décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$)

Donner la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de

$$F = \frac{2X^8 + 5X^6 - 12X^5 + 30X^4 + 36X^2 + 24}{X^4(X^2 + 2)^3}.$$

Exercice 3 (Décomposition en éléments simples par développement limité)

2

Soit x_1, \dots, x_n , n scalaires distincts deux à deux. On pose

$$P(X) = (X - x_1) \dots (X - x_n) \text{ et } F(X) = \frac{1}{P}$$

Décomposer F et F^2 en éléments simples (on exprimera les coefficients en fonction des $P'(x_i)$ et $P''(x_i)$).

Exercice 4 (Décompositions en éléments simples plus difficiles)

2

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$:

- 1 (Mines MP 05) $\frac{1}{X(X+1)\dots(X+n)}$.
- 2 (Mines MP 05) Soit P un polynôme unitaire de degré n et $Q = \prod_{i=0}^n (X - i)$.
 - i Décomposer P/Q en éléments simples.
 - ii Montrer que : $\max\{|P(k)|, 0 \leq k \leq n\} \geq n!/2^n$.
- 3 $\frac{1}{(X-1)(X^n-1)}$.
- 4 $\frac{1}{X^2(X-1)^n}$.

5.2. CALCULS LIÉS AUX FRACTIONS RATIONNELLES

Exercice 5 (Sommes et fractions rationnelles)

0

Calculer :

$$1 \quad \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{3 \times 4 \times 5} + \dots$$

$$2 \quad \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{5 \times 7} + \frac{1}{9 \times 11} + \frac{1}{13 \times 15} + \dots$$

Exercice 6 (Reprise d'un exercice sur les polynômes)

2

1 (*X PC 08*) Soit $P = X^3 + 2X^2 + X + 1$. Déterminer le nombre de racines réelles de P . On note x_1, x_2, x_3 les racines de P . Déterminer : $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$, $\frac{1}{x_1-2} + \frac{1}{x_2-2} + \frac{1}{x_3-2}$

2 On note w_1, \dots, w_{n-1} les racines de $X^n - 1$ différentes de 1. Calculer : $\prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{1-w_i}$, $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{1-w_i}$.

Exercice 7 (Fraction rationnelle à coefficients rationnels (*Centrale MP 06*))

3

Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ non pôle de F , $F(n) \in \mathbb{Q}$. Montrer que $F \in \mathbb{Q}(X)$.

Exercice 8 (Sommes classiques et fractions rationnelles)

2

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ à racines simples : x_1, \dots, x_n .

1 (*Centrale MP 05, X MP 07*) Calculer : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{P'(x_k)}$.

2 On suppose $P(0) \neq 0$. Montrer : $\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i P'(x_i)} = -\frac{1}{P(0)}$.

3 (*Centrale MP 05*) Calculer : $\sum_{k=1}^n \left(\frac{P''}{P'} \right) (x_k)$.

4 (*Centrale MP 05*) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 2$. On note x_1, \dots, x_n les racines de P comptées avec leurs multiplicités, et on suppose que x_1 est une racine simple. On note y_2, \dots, y_n les racines de P' comptées avec leurs multiplicités. Montrer que :

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{x_1 - x_k} = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \frac{1}{x_1 - y_k}.$$

Exercice 9 (Utilisation de la dérivée logarithmique)

1

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg(P) \geq 2$.

1 (*Centrale MP 06*)

i (*Théorème de Gauss-Lucas*) Montrer que les zéros de P' sont dans l'enveloppe convexe des zéros de P .

ii On suppose que toute racine de P est de partie réelle positive. Montrer qu'il en va de même des racines de P' .

iii On suppose de plus que P possède des racines non imaginaires pures. Montrer que toute racine imaginaire pure de P' est racine de P .

2 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que si les racines de P sont réelles et simples, alors le polynôme $Q = P'^2 - PP''$ n'a pas de racines réelles.

Deuxième partie

Second semestre

Matrices

Sommaire

1. Définitions. Matrices particulières	412
1.1. Définition, formes particulières de matrices	412
1.2. Matrices carrées particulières	412
2. Matrice d'une famille finie de vecteurs, d'une application linéaire	413
3. Opérations sur les matrices	415
3.1. L'espace vectoriel des matrices de taille (n, p)	415
3.2. Produit matriciel	416
3.3. Transposition	418
4. Matrice de changement de base	420
5. Matrices équivalentes, matrices semblables	422
6. Rang d'une matrice	424
7. Trace d'une matrice carrée	426
8. Opérations élémentaires	427
8.1. Première application : calcul de l'inverse d'une matrice inversible	428
8.2. Seconde application : calcul du rang d'une matrice	428
9. Matrices par blocs	430
10. Systèmes	431
10.1. Définitions	431
10.2. Différentes interprétations d'un système linéaire	431
10.3. Structure de l'ensemble des solutions	432
10.4. Opérations élémentaires sur les lignes d'un système	432
10.5. Résolution des systèmes de Cramer par la méthode du pivot de Gauss	433
11. Questionnaire 11 : Matrices	434
12. Feuille de TD 18 : Matrices	435
12.1. Calcul matriciel	435
12.2. Matrices et morphismes	437
12.3. Rang d'une matrice, opérations élémentaires	438
12.4. Similitude, équivalence	439

Dans tout le chapitre, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} (on peut cependant définir des matrices sur un corps quelconque). n, p, q désigneront des entiers naturels non nuls, et \mathcal{C}_p sera la base canonique de \mathbb{K}^p . Elle sera notée $(e_1(p), \dots, e_p(p))$ ou simplement (e_1, \dots, e_p) si le contexte le permet. E, F et G seront des espaces de dimension finie non nulle.

Les matrices offrent un cadre formel de travail en algèbre linéaire en dimension finie. Leur efficacité (et leur origine) tient avant tout au fait qu'en dimension finie, on peut représenter une application linéaire à l'aide d'une quantité finie de nombres. En effet, pour se donner une application linéaire de E dans F , il suffit de donner l'image d'une base de E . Pour se donner l'image d'un vecteur de cette base, on peut donner ses composantes dans une base de F : la donnée d'un élément de $\mathcal{L}(E, F)$ peut donc se réduire à la donnée d'un tableau de $\dim(E) \dim(F)$ nombres.

1. DÉFINITIONS. MATRICES PARTICULIÈRES

1.1. DÉFINITION, FORMES PARTICULIÈRES DE MATRICES

Définition (Matrice)

Une *matrice de type (ou taille)* (n, p) (ou à n lignes et p colonnes, ou de *taille* $n \times p$) est une famille A de scalaires indexée par $\llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$, i.e. un élément de $\mathbb{K}^{\llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket}$.

Pour tout $(l, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$, on note $a_{l,k}$ l'image de (l, k) par A , *coefficient* de A en position (l, k) . Ce coefficient sera aussi noté $[A]_{l,k}$.

On écrit alors $A = (a_{l,k})_{1 \leq l \leq n, 1 \leq k \leq p}$ (ou moins précisément $A = (a_{l,k})$).

On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes (à coefficients dans \mathbb{K}).

1.a

Soit A une matrice. On représente une matrice par un tableau, de n lignes et p colonnes, le coefficient $a_{l,k}$ se trouvant sur la l -ième ligne et k -ième colonne. En fait, une matrice est avant tout un tableau de nombres, qui, le plus souvent a un sens lié à l'algèbre linéaire (une matrice peut par exemple représenter une application linéaire, ou un changement de base).

Exemple (Matrices)

(1) La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ est de taille 2×3 .

(2) La matrice de taille (n, p) dont tous les coefficients sont nuls est appelée *matrice nulle* (de taille n, p), et notée $0_{n,p}$ (ou 0).

i

Définition (Matrices de tailles particulières)

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

On dit que M est une *matrice colonne* (resp. une *matrice ligne*) si $p = 1$ (resp. si $n = 1$).

On dit que M est une *matrice carrée* si $n = p$. On dit alors que M est une matrice carrée d'*ordre* (ou de *taille*) n .

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ des matrices carrées de taille n (à coefficients dans \mathbb{K}).

1.b

En pratique, on identifiera les matrices colonnes à n lignes à des vecteurs de \mathbb{K}^n . La matrice carrée nulle de taille n est également notée 0_n .

1.2. MATRICES CARRÉES PARTICULIÈRES

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice carrée de taille n . On appelle *coefficients diagonaux* de A les nombres $a_{i,i}$, $1 \leq i \leq n$.

Définition (Matrice carrée diagonale)

A est dite *diagonale* si $a_{i,j} = 0$, dès que $i \neq j$, i.e. tous les coefficients non diagonaux de A sont nuls.

1.c

Exemple (Matrices diagonales)

- (1) La matrice diagonale de taille n dont tous les coefficients diagonaux valent 1 est appelée *matrice identité* (de taille n), et notée I_n . Par exemple, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- (2) Une matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont égaux est dite *scalaire*.
- (3) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale non scalaire.

ii

La notation $\text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ désignera la matrice diagonale de taille n dont les coefficients diagonaux sont $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (λ_i étant en position (i, i)).

Définition (Matrices triangulaires)

A est dite *triangulaire supérieure* si

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad (i > j) \Rightarrow a_{i,j} = 0.$$

A est dite *triangulaire inférieure* si

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad (j > i) \Rightarrow a_{i,j} = 0.$$

A est dite *triangulaire supérieure stricte* si

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad (i \geq j) \Rightarrow a_{i,j} = 0.$$

A est dite *triangulaire inférieure stricte* si

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad (j \geq i) \Rightarrow a_{i,j} = 0.$$

1.d

Exemple (Matrices triangulaires)

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure.

iii

Une matrice triangulaire stricte n'est donc rien d'autre qu'une matrice triangulaire dont tous les coefficients diagonaux sont nuls.

Une matrice diagonale n'est donc rien d'autre qu'une matrice triangulaire supérieure et triangulaire inférieure.

2. MATRICE D'UNE FAMILLE FINIE DE VECTEURS, D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

E et F sont de dimensions finies respectives p et n , et munis de bases respectives $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$.

Définition (Matrice d'une famille finie de vecteurs dans une base)

Soit $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_q)$ une famille finie de vecteurs de E . On appelle *matrice associée à la famille de vecteurs \mathcal{V} dans la base \mathcal{B}* la matrice de taille $p \times q$ dont la j -ième colonne est constituée des coordonnées dans la base \mathcal{B} du vecteur v_j ($j \in \llbracket 1, q \rrbracket$). Cette matrice est notée $M_{\mathcal{B}}(\mathcal{V})$.

2.a

Exemple (Matrice d'une famille de vecteurs dans une base)

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & -4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice d'un couple de vecteurs de \mathbb{R}^4 .

i

Soit $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_q)$ une famille finie de vecteurs de E , et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On note $u(\mathcal{V})$ la famille $(u(v_1), \dots, u(v_q))$ de vecteurs de F .

Définition (Matrice d'une application linéaire dans un couple de bases)

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. La matrice associée à l'application linéaire u et aux bases \mathcal{B} et \mathcal{C} (ou la matrice de u dans le couple de bases $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$), élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, notée $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ ou $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$, est la matrice $M_{\mathcal{C}}(u(\mathcal{B}))$. Dans le cas où $E = F$ et lorsque $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, on écrit $M_{\mathcal{B}}(u)$ au lieu de $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(u)$. Cette matrice est appelée matrice de u dans la base \mathcal{B} .

2.b

Ainsi, nous dirons que tel morphisme est représenté par telle matrice (dans un couple de bases donné).

Exemple (Matrices d'une application linéaire)

- (1) $M_{\mathcal{B}}(\text{Id}_E) = I_p$.
- (2) La matrice de l'application partie réelle (de \mathbb{C} dans \mathbb{C}) du \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{C} dans la base $(1, i)$ est
- (3) La matrice de l'endomorphisme de dérivation dans $\mathbb{R}_3[X]$, dans la base canonique, est
- (4) Id_E peut ne pas être représentée par I_n dans un couple de bases donné (donner un exemple)
- (5) Certains endomorphismes de E distincts de Id_E peuvent être représentés par I_n dans un couple de bases donné (donner un exemple)
- (6) La matrice d'une application nulle est toujours nulle.

ii

Une application linéaire est entièrement déterminée par sa matrice dans deux bases données (ou une seule dans le cas d'un endomorphisme). Attention cependant, deux matrices différentes peuvent correspondre à un même morphisme, et deux morphismes distincts peuvent avoir les mêmes matrices dans deux couples de bases distincts. Nous reviendrons sur ceci plus tard.

Dans le cas d'un endomorphisme, on prend presque toujours la même base au départ et à l'arrivée (sauf pour les matrices de changement de base, voir le paragraphe suivant).

Il peut être utile, étant donné une matrice M , de la voir comme représentant un certain morphisme dans une ou plusieurs bases : si le contexte ne nous fait pas préférer une autre interprétation, on considèrera le *morphisme canoniquement associé* à M .

Définition (Morphisme canoniquement associé à une matrice)

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Le *morphisme canoniquement associé* à M est l'application linéaire de \mathbb{K}^p dans \mathbb{K}^n , représenté par M dans les bases canoniques de ces espaces.

2.c

Nous noterons μ_C l'application qui à une matrice associe son morphisme canoniquement associé. En réalité, il arrive que l'on confonde une matrice et le morphisme canoniquement associé, ce qui fait que nous parlerons dans ce cas là d'image et noyau de cette matrice. Dans ce cours de première année, je préfère éviter cet abus.

Exemple (Morphisme canoniquement associé à une matrice)

- (1) Le morphisme canoniquement associé à $0_{n,p}$ est nul.
- (2) Le morphisme canoniquement associé à I_n est $\text{Id}_{\mathbb{K}^n}$.
- (3) Le morphisme canoniquement associé à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ envoie e_1 sur e_2 , et réciproquement.
- (4) Le morphisme canoniquement associé à $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ envoie respectivement $e_1(3)$, $e_2(3)$ et $e_3(3)$ sur $e_1(2) + 2e_2(2)$, $2e_1(2)$ et $3e_1(2) + e_2(2)$.
- (5) Le morphisme canoniquement associé à une matrice ligne à p colonnes est une forme linéaire sur \mathbb{K}^p .

iii

3. OPÉRATIONS SUR LES MATRICES

Nous allons définir plusieurs opérations entre matrices, ce qui confèrera à certains ensembles de matrices des structures (d'espaces vectoriels, d'anneaux). Ces opérations (addition, multiplication par un scalaire, et produit) seront définies pour représenter fidèlement les opérations correspondantes pour les applications linéaires (addition, multiplication par un scalaire, et composition). On verra enfin une dernière opération matricielle, la transposition, dont l'interprétation en termes linéaires ne va pas de soi.

Ce « transfert de structure » conduira à l'existence d'isomorphismes entre ensembles de matrices et ensembles d'applications linéaires.

3.1. L'ESPACE VECTORIEL DES MATRICES DE TAILLE (n, p)

On rappelle que du point de vue ensembliste, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est égal à $\mathbb{K}^{\llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket}$. Ce dernier ensemble est muni d'une structure naturelle d'espace vectoriel, que nous décidons de conserver pour $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:

Définition (Somme de matrices)

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On définit la matrice *somme* $C = (c_{i,j})$, élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, notée $A+B$, par $c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \llbracket 1, p \rrbracket$.

3.a

Définition (Produit d'une matrice par un scalaire)

Soient A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit la matrice *produit* de A par le scalaire λ , $C = (c_{i,j})$, notée λA , par $c_{i,j} = \lambda a_{i,j}$ pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \llbracket 1, p \rrbracket$.

3.b

Proposition (Base canonique matricielle)

$(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie np , dont une base est $(E_{i,j}(n,p))$, où $E_{i,j}(n,p) = (\delta_{l,i}\delta_{k,j})_{(l,k) \in \llbracket 1,n \rrbracket \times \llbracket 1,p \rrbracket}$. Cette base est la *base canonique* de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

3.a

Cette base est notée $(E_{i,j}(n))$ si $n = p$, voire $(E_{i,j})$ si le contexte le permet, et ses termes sont appelés *matrices élémentaires*.

Donner en extension les vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K})$:

3.2. PRODUIT MATRICIEL

En réalité, $\mathbb{K}^{\llbracket 1,n \rrbracket \times \llbracket 1,p \rrbracket}$ est également muni d'une structure d'anneau produit, déduite de celle sur \mathbb{K} . Cependant, ce produit n'est pas l'expression de la composition des applications linéaires, c'est pourquoi nous allons en définir un autre.

Supposons E , F et G de dimensions respectives q , p et n , de bases respectives $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_q)$, $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_p)$ et $\mathcal{D} = (g_1, \dots, g_n)$, et soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Nous voulons définir un produit matriciel de telle sorte que

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(v \circ u) = M_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(v)M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) \quad (*)$$

Notons $A = M_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(v)$, $B = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$, et $C = M_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(v \circ u)$.

Soit $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$: on a $u(e_j) = \sum_{k=1}^p b_{k,j} f_k$.

Pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on a $v(f_k) = \sum_{i=1}^n a_{i,k} g_i$, de sorte que

$$\begin{aligned} v(u(e_j)) &= \sum_{k=1}^p b_{k,j} v(f_k) \\ &= \sum_{k=1}^p b_{k,j} \sum_{i=1}^n a_{i,k} g_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^p a_{i,k} b_{k,j} \right) g_i. \end{aligned}$$

La formule (*) sera vérifiée si et seulement si pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket$:

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^p a_{i,k} b_{k,j},$$

d'où la définition suivante :

Définition (Produit de deux matrices)

Soient $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On définit la *matrice produit* (de A par B) $C = (c_{i,j})$, notée AB , élément de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$, de la manière suivante : pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket$

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^p a_{i,k} b_{k,j}$$

3.c

Attention ! La multiplication AB n'est possible que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B .

Exercice (Produit matriciel)

Faire des exemples de calculs de produits, illustrant la non commutativité du produit matriciel (il se peut que AB soit défini sans que BA le soit, que AB et BA soient définies sans qu'elles aient même taille, que AB et BA soient définies de même taille, mais distinctes).

1

Exercice (Produit de matrices élémentaires)

Déterminer le produit de deux matrices élémentaires (de formats compatibles).

2

On a une sorte de relation de Chasles pour la taille du produit : « $(n, p) \times (p, q) \rightarrow (n, q)$. »
Il résulte aisément de la définition du produit matriciel :

Proposition (Produit matriciel)

Le produit matriciel est bilinéaire et associatif.
Linéarité par rapport à la première variable : si A, A' et B sont trois matrices, et si AB et $A'B$ sont bien définis, et λ et λ' sont deux scalaires quelconques, on a :

$$(\lambda A + \lambda' A')B = \lambda AB + \lambda' A'B$$

3.b

Proposition (Algèbre des matrices carrées de taille n)

$(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau, non commutatif dès que $n \geq 2$. Cet anneau est canoniquement isomorphe à $(\mathcal{L}(\mathbb{K}^n), +, \circ)$.

3.c

L'élément nul (resp. unité) de l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est 0_n (resp. I_n).

Comme cet anneau n'est pas commutatif (sauf si $n = 1$), on ne peut pas toujours appliquer la formule du binôme de Newton. Cependant, on peut l'appliquer si les deux matrices considérées commutent (ce sera le cas si l'une d'entre elles est scalaire).

Cet anneau possède des diviseurs de 0 si $n \geq 2$:

Cet anneau possède même des éléments nilpotents non nuls si $n \geq 2$:

Comme dans tout anneau, on a une structure de groupe multiplicatif pour les inversibles :

Définition (Groupe linéaire matriciel)

L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un groupe pour la loi de multiplication, appelé *groupe linéaire* d'indice n , et noté $GL_n(\mathbb{K})$.

3.d

Si $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$, ne pas oublier que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Exemple (Matrices inversibles)

Les matrices diagonales ne comportant pas de zéro sur leur diagonale sont inversibles.

i

Proposition (Isomorphismes entre ensembles d'applications linéaires et de matrices)

L'application $u \mapsto M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ est un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$ vers l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

En outre, si $E = F$ et $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, cette application est aussi un isomorphisme d'anneaux, et $\text{GL}(E)$ et $\text{GL}_q(\mathbb{K})$ sont des groupes isomorphes.

3.d

Ces isomorphismes confèrent aux ensembles de matrices des propriétés particulières : par exemple, si un endomorphisme u a pour matrice A dans une base \mathcal{B} , alors u est un automorphisme (*i.e.* est inversible) si et seulement si A est inversible. En particulier, une matrice carrée admettant un inverse B dans un sens (à gauche par exemple) admet B pour inverse.

Comme propriété générale d'un morphisme, on a aussi $M_B(u^n) = (M_B(u))^n$, et cela pour toute valeur sensée de n ($n \in \mathbb{N}$ si la matrice n'est pas inversible, et $n \in \mathbb{Z}$ sinon).

Il faut s'entraîner à mettre en correspondance les questions sur les applications linéaires et celles sur les matrices, chaque point de vue pouvant permettre de mieux comprendre l'autre.

Proposition (Écriture matricielle de l'effet d'une application linéaire sur un vecteur)

Soit $x \in E$, $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $y = u(x)$. On note X (resp. Y) le vecteur colonne des composantes de x dans \mathcal{B} (resp. de y dans \mathcal{C}), et $A = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$. On a alors

$$Y = AX$$

3.e

Exercice (Opérations algébriques sur les matrices)

Faire les deux premiers exercices de TD.

3

Exercice (Commutant d'une matrice)

Faire l'exercice 4 de TD.

4

3.3. TRANSPOSITION

Définition (Transposée)

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On définit la matrice *transposée* de A , notée tA ou A^T , élément de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ par ${}^tA = (c_{i,j})$, où

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket, c_{i,j} = a_{j,i}$$

3.e

Exemple (Transposées)

La transposée d'une matrice colonne est une matrice ligne, et réciproquement. Une matrice diagonale est invariante par transposition, mais la réciproque est fautive (donner un exemple).

ii

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), {}^{tt}A = A.$$

Proposition (La transposition est un isomorphisme)

La transposition est un isomorphisme de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad {}^t(\lambda A + \mu B) = \lambda {}^t A + \mu {}^t B$$

3.f

La transposition est un automorphisme involutif de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Bien que la transposition ne soit pas un automorphisme de l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dès que $n \geq 2$, on a une formule agréable pour la transposée d'un produit :

Proposition (Transposition et produit)

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \quad {}^t(AB) = {}^t B {}^t A.$$

3.g

Démonstration

□

En corollaire, si A est une matrice carrée inversible, alors ${}^t A$ est inversible et $({}^t A)^{-1} = {}^t (A^{-1})$ (plus généralement, pour tout entier relatif k , $({}^t A)^k = {}^t (A^k)$).

Définition (Matrice symétrique, antisymétrique)

Une matrice carrée A est dite *symétrique* (resp. *antisymétrique*) si ${}^t A = A$ (resp. ${}^t A = -A$).

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

3.f

Exemple (Matrices symétriques, antisymétriques)

Toute matrice diagonale est symétrique, mais la réciproque est fautive (donner des exemples).

Les coefficients diagonaux d'une matrice antisymétrique sont tous nuls, mais la réciproque est fautive (donner des exemples).

iii

Exercice (Puissances d'une matrice symétrique ou antisymétrique)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, supposée symétrique ou antisymétrique. Que dire des puissances de A ?

5

Proposition (Supplémentarité des matrices symétriques et antisymétriques)

$\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La dimension de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ est $\frac{1}{2}n(n+1)$, celle de $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ est $\frac{1}{2}n(n-1)$

3.h

Démonstration

Pour la supplémentarité, on peut utiliser l'endomorphisme involutif de transposition dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

□

En particulier, toute matrice carrée s'écrit de manière unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

4. MATRICE DE CHANGEMENT DE BASE

Définition (Matrice de passage)

On suppose E de dimension n , et on considère deux bases $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ de E . On appelle *matrice de passage* de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{B}' la matrice de la famille \mathcal{B}' dans la base \mathcal{B} . On peut la noter $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$.

4.a

La j -ième colonne de $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$ est constituée des composantes de e'_j dans la base \mathcal{B} . C'est donc aussi la matrice $M_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{Id}_E)$. En particulier, une matrice de passage est inversible.

La matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' permet d'exprimer facilement les vecteurs de \mathcal{B}' comme combinaison linéaire des vecteurs de \mathcal{B} .

Bien sûr, $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}} = I_n$.

Proposition (Propriétés des matrices de passage)

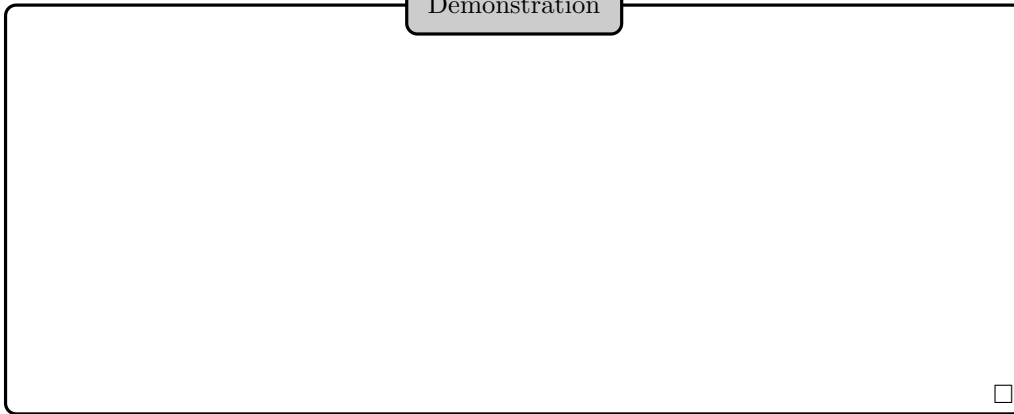
Si $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$ sont des bases de E , alors

$$P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}''}$$

Si \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont des bases de E , alors $P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}} = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}^{-1}$.

4.a

Démonstration



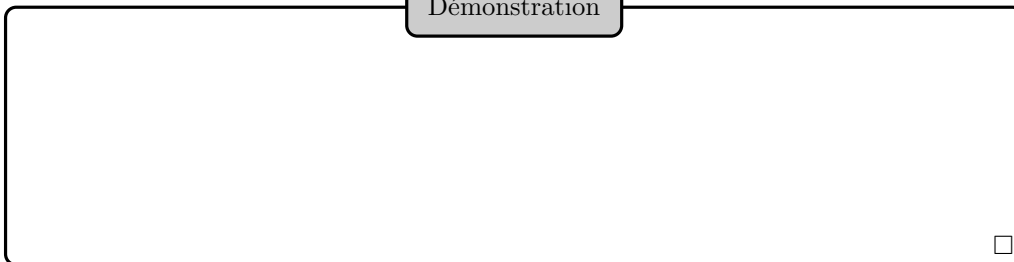
Proposition (Écriture matricielle d'un changement de base pour un vecteur)

Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E . Soit x un vecteur de E , et X (resp. X') le vecteur colonne de ses coordonnées dans \mathcal{B} (resp. \mathcal{B}'). On a alors :

$$X = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} X'$$

4.b

Démonstration



Ce sont les vecteurs de la *nouvelle* base que l'on a directement comme combinaisons linéaires des vecteurs de l'ancienne base, mais ce sont les *anciennes* coordonnées d'un vecteur que l'on exprime facilement en fonction des nouvelles.

Proposition (Formules de changement de base)

On se donne deux espaces vectoriels E et F , de dimensions respectives non nulles p et n . On se donne deux bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' de E , et deux bases \mathcal{C} et \mathcal{C}' de F . On se donne $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit A (resp. B) la matrice de u dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{C} (resp. \mathcal{B}' et \mathcal{C}'). On pose $Q = P_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'}$ et $P = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$. On a alors :

$$B = Q^{-1}AP$$

Dans le cas particulier d'un endomorphisme, si la base est la même au départ et à l'arrivée, on a donc :

$$B = P^{-1}AP$$

4.c

Démonstration

□

Exercice (Changement de base)

Faire l'exercice 9 de TD.

6

5. MATRICES ÉQUIVALENTES, MATRICES SEMBLABLES

Définition (Matrices équivalentes)

Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont dites *équivalentes* s'il existe une matrice inversible Q d'ordre n et une matrice inversible P d'ordre p telles que

$$B = Q^{-1}AP$$

5.a

Définition (Matrices semblables)

Deux matrices carrées A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites *semblables* s'il existe une matrice inversible P d'ordre n telle que

$$B = P^{-1}AP$$

5.b

Ces notions n'ont de sens que pour deux matrices de même taille.

Deux matrices A et B sont équivalentes si et seulement si il existe deux matrices inversibles U et V telles que $B = UAV$.

Ces deux relations sont des relations d'équivalence.

Deux matrices semblables sont équivalentes, mais la réciproque est fautive, même pour des matrices carrées de même taille :

Si $B = P^{-1}AP$, alors par récurrence¹, $B^n = P^{-1}A^nP$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et cette relation s'étend aux entiers négatifs si A (et donc B) est inversible. Bien souvent, pour calculer une puissance n -ième, on cherche si elle est semblable à une matrice diagonale, car ces dernières matrices ont des puissances facilement calculables. C'est le problème de la diagonalisation d'une matrice.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. La seule matrice semblable à λI_n est elle-même :

1. Ou parce que la conjugaison par P , i.e. l'application $M \mapsto P^{-1}MP$, est un (auto)morphisme de l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Certaines matrices carrées ne sont pas semblables à une matrice diagonale (on pourra considérer une matrice nilpotente non nulle) :

Proposition (Caractérisation des matrices équivalentes)

Deux matrices A et B sont équivalentes si et seulement si elles représentent un même morphisme dans deux couples de bases.

5.a

Démonstration

□

Proposition (Caractérisation des matrices semblables)

Deux matrices carrées A et B de taille n sont semblables si et seulement si il existe un endomorphisme u de E et deux bases \mathcal{B} et \mathcal{C} de E telles que

$$A = M_{\mathcal{B}}(u) \text{ et } B = M_{\mathcal{C}}(u)$$

5.b

Démonstration

□

6. RANG D'UNE MATRICE

Définition (Rang d'une matrice)

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle *rang* de A le rang de la famille des p vecteurs colonnes de A (identifiés à des vecteurs de \mathbb{K}^n). On le note $\text{rg}(A)$.

6.a

Le rang de A est donc inférieur ou égal à p et à n .

Exemple (Rangs de matrices)

- (1) Le rang de A est nul si et seulement si la matrice A est nulle.
- (2) Le rang de A vaut 1 si et seulement si au moins une des colonnes de A n'est pas nulle, et toutes les autres colonnes de A en sont des multiples.
- (3) Le rang de A est le rang de toute application linéaire susceptible d'être représentée par A .

i

Une matrice carrée est inversible si et seulement si son rang est égal à sa taille.

Soient n, p, r trois entiers tels que $0 \leq r \leq \min(p, n)$. On note $J_r(n, p)$ (ou J_r lorsque le contexte est suffisamment clair) la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont les coefficients $a_{i,j}$ vérifient $a_{i,i} = 1$ pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, et tous les autres sont nuls.

Ainsi, $J_0(2, 2)$, $J_2(4, 5)$, $J_3(5, 3)$ valent respectivement

$J_r(n, p)$ est de rang r .

Lemme premier pour l'équivalence matricielle

Deux matrices équivalentes (et donc de même taille) ont même rang.

6.a

Démonstration

□

Lemme second pour l'équivalence matricielle

Une matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de rang r si et seulement si elle est équivalente à $J_r(n, p)$.

6.b

Démonstration

□

Proposition (Caractérisation de l'équivalence matricielle par le rang)

Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.

6.c

Démonstration

□

Proposition (Invariance du rang par transposition)

Le rang d'une matrice est égal au rang de sa transposée tA .

6.d

Démonstration

□

Le rang d'une matrice est donc non seulement égal au nombre maximum de colonnes libres de A , mais aussi au nombre maximum de lignes libres de A .

Exercice (Inégalités entre rangs)

Faire l'exercice 14 de TD.

7

7. TRACE D'UNE MATRICE CARRÉE

Définition (Trace)

Soit $A = (a_{i,j})$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La *trace* de A , notée $\text{tr}(A)$ est la somme de ses termes diagonaux :
$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}.$$

7.a

Proposition (Trace)

La trace est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

7.a

Démonstration

□

Donner un exemple de trois matrices $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $\text{tr}(ABC) \neq \text{tr}(CBA)$:

Proposition (Trace d'un endomorphisme)

Soit f un endomorphisme de E , \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E ($\dim(E) = n$). Montrer que $\text{tr}(M_{\mathcal{B}}(f)) = \text{tr}(M_{\mathcal{B}'}(f))$.

7.b

Démonstration

□

Définition (Trace d'un endomorphisme)

Ceci permet de définir la *trace* d'un endomorphisme de E comme la trace de l'une quelconque des matrices le représentant dans une base donnée.

7.b

Exercice (Trace)

- 1 Soit p un projecteur de E . Montrer que $\text{rg}(p) = \text{tr}(p)$.
- 2 Montrer que l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de trace nulle est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et en donner une base.
- 3 Donner la trace de l'endomorphisme T de transposition dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

8

Exercice (Matrice carrée de rang 1)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1. Montrer que $A^2 = \text{tr}(A)A$.

9

8. OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES

n et p sont deux entiers naturels non nuls.

Définition (Opération élémentaire sur les lignes d'une matrice)

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, de lignes L_1, \dots, L_n . On appelle *opération (ou manipulation) élémentaire* sur les lignes de la matrice A l'une des opérations suivantes :

- (1) Addition d'un multiple d'une ligne à une autre : changer L_i en $L_i + \alpha L_j$, avec $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $i \neq j$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.
- (2) Multiplication d'une ligne par un scalaire non nul : changer L_i en αL_i avec $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\alpha \neq 0$.
- (3) Échange de deux lignes : changer L_i en L_j et réciproquement changer L_j en L_i , $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

8.a

Ces trois opérations sont codées respectivement $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$, $L_i \leftarrow \alpha L_i$, $L_i \leftrightarrow L_j$.

On définit de la même façon des *opérations (ou manipulations) élémentaires* sur les colonnes de la matrice A .

Toute opération élémentaire, donc toute suite d'opérations élémentaires, change A en une matrice de même rang.

On déduit de ces résultats que le rang d'une matrice n'est pas changé si :

- (1) On ajoute à une ligne une combinaison linéaire des autres lignes (applications successives de la première).
- (2) On change une ligne L_i en $\alpha L_i + \beta L_j$, avec $i \neq j$, et $\alpha \neq 0$ ($L_i \leftarrow \alpha L_i$ puis $L_i \leftarrow L_i + \beta L_j$).
- (3) On permute ses lignes (applications successives de la dernière).
- (4) On ajoute à chaque ligne L_j un multiple de L_i , avec $i \neq j$.

Attention : les changements simultanés sur des lignes, comme $(L_1, L_2) \leftarrow (L_1 - L_2, L_2 - L_1)$, sont interdits.

Les opérations élémentaires sur les lignes (resp. les colonnes) s'interprètent comme des multiplications à gauche (resp. à droite) par des matrices inversibles. Plus précisément :

- (1) $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ s'interprète comme la multiplication à gauche par $I_n + \alpha E_{i,j}(n)$ (et $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$ s'interprète comme la multiplication à droite par $I_p + \alpha E_{j,i}(p)$).
- (2) $L_i \leftarrow \alpha L_i$ s'interprète comme la multiplication à gauche par $I_n + (\alpha - 1)E_{i,i}(n)$ (et $C_i \leftarrow \alpha C_i$ s'interprète comme la multiplication à droite par $I_p + (1 - \alpha)E_{i,i}(p)$).
- (3) $L_i \leftrightarrow L_j$ s'interprète comme la multiplication à gauche (resp. à droite) par $I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$.

En conséquence, on a la proposition :

Proposition (Écriture matricielle des opérations élémentaires)

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, transformée en une matrice B par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes. il existe alors une matrice inversible U telle que $B = UA$. La matrice U est obtenue en faisant subir la même suite d'opérations élémentaires à I_n .

De même si C est obtenue de A par une suite d'opérations élémentaires sur les colonnes : il existe alors une matrice inversible V telle que $C = AV$. La matrice V est obtenue en faisant subir la même suite d'opérations élémentaires à I_p .

8.a

Exercice (Hyperplan et matrice inversibles)

Faire l'exercice 17, devenu classique.

10

8.1. PREMIÈRE APPLICATION : CALCUL DE L'INVERSE D'UNE MATRICE INVERSIBLE

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On déduit de la proposition précédente que si on arrive, à la suite d'opérations sur les lignes, à obtenir I_n à partir de A , alors la matrice A est inversible, et son inverse est obtenu en appliquant à I_n la même suite d'opérations.

On en déduit l'algorithme du pivot de Gauss pour calculer l'inverse d'une matrice inversible.

Donnée : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'algorithme retourne A^{-1} si A est inversible, et échoue sinon.

$(M, P) \leftarrow (A, I_n)$

Pour j allant de 1 à n , faire :

- (1) Si $m_{j,j} = 0$, alors soit $k > j$ tel que $a_{k,j} \neq 0$. Appliquer l'opération $L_j \leftrightarrow L_k$ à M et P .
(on s'assure que $m_{j,j} \neq 0$, il est appelé pivot).
- (2) Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $i \neq j$, appliquer les opérations $L_i \leftarrow m_{j,j}L_i - m_{i,j}L_j$ à M et P
(seul $m_{j,j}$ n'est pas nul sur la colonne C_j de M).

(La matrice M est désormais diagonale)

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, effectuer $L_i \leftarrow \frac{1}{m_{i,i}}L_i$ à M et P .

(M est désormais I_n , et $P = A^{-1}$)

Sortie : $P (= A^{-1})$.

Si l'algorithme échoue, c'est que la matrice n'est pas de rang n , donc pas inversible.

Il existe un algorithme analogue avec les colonnes. Attention cependant ! Il ne faut pas mélanger manipulations sur les lignes et les colonnes en vue d'un calcul d'inverse, car l'inverse n'est pas obtenu en appliquant les mêmes opérations à I_n .

Exercice (Algorithme de Gauss pour le calcul d'inverse)

Appliquer l'algorithme de Gauss pour le calcul d'inverse à deux matrices de taille 3, l'une étant inversible et l'autre pas.

11

8.2. SECONDE APPLICATION : CALCUL DU RANG D'UNE MATRICE

Nous avons vu comment calculer l'inverse d'une matrice. Cela prouve en particulier que la multiplication à gauche (resp. à droite) par toute matrice inversible P d'une matrice B correspond à une suite d'opérations sur les lignes (resp. les colonnes) de B . Ainsi, d'après les propriétés sur les matrices équivalentes, on peut ramener toute matrice à une matrice du type $J_r(n, p)$ pour certains entiers n, p, r . Ceci donne une méthode pratique de calcul du rang d'une matrice. En fait, il n'est pas nécessaire de se ramener à une matrice du type $J_r(n, p)$: n'importe quelle matrice équivalente à A dont on peut facilement calculer le rang convient.

L'idée est de se ramener à une matrice dite *échelonnée* :

Définition (Matrice échelonnée)

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On note L_1, \dots, L_n les lignes de A . Pour chaque i , soit $d(i)$ le plus petit entier j (s'il existe) tel que $a_{i,j} \neq 0$. On dit que la matrice A est *échelonnée* s'il existe un entier $r \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tel que :

- (1) Pour tout $i > r$, la ligne L_i est nulle.
- (2) Pour tout $i \leq r$, la ligne L_i est non nulle.
- (3) La suite $(d(1), \dots, d(r))$ est strictement croissante.

Les r coefficients $a_{i,d(i)}$, qui sont tous non nuls, sont appelés les *pivots* de A .

8.b

Une telle matrice est de rang r .

L'algorithme suivant, dit du pivot de Gauss (pour le calcul du rang) donne une méthode de calcul du rang.

Si tous les coefficients de la première colonne sont nuls, passer à la deuxième colonne. Sinon, choisir un coefficient non nul en première colonne (appelé pivot), et le placer en haut à gauche par échange de ligne. Annuler tous les autres coefficients grâce à ce pivot, puis passer à la colonne et au pivot suivants.

Algorithme du pivot de Gauss pour le calcul du rang.

Donnée : $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Description : *l'algorithme retourne le rang de A , en transformant une matrice en une matrice échelonnée par opérations élémentaires sur les lignes.*

$r \leftarrow 0$

$M \leftarrow A$

$l \leftarrow 1$

Pour j allant de 1 à n , faire :

Tant que $l \leq p$ et que le rang r n'a pas été incrémenté, faire :

- (1) Si $m_{j,l} = 0$, alors s'il existe $k > j$ tel que $m_{k,l} \neq 0$, appliquer l'opération $L_j \leftrightarrow L_k$ à M .
(on s'assure que $m_{j,l} \neq 0$ lorsque cela est possible. Ce nombre $m_{j,l}$ est appelé pivot).
- (2) Si $m_{j,l} \neq 0$, alors $r \leftarrow r + 1$, et pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $i > j$, appliquer les opérations $L_i \leftarrow m_{j,l}L_i - m_{i,l}L_j$ à M .
(tous les termes de la l -ième colonne C_l de M après $m_{j,l}$ sont nuls).
- (3) Si $m_{j,l} = 0$, $l \leftarrow l + 1$.
(on passe à la colonne C_{l+1} car C_l n'a rien donné).

Fin tant que (soit le rang a été incrémenté, soit la ligne L_j et les suivantes sont nulles, et la matrice est déjà échelonnée)

Fin boucle pour

(La matrice M est désormais échelonnée)

Sortie : r (= $\text{rg}(A)$).

Un calcul analogue peut se mener avec les colonnes plutôt qu'avec les lignes.

En fait, contrairement au cas du calcul de l'inverse d'une matrice, si on ne cherche que le rang, on peut très bien mélanger opérations élémentaires sur lignes et colonnes.

Exercice (Calcul de rang d'une matrice)

Faire la première question de l'exercice 12.

12

Exercice (Rang d'une matrice extraite)

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Montrer que pour toute matrice extraite B de A , $\text{rg}(B) \leq \text{rg}(A)$. Montrer que le rang de A est la plus grande taille d'une matrice extraite inversible (et donc carrée) de A .

13

9. MATRICES PAR BLOCS

On définit de manière informelle la notion de matrice par blocs comme une matrice dont les coefficients sont regroupés par blocs matriciels. Par exemple, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, la matrice

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

est donnée par ses blocs A , B , C , D , et carrée de taille $n + p$.

On définit les notions de matrices diagonales par blocs, triangulaires par blocs : par exemple, lorsque $C = 0_{p,n}$, on dira que M est triangulaire supérieure par blocs.

Une matrice par blocs M est souvent carrée, et ses blocs diagonaux souvent carrés : en termes d'un endomorphisme u d'un espace vectoriel E , cela revient à décomposer l'espace ambiant E en somme directe $E_1 \oplus \dots \oplus E_m$ (et des bases de ces sous-espaces), puis, en introduisant les projections p_i de E sur E_i parallèlement à la somme des autres E_j et les injections canoniques r_i de E_i dans E , à considérer les applications linéaires $p_i \circ u \circ r_j$ (qui correspondra au bloc $M_{i,j}$).

Les blocs non diagonaux de M seront tous nuls si et seulement si chaque E_i est stable par u .

Le résultat principal sur les matrices par blocs est le bon comportement de cette notion avec le produit :

Théorème du produit par blocs

Si les tailles des blocs sont compatibles, le produit de matrices par blocs s'obtient en appliquant la formule du produit matriciel aux blocs de ces matrices.

9.a

Démonstration

Admise

□

On a donc, avec des notations évidentes

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}$$

Exercice (Commutant d'une matrice diagonale par blocs)

Soit $M = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix}$. Déterminer le commutant de M .

14

10. SYSTÈMES

10.1. DÉFINITIONS

Définition (Système linéaire)

On appelle *système linéaire* de n équations, à p inconnues (et à coefficients dans \mathbb{K}) tout système d'équations d'inconnues x_1, \dots, x_p , de la forme :

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

où les $a_{i,j}$ et les b_i sont des éléments de \mathbb{K} .

Les $a_{i,j}$ sont appelés *coefficients du système*.

La matrice $A = (a_{i,j})$ est appelée *matrice du système*.

Le rang de A est le *rang du système*.

Les coefficients b_1, \dots, b_n sont les *seconds membres du système*.

On dit que (x_1, \dots, x_p) est le vecteur (ou p -uplet) des *inconnues* de \mathcal{S} .

Un vecteur (x_1, \dots, x_p) vérifiant les n égalités de \mathcal{S} est appelé *solution du système*.

Un système linéaire est dit *homogène* si les seconds membres sont tous nuls. À un système \mathcal{S} on associe un système homogène \mathcal{H} en changeant tous les seconds membres en 0.

Deux systèmes linéaires sont dits *équivalents* s'ils ont le même ensemble de solutions.

10.a

Cependant, si le système est homogène, il possède toujours la solution nulle $(0, 0, \dots, 0)$, appelée solution *triviale*.

Définition (Systèmes carrés)

Un système est dit *carré* si sa matrice associée est carrée (*i.e.* \mathcal{S} comporte autant d'équations que d'inconnues).

Un système \mathcal{S} est dit *triangulaire* si sa matrice associée est triangulaire (en particulier, un tel système est carré).

Un système carré est dit *de Cramer* si sa matrice associée est inversible (*i.e.* son rang r vérifie $r = n(= p)$).

10.b

10.2. DIFFÉRENTES INTERPRÉTATIONS D'UN SYSTÈME LINÉAIRE

On reprend le système \mathcal{S} de la définition ci-dessus.

Interprétation matricielle : si $A = (a_{i,j})$ est la matrice du système, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$, alors \mathcal{S} s'écrit

$$AX = B$$

Le système homogène associé s'écrit

$$AX = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

En particulier, si le système est de Cramer, le système possède une unique solution (peu importe le second membre).

L'avantage d'un système triangulaire de Cramer est qu'il est facile d'en donner l'unique solution. Si par exemple ce système est triangulaire supérieur (de matrice triangulaire supérieure), on en déduit x_n puis x_{n-1} , comme cela jusqu'à x_1 .

Interprétation en termes d'applications linéaires : en prenant le morphisme $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$, canoniquement associé à A , il apparaît que \mathcal{S} est équivalent à l'égalité

$$u(x) = b$$

où $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ et $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^n$. Résoudre \mathcal{S} , c'est donc trouver $u^{-1}(\{b\})$. Dans le cas particulier d'un système homogène \mathcal{H} , il s'agit donc de trouver $\text{Ker } u$.

Interprétation en termes de combinaisons linéaires de vecteurs de \mathbb{K}^n :

Notons $C_j = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$, et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$. Résoudre \mathcal{S} c'est trouver tous les scalaires x_1, \dots, x_p tels que

$$\sum_{j=1}^p x_j C_j = B$$

i.e. toutes les façons d'écrire le vecteur colonne B comme combinaison linéaire des vecteurs C_1, \dots, C_p .

\mathcal{S} admet une solution au moins si et seulement si $B \in \text{Vect}(C_1, \dots, C_p)$.

\mathcal{H} admet toujours la solution triviale signifie que la combinaison linéaire triviale est à résultat nul. Dire que \mathcal{H} possède d'autres solutions que la solution triviale signifie que la famille (C_1, \dots, C_p) est liée.

Interprétation en termes de formes linéaires sur \mathbb{K}^p : pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on définit la forme linéaire

$$\varphi_i : (x_1, \dots, x_p) \mapsto a_{i,1}x_1 + \dots + a_{i,p}x_p$$

(x_1, \dots, x_p) est solution de \mathcal{S} si et seulement si

$$(x_1, \dots, x_p) \in \bigcap_{1 \leq i \leq n} \varphi_i^{-1}(\{b_i\})$$

Définition (Matrice associée à une famille de formes linéaires)

Soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_q)$ une famille finie de formes linéaires sur E . On appelle *matrice associée à cette famille de formes linéaires* dans la base \mathcal{B} la matrice dont la j -ième ligne est constituée des images par φ_j dans \mathbb{K} des vecteurs de la base \mathcal{B} . Cette matrice est de taille $q \times n$.

10.c

Si une forme linéaire φ_i est nulle, une condition nécessaire pour que \mathcal{S} ait une solution est que $b_i = 0$, et on peut alors retirer du système la ligne L_i qui est sans intérêt.

Supposons que ces formes linéaires soient toutes non nulles. Un vecteur solution s'interprète dans ce cas comme un vecteur appartenant à l'intersection des « hyperplans affines » $\varphi_i^{-1}(\{b_i\})$.

10.3. STRUCTURE DE L'ENSEMBLE DES SOLUTIONS

L'ensemble des solutions de \mathcal{H} est un espace vectoriel de dimension $p - \text{rg}(A)$.

En conséquence, pour \mathcal{S} admettant au moins une solution x_0 , une solution générale x de \mathcal{S} s'écrit $x = x_0 + h$, où h est une solution générale de \mathcal{H} . Si \mathcal{S} admet au moins deux solutions distinctes, il en possède une infinité.

10.4. OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES SUR LES LIGNES D'UN SYSTÈME

On conserve le système \mathcal{S} , dont on note les équations E_1, \dots, E_n . On définit aisément des lois d'addition de deux équations, et de multiplication d'une équation par un scalaire.

Définition (Opération élémentaire sur les équations d'un système)

On appelle *opération élémentaire* sur les lignes de \mathcal{S} l'une des opérations suivantes :

- (1) Addition d'un multiple d'une équation à une autre (codage $E_i \leftarrow E_i + \alpha E_j$).
- (2) Multiplication d'une équation par un scalaire non nul (codage $E_i \leftarrow \alpha E_i$).
- (3) Échanger deux équations (codage $E_i \leftrightarrow E_j$).

10.d

Toute opération élémentaire sur les lignes de \mathcal{S} transforme ce système en un système équivalent.

Comme pour les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice, on peut donner d'autres opérations licites :

- (1) On ajoute à une équation une combinaison linéaire des autres équations (applications successives de la première).
- (2) On change une équation E_i en $\alpha E_i + \beta E_j$, avec $i \neq j$, et $\alpha \neq 0$ ($E_i \leftarrow \alpha E_i$ puis $E_i \leftarrow E_i + \beta E_j$).
- (3) On permute ses équations (applications successives de la dernière).
- (4) On ajoute à chaque équation E_j un multiple de E_i , avec $i \neq j$.
- (5) On peut supprimer de \mathcal{S} toute équation triviale. Plus généralement, on peut supprimer de \mathcal{S} une équation combinaison linéaire des autres équations.

10.5. RÉOLUTION DES SYSTÈMES DE CRAMER PAR LA MÉTHODE DU PIVOT DE GAUSS

Le principe de cette méthode est analogue aux autres méthodes du pivot de Gauss : on effectue des opérations élémentaires sur les équations d'un système afin d'obtenir un système équivalent, et dont la matrice est échelonnée.

En fait, l'algorithme du pivot de Gauss correspond exactement à l'algorithme du pivot de Gauss pour le calcul du rang d'une matrice par opérations sur les lignes, appliqué à la matrice A du système à laquelle on adjoint une dernière colonne qui est B (second membre). La matrice ainsi trouvée est échelonnée. Si le système est de Cramer, la matrice A est changée en une matrice triangulaire supérieure, ce qui permet de calculer l'unique solution du système.

En pratique, il n'est pas nécessaire d'appliquer cet algorithme de manière si rigide : si par exemple les coefficients sont entiers, on privilégiera les pivots petits (idéalement 1), quitte d'ailleurs à modifier l'ordre d'écriture des inconnues (exemple idiot où la matrice est échelonnée à permutation des colonnes près).

11. QUESTIONNAIRE 11 : MATRICES

- 1 Soit \mathcal{B}_0 une base de E , et Ω l'ensemble des bases de E .
L'application $\mathcal{B} \in \Omega \mapsto P_{\mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B}}$ est une bijection de Ω sur $\text{GL}_n(\mathbb{K})$.
- 2 Si tous les coefficients d'une matrice sont non nuls, cette matrice est-elle nécessairement inversible ?
- 3 Que vaut $\text{Vect}(\text{GL}_n(\mathbb{K}))$?
- 4 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Existe-t-il $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $B^2 = A$?
- 5 Existe-t-il une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constituée de matrices nilpotentes ?
- 6 Soit $r \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Existe-t-il une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constituée de matrices de rang r ?
- 7 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Le rang de A est-il le même selon que A soit considéré comme complexe ou réel ? Et si A est à coefficients complexes ?
- 8 Soit N une matrice nilpotente carrée de taille n , de rang r et d'indice de nilpotence p . Quelles relations a-t-on entre ces entiers ?

12. FEUILLE DE TD 18 : MATRICES

n désigne un entier naturel non nul.

12.1. CALCUL MATRICIEL

Exercice 1 (Matrices commutant)

0

- 1 Soit A et B deux matrices carrées $n \times n$ telles que $AB = A + I_n$. Montrer que A et B commutent.
- 2 Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$ tel que $AB = I_n + A + A^2$. Montrer que $AB = BA$.
- 3 Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = A + B$. Montrer que A et B commutent.

Exercice 2 (Calcul d'inverse d'une matrice)

0

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Vérifier que $A^2 = A + 2I_3$. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 3 (Puissances de matrices)

1

- 1 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et soit $B = A - I_3$. Calculer B^n , puis A^n , pour tout entier naturel n .
- 2 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pour tout entier n , calculer A^n .
- 3 Soit $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $(A(\theta))^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$.
- 4 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
- 5 Calculer les puissances de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Faire le lien avec la suite de Fibonacci.

Exercice 4 (Commutant d'une matrice)

1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On nomme *commutant* de A et on note $C(A)$ l'ensemble des $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$.

- 1 Montrer que $C(A)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, contenant l'ensemble $\mathbb{K}[A]$ des polynômes en A .
- 2 Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des scalaires distincts deux à deux. Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutant avec $D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Exercice 5 (Nullité de produits de matrices)

2

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que :

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AXB = 0.$$

Montrer que $A = 0$ ou $B = 0$.

Exercice 6 (Matrices commutant avec un ensemble de matrices)

2

1 Trouver les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutant avec toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2 Trouver les matrices $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ commutant avec toute matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 7 (Inverse d'une matrice (X MP 09))

2

Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose $I_n - AB$ inversible. Montrer que $I_n - BA$ est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 8 (Sous-espaces de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$)

3

Soit F et G les sous-ensembles de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définis par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & 0 & c \\ 0 & b+c & 0 \\ c+a & 0 & a+b \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

et

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a+b+d & a & c \\ 0 & b+d & 0 \\ a+c+d & 0 & a+c \end{pmatrix}, (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \right\}.$$

Montrer que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont on déterminera des bases.

12.2. MATRICES ET MORPHISMES

Exercice 9 (Changement de base)

0

- 1 Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 . Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à A .
 On pose $e'_1 = (1, 1, 1)$, $e'_2 = (1, -1, 0)$, $e'_3 = (1, 0, 1)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$.
 i Montrer que \mathcal{B}' est une base de \mathbb{R}^3 .
 ii Écrire la matrice de f dans cette base.
 iii Déterminer des bases de $\text{Ker}(f)$ et de $\text{Im}(f)$.

- 2 Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 .
 On pose $e'_1 = (1, 0, 1)$, $e'_2 = (-1, 1, 0)$, $e'_3 = (1, 1, 1)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$.
 i Montrer que \mathcal{B}' est une base de \mathbb{R}^3 .
 ii Déterminer la matrice de f dans \mathcal{B}' .
 iii Calculer $M_{\mathcal{B}}(f^n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- 3 Soit h l'homomorphisme de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^2 défini par rapport à deux bases (e_1, e_2, e_3) et (f_1, f_2) par la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

- i On prend dans \mathbb{R}^3 la nouvelle base :
 $(e'_1, e'_2, e'_3) = (e_2 + e_3, e_3 + e_1, e_1 + e_2)$.

Quelle est la nouvelle matrice A_1 de h ?

- ii On choisit pour base de \mathbb{R}^2 les vecteurs :
 $(f'_1, f'_2) = \left(\frac{1}{2}(f_1 + f_2), \frac{1}{2}(f_1 - f_2) \right)$

en conservant la base (e'_1, e'_2, e'_3) de \mathbb{R}^3 . Quelle est la nouvelle matrice A_2 de h ?

Exercice 10 (Matrice d'un projecteur (Mines MP 08))

0

Soient, dans \mathbb{R}^3 , P le plan d'équation $z = x - y$, D la droite d'équations : $x = -y = z$. Trouver la matrice canonique de la projection p de \mathbb{R}^3 sur P parallèlement à D .

Exercice 11 (Représentation matricielle des endomorphismes de carré nul en dimension 3)

3

Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension 3. Soit f un endomorphisme non nul de E . Montrer que f est de carré nul si et seulement si il existe une base \mathcal{B} de E telle que

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

12.3. RANG D'UNE MATRICE, OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES

Exercice 12 (Calculs de rangs)

0

1 Calculer le rang des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si on est courageux, on pourra calculer l'inverse lorsque la matrice est inversible.

2 Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \geq 2$. Déterminer le rang de la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, dont tous les coefficients sont égaux à a sauf les diagonaux qui valent 1.

3 Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de rang 1 si et seulement si il existe deux vecteurs colonne $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nuls tels que $A = X^t Y$.

4 Soit $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{K})$ telle que $A^2 \neq 0$ et $A^3 = 0$. Déterminer le rang de A .

Exercice 13 (Somme de matrices de rang 1)

2

Montrer que toute matrice de rang r est la somme de r matrices de rang 1.

Exercice 14 (Inégalités entre rangs)

3

1 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang 1. On écrit $M = P + iQ$, où $P, Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer : $\text{rg}(P) \leq 2$.

2 Montrer : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2, \text{rg}(A) + \text{rg}(B) \leq \text{rg}(AB) + n$.

Exercice 15 (Un calcul d'inverse)

3

En utilisant les opérations élémentaires, calculer l'inverse de

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

12.4. SIMILITUDE, ÉQUIVALENCE

Exercice 16 (Condition suffisante de non similitude)

1

Soit A et B deux matrices carrées de taille n .

1 Montrer que si A et B sont semblables, et si P est un polynôme, alors $P(A)$ et $P(B)$ sont semblables.

2 En déduire que s'il existe un polynôme P tel que $P(A) = 0$ mais $P(B) \neq 0$, alors A et B ne sont pas semblables.

3 Application : montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas semblables.

4 Soit $A = \begin{pmatrix} 29 & 38 & -18 \\ -11 & -14 & 7 \\ 20 & 27 & -12 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 7 & -8 & 4 \\ 3 & -3 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

Montrer que A et B ont même rang, même déterminant (notion que l'on verra plus tard, mais que l'on a rencontrée en début d'année), même trace mais ne sont pas semblables (calculer $(A - I_3)^2$ et $(B - I_3)^2$).

Exercice 17 (Tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ rencontre $GL_n(\mathbb{K})$)

2

Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($n \geq 2$).

1 Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $H = \{M, \text{tr}(AM) = 0\}$.

2 En déduire que H contient une matrice inversible.

Exercice 18 (Similitude de matrices)

2

1 Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 = I_2$, non scalaire. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2 Soit $(A, B) \in GL_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que AB et BA sont semblables. Ce résultat subsiste-t-il si A n'est plus supposée inversible ?

3 Soit $(i, j, k, l) \in \llbracket 1, n \rrbracket^4$. Les matrices $E_{i,j}$ et $E_{k,l}$ sont-elles semblables ?

Exercice 19 (Produit et inverse de matrices triangulaires supérieures)

3

Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices triangulaires supérieures.

1 Montrer que AB est triangulaire supérieure.

2 Montrer que si A est triangulaire supérieure stricte, alors $A^n = 0_n$ (en particulier, A est nilpotente).

3 Soit φ un automorphisme de \mathbb{K}^n et F un sous-espace vectoriel de \mathbb{K}^n tel que $\varphi(F) \subset F$. Montrer que $\varphi^{-1}(F) \subset F$.

4 Montrer que si A est inversible, alors A^{-1} est triangulaire supérieure.

Exercice 20 (Exponentielle d'une matrice nilpotente)

1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente, on définit : $\exp A = \sum_{i \geq 0} \frac{A^i}{i!}$.

Montrer que si A et B sont nilpotentes et commutent, alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$. En déduire que $\exp(A)$ est toujours inversible et calculer son inverse.

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$$

(on dit que A est à *diagonale dominante*).

Montrer que A est inversible.

Probabilités sur un univers fini

Sommaire

1. Expérience aléatoire et univers	441
2. Espaces probabilisés finis	442
3. Probabilités conditionnelles	444
4. Événements indépendants	446
5. Questionnaire 12 : Probabilités sur un univers fini	448
6. Feuille de TD 19 : Probabilités sur un univers fini	449
6.1. Probabilité sur un univers fini	449
6.2. Conditionnement et indépendance	450

Ce chapitre peut se voir comme une introduction, dans un cadre très limité (fini), à la branche des mathématiques qui traite de la potentialité et de l'aléatoire : les probabilités. Le formalisme s'appuiera sur le langage ensembliste, que je vous invite à revoir si vous n'êtes pas encore au point. Il faut aussi être au point sur le cours de dénombrement, dont ce chapitre est le prolongement direct.

1. EXPÉRIENCE ALÉATOIRE ET UNIVERS

Nous cherchons à modéliser les résultats possibles d'une *expérience aléatoire* : une expérience aléatoire est un processus reproductible (du moins en théorie), non prédictible, *i.e.* dont l'issue n'est pas certaine. Un exemple simple et classique est par exemple le résultat d'un jet de dé à six faces. L'ensemble des *issues* (ou *résultats possibles*, ou *réalisations*) d'une expérience aléatoire est appelé *univers*. Dans le cas de notre dé, il s'agit de l'ensemble $\Omega = \{1, 6\}$. En fait, le choix d'un univers ne va pas forcément de soi, et c'est une étape de la modélisation probabiliste que de choisir un univers adéquat¹.

Le fait qu'un processus soit déterministe ne signifie pas qu'il soit (raisonnablement) prévisible, comme le montre notre exemple du lancer de dé.

Un *événement* est une propriété portant sur le résultat d'une expérience aléatoire. C'est l'usage en probabilités de confondre un événement et l'ensemble des éléments de Ω vérifiant cette propriété. Un événement correspond donc à une partie de Ω , *i.e.* un élément de $\mathcal{P}(\Omega)$.

Dans notre exemple, le fait que le dé affiche un nombre pair est un événement, qui s'identifie ensemblistement à la partie $\{2, 4, 6\}$ de Ω .

Définition (Événement élémentaire)

On appelle *événement élémentaire* tout singleton (inclus dans Ω).

1.a

Définition (Événement contraire, conjonction et disjonction)

Si A est un événement, son événement *contraire* est son complémentaire (dans Ω).

On le notera \bar{A} , et on le nommera « non A ».

Si A et B sont deux événements, on définit les éléments « A et B » et « A ou B », correspondant respectivement à $A \cap B$ et $A \cup B$.

1.b

En général, l'univers dans lequel nous travaillons est fixé une fois pour toutes, il n'y a donc pas de problème particulier à utiliser la notion \bar{A} pour désigner l'événement contraire de A .

1. Cette remarque n'aura pas grande importance en maths en classe et aux concours, mais elle peut en avoir une en TIPE

L'événement *impossible* est l'ensemble vide.

Définition (Événements incompatibles)

Deux événements sont dits *incompatibles* s'ils sont disjoints.

1.c

2. ESPACES PROBABILISÉS FINIS

Bien entendu, la notion d'univers ne suffit pas à proposer un cadre d'étude des probabilités : on souhaite avant tout savoir quelles sont les « chances » qu'un événement donné se réalise. Dans le cas des probabilités finies, la définition est très simple et naturelle :

Définition (Probabilité)

Une *probabilité* sur un univers fini Ω est une application P de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0, 1]$ telle que $P(\Omega) = 1$ et, pour toutes parties disjointes A et B , $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. On dit alors que le couple (Ω, P) est un *univers probabilisé fini*.

2.a

Il faut bien comprendre que Ω admet plusieurs (et même une infinité² de) probabilités. Techniquement, le seul événement dit impossible est l'ensemble vide, mais il peut exister d'autres éléments de probabilité nulle. Ils sont dits *négligeables*. Les événements de probabilité 1 sont eux dits *presque sûrs*. On fixe pour la suite un univers probabilisé fini (Ω, P) .

Proposition (Propriétés des probabilités)

(1) Pour tout événement A , $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$. En particulier, $P(\emptyset) = 0$.

(2) Pour tous événements A_1, \dots, A_n incompatibles deux à deux,

$$P(A_1 \sqcup \dots \sqcup A_n) = \sum_{k=1}^n P(A_k).$$

(3) Pour tous événements A et B ,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

(4) P est une application croissante (pour l'ordre d'inclusion dans $\mathcal{P}(\Omega)$ et l'ordre usuel sur $[0, 1]$), *i.e.* pour tous événements A et B :

$$A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B).$$

2.a

Une probabilité P est donc entièrement déterminée par les images des singletons (d'après la deuxième propriété). Réciproquement, la donnée, pour chaque singleton, d'un élément p_i de $[0, 1]$, de sorte que $\sum_i p_i = 1$, définit une probabilité.

Exercice (Une formule utile)

Soit A et B deux événements. Montrer que :

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B).$$

1

2. Sauf dans le cas sans intérêt probabiliste où Ω est un singleton.

Exercice (Probabilité d'une union)

Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une famille d'événements. Montrer l'inégalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P \left(\bigcup_{1 \leq k \leq n} A_k \right) \leq \sum_{1 \leq k \leq n} P(A_k).$$

En déduire que si A, B et C sont trois événements équiprobables vérifiant $P(A \cap B \cap C) = 0$, alors $P(A) \leq \frac{2}{3}$.

2

Définition (Système complet d'événements)

On appelle *système complet d'événements* tout ensemble d'événements deux à deux incompatibles dont la réunion égale Ω .

2.b

Proposition (Formule des probabilités totales)

Soit A_1, \dots, A_n un système complet d'événements. Pour tout événement B , on a :

$$P(B) = \sum_{k=1}^n P(B \cap A_k).$$

2.b

Démonstration

□

Exemple (Probabilité uniforme)

On appelle *probabilité uniforme* sur Ω la probabilité telle que tout événement élémentaire ait une probabilité $\frac{1}{\text{Card}(\Omega)}$.

i

Cela revient à imposer que tous les événements élémentaires aient la même probabilité. Si P est la probabilité uniforme, on a donc $P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$, pour tout événement A . Dans le cas d'un lancer de dé, supposé équilibré, la probabilité sera uniforme.

Exercice (Lancer de dés et probabilité uniforme)

- 1 On jette deux dés équilibrés. Quelle est la probabilité que le total fasse 5 ?
- 2 On jette deux dés deux fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois au moins un 6 ?

3

3. PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

On cherche souvent à déterminer des probabilités en connaissant des informations supplémentaires, par exemple la probabilité que l'on soit classé aux Mines de Paris sachant que l'on a eu mention très bien au Bac. C'est l'objet des probabilités *conditionnelles*.

Définition (Probabilité conditionnelle)

Soit A et B deux événements. On suppose que $P(B) > 0$ (on dira alors que l'on peut *conditionner par B*). On appelle *probabilité (conditionnelle) de A sachant B* et on note $P_B(A)$ ou $P(A|B)$ le réel

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

3.a

Probabilité conditionnelle : approche heuristique fréquentiste

Comme l'indique la terminologie, $P(A|B)$ doit nous donner la probabilité que l'événement A se réalise sachant que B s'est réalisé. Prenons le cas d'une probabilité uniforme, comme pour deux lancers d'un dé, pour lequel $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket^2$ et où tout les événements élémentaires sont équiprobables. Supposons que nous cherchions la probabilité que l'on obtienne 8 ou plus en lançant deux fois un dé (événement A) sachant que l'on a obtenu au moins 4 au premier lancer (événement B). On regarde donc, dans le sous-univers $\Omega' = \{(l_1, l_2) \in \llbracket 1, 6 \rrbracket^2, l_1 \geq 4\}$ de Ω l'événement $A' = \llcorner$ on a obtenu 8 ou plus \lrcorner , *i.e.*

$$A' = \{(4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

La fréquence de l'événement A' dans l'univers Ω' est $\frac{\text{Card}(A')}{\text{Card}(\Omega')}$, soit ici $\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$. À y regarder de plus près, on a $A' = A \cap B$ et $\Omega' = B$, d'où la justification heuristique de cette définition dans le cas d'une probabilité uniforme.

3.1

L'application P_B est une probabilité

On vérifie facilement (en revenant à la définition) que l'application P_B est une probabilité sur Ω . En revanche, la notation $P(A|B)$ ne signifie nullement que « $A|B$ » soit un événement, *i.e.* un élément de $\mathcal{P}(\Omega)$ (reprendre la remarque précédente pour s'en convaincre). En particulier, on ne confondra pas la probabilité que A se réalise sachant que B l'est et la probabilité que les événements A et B se réalisent.

3.2

Exercice (Lorsque $P_B = P_{B'}$)

On considère deux événements B et B' de probabilités non nulles. Caractériser le fait que $P_B = P_{B'}$.

4

Soit A et B deux événements, où $P(B) > 0$. La formule (évidente)

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

peut se généraliser en :

Proposition (Formule des probabilités composées)

Soit A_1, \dots, A_n des événements tels que $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$. On a :

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \dots P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

3.a

Démonstration

□

Voici encore une formule algébriquement évidente, mais dont la signification ne l'est pas :

Proposition (Première formule de Bayes)

Si A et B sont deux événements tels que $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$, alors

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}.$$

3.b

Cette formule est intéressante dans la mesure où elle permet de « remonter le temps » : pour reprendre l'exemple du lancer de deux dés, elle nous permet de connaître la probabilité que l'on ait obtenu 4 ou plus au premier lancer sachant que l'on a obtenu 8 ou plus au total, ou, pour reprendre l'exemple du bachelier, la probabilité que l'on ait eu une mention très bien sachant qu'on a été classé aux Mines de Paris.

Cette « inversion » peut aussi se généraliser à plusieurs événements :

Proposition (Seconde formule de Bayes)

Si (A_i) est un système complet d'événements de probabilités non nulles et si B est un événement de probabilité non nulle, alors

$$P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^n P(B|A_i)P(A_i)}$$

3.c

Exercice (Gens à lunettes)

On compte dans une population 45% d'hommes et 55% de femmes. Un homme sur trois porte des lunettes, et une femme sur cinq porte des lunettes.

Quelle est la probabilité qu'une personne portant des lunettes soit une femme ?

5

4. ÉVÉNEMENTS INDÉPENDANTS

Définition (Couple d'événements indépendants)

Soit (A, B) un couple d'événements. On dit que (A, B) est un *couple d'événements indépendants* (ou que A et B sont *indépendants*) si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

4.a

Indépendance de deux événements

- A et B sont indépendants si et seulement si \bar{A} et B sont indépendants.
- Il n'y a donc pas de lien entre indépendance et incompatibilité (aucune de ces propriétés n'entraîne l'autre). Cependant, deux événements incompatibles sont indépendants si et seulement si l'un (au moins) est de probabilité nulle.
- Si par exemple $P(B) \neq 0$, alors l'indépendance de A et B équivaut à ce que $P(A|B) = P(A)$. Intuitivement, cela signifie que la réalisation (ou non) de B n'influe en rien sur celle de A .

4.1

On souhaite généraliser la notion d'indépendance à un n -uplet d'événements. On propose

Définition (Indépendance de n événements)

Soit (A_1, \dots, A_n) une famille de n événements. On dit que (A_1, \dots, A_n) est une *famille d'événements (mutuellement) indépendants* (ou que les événements A_1, \dots, A_n sont *(mutuellement) indépendants*) si, pour toute partie I de $\llbracket 1, n \rrbracket$,

$$P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i).$$

4.b

Indépendance de n événements

- L'indépendance de A_1, \dots, A_n **ne se caractérise pas par**

$$P\left(\bigcap_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} A_i\right) = \prod_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} P(A_i).$$

En effet, cette dernière relation serait toujours vérifiée si par exemple A_n était l'événement impossible, et elle ne dirait alors rien du lien entre les autres événements.

Cette dernière condition est seulement nécessaire, pas suffisante (si $n \geq 3$).

- L'indépendance de A_1, \dots, A_n **ne se caractérise pas par** l'indépendance deux à deux des événements A_1, \dots, A_n . En effet, en supposant seulement cette dernière propriété, rien ne permettrait de déduire la relation pourtant légitime en cas d'indépendance

$$P\left(\bigcap_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} A_i\right) = \prod_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} P(A_i).$$

L'indépendance deux à deux est une condition nécessaire non suffisante de l'indépendance de A_1, \dots, A_n .

4.2

Dans le cas où les A_i ont des probabilités toutes non nulles, on peut réexprimer l'indépendance en termes de probabilités conditionnelles, se traduisant informellement par : pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la réalisation de tout ou partie des autres événements A_j ($j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}$) n'influe en rien sur celle de A_i .

Exercice (Indépendance et boule tricolore)

On considère une urne contenant quatre boules : une rouge, une verte, une bleue et une tricolore (bleue, verte, rouge). On tire une boule, on note Ω l'univers $\{\text{bleue, verte, rouge, tricolore}\}$, et on considère les événements « la boule tirée contient du rouge », « la boule tirée contient du vert », et « la boule tirée contient du bleu » notés respectivement R , V et B . Vérifier que ces événements sont indépendants deux à deux mais pas dans leur ensemble.

6

Exercice (Une caractérisation de l'indépendance)

Soit (A_1, \dots, A_n) une famille d'événements. Montrer que les événements A_1, \dots, A_n sont indépendants si et seulement si pour toute famille (B_1, \dots, B_n) d'événements, où pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $B_i \in \{A_i, \bar{A}_i\}$, on a :

$$P\left(\bigcap_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} B_i\right) = \prod_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} P(B_i).$$

7

5. QUESTIONNAIRE 12 : PROBABILITÉS SUR UN UNIVERS FINI

1

6. FEUILLE DE TD 19 : PROBABILITÉS SUR UN UNIVERS FINI

6.1. PROBABILITÉ SUR UN UNIVERS FINI

Exercice 1 (Probabilités sur les cartes)

0

1 Au Tarot, à cinq joueurs, quelle est la probabilité d'obtenir au moins un bout dans une main? On rappelle qu'un jeu de Tarot est constitué de 78 cartes dont 3 cartes appelées « bout », et qu'à 5 joueurs, les mains sont de 15 cartes.

2 On considère un jeu de 52 cartes dont on pioche 5 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir un full (3 cartes d'une même hauteur et 2 autres d'une autre et même hauteur)?

Exercice 2 (Probabilités sur les dés)

0

1 On lance deux dés équilibrés. Montrer que la probabilité qu'au moins l'un de ces deux dés donne un nombre pair est égale à $\frac{3}{4}$.

2 On lance un dé équilibré 2 fois de suite.

i Quelle est la probabilité que la somme des numéros obtenus soit égale à 8?

ii Il y a 11 sommes possibles. Pourquoi la réponse à la question précédente n'est-elle pas $\frac{1}{11}$?

3 On lance 3 dés distincts. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 faces identiques? Et 3 faces distinctes?

4 On lance un dé équilibré jusqu'à obtenir un 6 pour la troisième fois. Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

i A_n : « le troisième 6 apparaît au n -ième lancer » (où $n \geq 3$)

ii B_n : « au n -ième lancer le troisième 6 n'est toujours pas apparu » (où $n \geq 3$)

iii C : « le troisième 6 n'apparaît jamais. »

5 On lance un dé équilibré jusqu'à obtenir un 6 pour la quatrième fois.

Déterminer la probabilité de l'évènement A_n : « le quatrième 6 apparaît au n -ième lancer » (où $n \geq 4$).

Exercice 3 (Probabilités sur les chaussettes)

0

1 Un tiroir contient 15 paires de chaussettes toutes différentes. On prend 6 chaussettes. Quelle est la probabilité d'obtenir :

i 3 paires complètes?

ii au moins une paire?

iii exactement une paire?

2 Un tiroir contient n chaussettes dont 3 rouges. Quelle doit être la valeur de n pour qu'en prenant au hasard 2 chaussettes, la probabilité qu'on obtienne 2 chaussettes rouges soit égale à $\frac{1}{2}$?

Exercice 4 (Probabilités diverses)

0

1 On range les 20 tomes d'une encyclopédie sur une étagère, complètement au hasard. Quelle est la probabilité que les tomes 1 et 2 se trouvent côte à côte ?

2 Une loterie compte 1000 billets dont 2 gagnants. Combien faut-il acheter de billets, pour avoir au moins une chance sur deux de gagner quelque chose ?

3

i On choisit au hasard une partie à 3 éléments de l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$ avec $n \geq 3$. Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

- A : « la partie contient 1 et 2 »
- B : « la partie ne contient ni 1 ni 2 »
- C : « la partie contient 1 ou 2 »

ii Reprendre les trois questions précédentes, lorsque l'on choisit au hasard une partie quelconque de l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$ avec $n \geq 3$.

Exercice 5 (Le paradoxe du chevalier de Méré)

2

1 Si l'on jette 4 fois un dé à six faces, est-il plus probable qu'on obtienne au moins un 6 ou qu'on n'en obtienne pas ?

2 Maintenant on jette 24 fois deux dés à six faces, est-il plus probable qu'on obtienne au moins un double 6 ou qu'on n'en obtienne pas ?

Exercice 6 (Dérangements à Noël)

4

Les n invités d'un repas de Noël déposent un cadeau au pied du sapin. L'hôte prend l'initiative de distribuer au hasard un cadeau à chacun de ses invités. Quelle est la probabilité que personne ne reçoive le cadeau qu'il a amené ?

6.2. CONDITIONNEMENT ET INDÉPENDANCE

Exercice 7 (Test sanguin)

0

Une maladie affecte une personne sur mille. On dispose d'un test sanguin qui détecte la présence de cette maladie chez 99% des malades. Mais le test donne un résultat faussement positif chez 0,2% des personnes saines testées.

Quelle est la probabilité qu'une personne soit réellement malade lorsque son test est positif ?

Exercice 8 (Indépendances et dés)

0

On lance deux dés équilibrés et on considère les événements A « le premier dé donne un nombre pair », B « le second dé donne un nombre pair » et C « les deux dés donnent des nombres de même parité ». Les événements A et B sont-ils indépendants ? Même question avec A et C , avec A et $B \cap C$ et avec $B \cup C$.

Exercice 9 (Indépendance et boules)

0

1 Une urne contient 20 boules blanches et 30 boules noires. On tire successivement et sans remise 3 boules. Quelle est la probabilité que la première soit noire, la deuxième blanche, et la troisième noire ?

2 Deux urnes U_1 et U_2 contiennent au départ chacune 12 boules blanches et 13 boules noires. On tire une boule de U_1 , on note sa couleur, et on la met dans U_2 . On tire alors dans U_2 . Quelle est la probabilité de tirer deux fois une boule noire ?

3 L'urne 1 contient 10 boules blanches et 2 boules noires. L'urne 2 contient 2 boules blanches et 2 boules noires. On choisit, au hasard, l'une de ces 2 urnes indiscernables et on pioche 2 boules dans cette urne.

i Quelle est la probabilité que les 2 boules tirées soient blanches ?

ii L'expérience est réalisée, et les 2 boules tirées sont blanches. Quelle est la probabilité que l'urne choisie soit la 1 ?

Exercice 10 (Indépendance de lancers de dés)

0

On lance indéfiniment une pièce équilibrée. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note P_k l'événement « obtenir Pile au k -ème lancer » et $A_k = P_k \cap \overline{P_{k+1}}$. La famille $(A_k)_k$ est-elle une famille d'événements mutuellement indépendants ? d'événements indépendants deux à deux ?

Exercice 11 (Sauterelles à foison)

3

On considère une sauterelle se déplaçant par sauts successifs sur les trois sommets A, B et C d'un triangle. Au début de l'expérience, on la place sur le sommet A et ensuite elle se déplace de la manière suivante :

- si elle se trouve en A , elle saute sur l'un des trois sommets de façon équiprobable,
- si elle se trouve en B , alors elle fait un saut sur place,
- si elle se trouve en C , alors elle fait un saut sur place une fois sur trois, et elle saute en B sept fois plus souvent qu'en A .

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n (respectivement B_n et C_n) l'évènement : « au n -ème saut la sauterelle choisit le sommet A (resp. B et C) » et on note a_n, b_n et c_n leur probabilité respective.

1 Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n . Exprimer de même b_{n+1} et c_{n+1} .

2 Exprimer c_{n+2} en fonction de c_n et c_{n+1} .

3 En déduire une expression de c_n en fonction de n .

4 Étudier la convergence des suites $(a_n)_n, (b_n)_n$ et $(c_n)_n$.

Exercice 12 (Prisonniers)

3

Trois prisonniers sont dans une cellule. Ils savent que deux vont être condamnés à mort et un gracié, mais ils ne savent pas qui. L'un d'entre eux va voir le gardien et lui demande : « Je sais bien que tu ne peux rien me dire, mais tu peux au moins me montrer un de mes compagnons qui sera exécuté ». Le gardien réfléchit, se dit que de toutes manières au moins l'un des deux autres prisonniers sera condamné, et s'exécute. Le prisonnier lui répond alors : « Merci, avant, j'avais une chance sur trois d'être gracié, et maintenant, j'ai une chance sur deux. » A-t-il raison de croire que sa probabilité d'être exécuté a varié ?

On dispose de deux pièces d'apparence identique, la pièce A donnant Pile avec la probabilité $a \in]0, 1[$, et la pièce B donnant Pile avec la probabilité $b \in]0, 1[$.

Pour le premier lancer, on choisit une pièce au hasard, et pour les lancers suivants, on adopte la stratégie suivante : si on obtient Pile, on garde la pièce pour le lancer suivant, et si on obtient Face, on change de pièces pour le lancer suivant.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k l'évènement « le k -ème lancer se fait avec la pièce A » et E_k l'évènement « le k -ème lancer donne Pile ».

- 1** Déterminer une relation entre $P(E_k)$ et $P(A_k)$.
- 2** Déterminer une relation entre $P(A_{k+1})$ et $P(A_k)$.
- 3** En déduire $P(A_k)$ puis $P(E_k)$.

Intégration

Sommaire

1. Intégrale d'une fonction continue par morceaux	454
1.1. Fonctions en escalier	454
1.2. Intégrale d'une fonction en escalier	455
1.3. Fonctions continues par morceaux	458
1.4. Intégrale d'une fonction continue par morceaux	459
2. Propriétés de l'intégrale	462
2.1. Linéarité et croissance	462
2.2. Stricte croissance de l'intégrale pour les fonctions continues	464
2.3. Encadrement d'une intégrale	464
2.4. Relation de Chasles	466
2.5. Un produit scalaire sur $\mathcal{C}([a, b])$	467
3. Calcul approché d'une intégrale	468
3.1. Sommes de Riemann	468
3.2. La méthode des trapèzes	471
4. Extension de la définition d'une intégrale	472
4.1. Fonctions continues par morceaux sur un intervalle	472
4.2. Intégration d'une fonction à valeurs complexes	473
5. Feuille de TD 20 : Intégration	476
5.1. Annulation et intégrales	476
5.2. Inégalités intégrales	477
5.3. Suites et intégrales	477
5.4. Sommes de Riemann	478
5.5. Divers	479

Toutes les fonctions considérées dans ce chapitre sont définies sur un segment (réel). Nous ne définirons pas d'intégrale sur un autre type d'intervalle. On fixe $I = [a, b]$ un segment réel, avec $a < b$.

L'intégrale est un outil fondamental en analyse. Sa définition et sa construction ne sont pas simples. En fait, il existe plusieurs théories d'intégration, les plus connues d'entre elles étant celles de Riemann et de Lebesgue. Heureusement, les calculs d'intégrales coïncident dans les cas simples, comme celui de l'intégration d'une fonction continue sur un segment. Nous nous intéresserons à l'intégrale au sens de Riemann, sans entrer en détail dans les problèmes qu'elle soulève.

La théorie de l'intégration de Riemann a pour but de donner un sens rigoureux aux calculs d'aires (algébriques) sous une courbe, comme vous l'avez vu en Terminale. Un objectif majeur de ce chapitre est de pouvoir associer à une fonction continue sur un segment un nombre représentant cette aire, son intégrale sur ce segment.

Pour ce faire, nous allons être menés à définir l'intégrale d'une classe plus générale de fonctions, les fonctions continues par morceaux. Pourquoi se compliquer la vie avec des fonctions non continues? En fait, l'approche de Riemann consiste d'abord à définir l'intégrale d'une fonction en escalier (constituée de morceaux d'applications constantes) – qui est loin d'être nécessairement continue – à en décrire les propriétés, puis à étendre cette notion à une classe plus large (pour nous, les fonctions continues par morceaux).

L'intégrale d'une fonction en escalier est très naturelle si on veut que l'intégrale représente une aire : elle consiste essentiellement à sommer des aires algébriques de rectangles. Nous verrons ensuite qu'une fonction continue par morceaux f sur un segment peut être approchée aussi finement que l'on veut par deux fonctions en escalier φ et ψ telles que $\varphi \leq f \leq \psi$. Ce résultat fondamental nous permettra de définir l'intégrale de f sur $[a, b]$.

Dans ce chapitre, le lien entre intégrale et primitive n'est pas encore effectué, il n'est donc pas permis de l'utiliser. Toutefois, certains exercices y font appel, et on admettra donc ce résultat fondamental pour les résoudre.

1. INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE PAR MORCEAUX

1.1. FONCTIONS EN ESCALIER

Définition (Subdivision)

On appelle *subdivision* de $[a, b]$ toute suite finie de points de $[a, b]$ (x_0, \dots, x_n) vérifiant $(x_0 = a < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b)$ (où $n \in \mathbb{N}^*$). Pour une telle suite, l'ensemble $\{x_0, \dots, x_n\}$ est appelé le *support* de cette subdivision (et comprend donc toujours a et b).
La quantité $h = \max(x_{k+1} - x_k)$ est appelée le *pas* de la subdivision.

1.a

Se donner une subdivision revient à se donner son support, puisqu'une subdivision est une suite strictement croissante.

Exemple (Subdivision)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a la subdivision $(a, a + \frac{b-a}{n}, a + 2\frac{b-a}{n}, \dots, a + n\frac{b-a}{n} = b)$, appelée *subdivision à pas constant*. Cette subdivision est appelée ainsi, car son pas est l'écart entre deux points consécutifs quelconques de son support.

i

Définition (Subdivision plus fine qu'une autre)

Soit σ et σ' deux subdivisions de $[a, b]$. On dit que σ est *plus fine* que σ' si le support de σ contient le support de σ' .

1.b

Ceci définit un ordre (partiel) \leq sur l'ensemble Ω des subdivisions de $[a, b]$. Pour toutes subdivisions σ et σ' de $[a, b]$, on peut définir la subdivision, notée (abusivement) $\sigma \cup \sigma'$, de support l'union des supports de σ et de σ' . Cette subdivision $\sigma \cup \sigma'$ est plus fine que σ et que σ' , et si ν est une subdivision plus fine que σ et que σ' , alors elle est plus fine que $\sigma \cup \sigma'$.

Donner un exemple de « calcul » de $\sigma \cup \sigma'$, montrant en outre qu'une subdivision de support de cardinal 4 n'est pas nécessairement plus fine qu'une subdivision de support de cardinal 3.

Définition (Fonction en escalier)

Soit $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que φ est *en escalier* s'il existe une subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ de $[a, b]$ et n réels $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$ tels que :

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \forall t \in]x_k, x_{k+1}[, \varphi(t) = \lambda_k$$

On dit alors que la subdivision σ est *adaptée* (ou encore *subordonnée*) à φ .

On note $\mathcal{E}([a, b])$ (ou $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$) l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$.

1.c

Illustration

Exemple (Fonctions en escalier)

- (1) Les fonctions constantes sur $[a, b]$ sont éléments de $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$.
- (2) La fonction partie entière restreinte à tout segment $[a, b]$ est en escalier sur ce segment, une subdivision adaptée étant celle de support $\{a, b\} \cup (\mathbb{Z} \cap [a, b])$.

ii

Nous n'avons pas précisé les valeurs en les x_k , qui en effet ne compteront pas dans la suite. Il faut garder présent à l'esprit que la valeur de l'intégrale d'une fonction sera inchangée si on modifie les valeurs prises par la fonction en un nombre fini de points.

Si σ est adaptée à $\varphi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$, alors toute subdivision plus fine que σ est adaptée à φ . Se peut-il que σ et σ' soient adaptées à φ , mais qu'aucune ne soit plus fine que l'autre ?

$\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{[a, b]}$: il suffit de prendre $\sigma_\varphi \cup \sigma_{\varphi'}$ pour constater que $\lambda\varphi + \lambda'\varphi'$ est en escalier. Au passage, on observe que pour deux fonctions en escalier données, on peut trouver une subdivision adaptée à chacune des deux.

De même, le produit de deux fonctions en escalier est en escalier.

Si $\varphi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$, de subdivision adaptée $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$, alors φ prend au plus $2n + 1$ valeurs, et est donc bornée.

1.2. INTÉGRALE D'UNE FONCTION EN ESCALIER

Définition (Intégrale d'une fonction en escalier)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction en escalier, et $\sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq n}$ une subdivision adaptée à f . Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on note λ_k la valeur de f sur $]x_k, x_{k+1}[$.

On appelle *intégrale* de f sur le segment $[a, b]$, et on note $\int_{[a, b]} f$ (ou $\int_a^b f(t)dt$) le réel

$$\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k (x_{k+1} - x_k).$$

1.d

Il est nécessaire, pour légitimer cette définition, de montrer que la somme ci-dessus ne dépend pas de la subdivision choisie σ adaptée à f . Si cette quantité dépendait effectivement de σ , l'intégrale de f sur $[a, b]$ serait une notion ambiguë, donc mal définie.

Démonstration

Justification de cette définition :

Pour toute subdivision σ adaptée à f , notons $I(\sigma)$ le réel correspondant défini ci-dessus. On prend deux subdivisions $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ et σ' , de supports respectifs S et S' , adaptées à f .

Première étape : on suppose que $S' = S \cup \{y\}$, où $y \notin S$. Le réel y est situé entre deux points consécutifs x_k et x_{k+1} de S (pour un certain $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$). Pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, soit λ_j la valeur prise par f sur $]x_j, x_{j+1}[$. La valeur prise par f sur $]x_k, y[$ et sur $]y, x_{k+1}[$ est λ_k . On a donc :

$$I(\sigma') = \sum_{j=0}^{k-1} \lambda_j (x_{j+1} - x_j) + \lambda_k (y - x_k) + \lambda_k (x_{k+1} - y) + \sum_{j=k+1}^{n-1} \lambda_j (x_{j+1} - x_j)$$

Comme $\lambda_k (y - x_k) + \lambda_k (x_{k+1} - y) = \lambda_k (x_{k+1} - x_k)$, on a bien $I(\sigma') = I(\sigma)$.

Deuxième étape : d'après la première étape, on montre par récurrence (sur $\text{Card}(S' \setminus S)$, en l'amorçant en 0) que si σ' est plus fine que σ , alors $I(\sigma') = I(\sigma)$.

Troisième étape : dans le cas général, on considère $\sigma \cup \sigma'$. Cette subdivision étant plus fine que σ (resp. que σ'), on a $I(\sigma) = I(\sigma \cup \sigma') = I(\sigma')$. □

Interprétation graphique : l'intégrale de φ est la somme des aires algébriques des zones rectangulaires définies par le graphe de φ . Faire un dessin.

Illustration

Exemple (Intégrale d'une application constante)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction constante, de valeur λ . On a :

$$\int_a^b f(t) dt = \lambda(b - a).$$

iii

Si φ et ψ sont en escalier sur $[a, b]$, et ne diffèrent qu'en un nombre fini de points, alors leurs intégrales sont égales. Ce résultat restera valable pour l'intégrale d'une fonction continue par morceaux.

En particulier, une fonction nulle sauf en un nombre fini de points est d'intégrale nulle. La réciproque est évidemment fautive !

Soit $c \in]a, b[$. Les restrictions de φ à $[a, c]$ et $[c, b]$ sont en escalier, et :

$$\int_{[a,c]} \varphi + \int_{[c,b]} \varphi = \int_{[a,b]} \varphi$$

Il suffit en effet d'insérer – si besoin est – c dans une subdivision adaptée à φ pour obtenir ce résultat.

Proposition (Linéarité de l'intégrale pour les fonctions escalier)

L'application

$$\begin{aligned} \nabla : \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto \int_{[a, b]} \varphi \end{aligned}$$

est (une forme) linéaire, *i.e.*

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall \varphi, \psi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}), \quad \int_{[a, b]} (\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda \int_{[a, b]} \varphi + \mu \int_{[a, b]} \psi$$

1.a

Démonstration

Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\varphi, \psi \in \mathcal{E}([a, b])$, et $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ une subdivision adaptée à φ et à ψ (donc à $\lambda\varphi + \mu\psi$).

Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. On note α_k et β_k les valeurs prises sur $]x_k, x_{k+1}[$ par φ et ψ respectivement. La valeur prise par $\lambda\varphi + \mu\psi$ sur cet intervalle est $\lambda\alpha_k + \mu\beta_k$.

On a

$$\begin{aligned} \int_{[a, b]} (\lambda\varphi + \mu\psi) &= \sum_{0 \leq k \leq n-1} (\lambda\alpha_k + \mu\beta_k)(x_{k+1} - x_k) \\ &= \lambda \sum_{0 \leq k \leq n-1} \alpha_k(x_{k+1} - x_k) + \mu \sum_{0 \leq k \leq n-1} \beta_k(x_{k+1} - x_k) \\ &= \lambda \int_{[a, b]} \varphi + \mu \int_{[a, b]} \psi. \end{aligned}$$

□

Proposition (Croissance de l'intégrale pour les fonctions en escalier)

Soit φ, ψ dans $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$.

- (1) Si $\varphi \geq 0$, alors $\int_{[a, b]} \varphi \geq 0$ (*positivité de l'intégrale*).
- (2) Si $\varphi \leq \psi$, alors $\int_{[a, b]} \varphi \leq \int_{[a, b]} \psi$ (*croissance de l'intégrale*).
- (3) Si $\varphi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$, alors $|\varphi| \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ et

$$\left| \int_{[a, b]} \varphi \right| \leq \int_{[a, b]} |\varphi|.$$

- (4) Si $\varphi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$, alors

$$\left| \int_{[a, b]} \varphi \right| \leq (b - a) \sup_{[a, b]} |\varphi|.$$

1.b

Démonstration

□

1.3. FONCTIONS CONTINUES PAR MORCEAUX

Définition (Fonction continue par morceaux)

On dit qu'une application $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est *continue par morceaux* s'il existe une subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ de $[a, b]$ (pour un certain entier $n \in \mathbb{N}^*$), telle que, pour tout entier $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$:

- (1) La restriction f_k de f à $]x_k, x_{k+1}[$ est continue.
- (2) Cette restriction est prolongeable par continuité aux points x_k et x_{k+1} .

On dit que la subdivision σ est *adaptée* (ou *subordonnée*) à f .

On note $\mathcal{C}_{pm}([a, b])$ (ou $\mathcal{C}_{pm}([a, b], \mathbb{R})$) l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur le segment $[a, b]$, et à valeurs réelles.

1.e

Illustration

Fonctions continues par morceaux

- Ne pas oublier la seconde assertion : faire des dessins de fonctions continues par morceaux et de fonctions non continues par morceaux vérifiant la première propriété ;
- Toute application continue par morceaux sur $[a, b]$ est bornée ;
- Toute subdivision plus fine qu'une subdivision adaptée à f est adaptée à f ;
- Conséquence : on peut trouver une subdivision adaptée à deux fonctions continues par morceaux données ;
- $\mathcal{E}([a, b]) \subset \mathcal{C}_{pm}([a, b])$ et $\mathcal{C}([a, b]) \subset \mathcal{C}_{pm}([a, b])$;
- $\mathcal{C}_{pm}([a, b])$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{[a, b]}$;
- De même, le produit de deux fonctions continues par morceaux est continue par morceaux ;
- La valeur absolue d'une fonction continue par morceaux est continue par morceaux ;
- Toute restriction d'une application continue par morceaux à un segment est continue par morceaux.

1.1

1.4. INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE PAR MORCEAUX

Proposition (Encadrement arbitrairement fin d'une application continue par morceaux)

Étant donné une fonction f continue par morceaux sur $[a, b]$, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe des fonctions φ et ψ en escalier sur $[a, b]$ telles que :

$$\varphi \leq f \leq \psi \text{ et } \psi - \varphi \leq \varepsilon$$

1.c

La démonstration s'effectue en deux étapes. On montre d'abord le résultat dans le cas où f est continue sur $[a, b]$, puis dans le cas général.

Démonstration

Première étape : on suppose f continue sur $[a, b]$. D'après le théorème de Heine, f est uniformément continue sur le segment $[a, b]$. Il existe donc $\eta > 0$ tel que, pour tous points x et y de $[a, b]$ vérifiant $|y - x| \leq \eta$, on ait $|f(y) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Fixons une subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ de $[a, b]$, de pas h vérifiant $h \leq \eta$ (il en existe, on peut même la prendre à pas constant). On définit une fonction en escalier χ de la façon suivante. Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, χ est constante de valeur $f(x_k)$ sur $[x_k, x_{k+1}[$, et $\chi(b) = f(b)$. La fonction χ est bien en escalier, et vérifie $|f - \chi| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ (pas de problème en b , et si on prend x entre x_k et x_{k+1} , on a $|x - x_k| \leq \eta$, et donc $|f(x) - \chi(x)| = |f(x) - f(x_k)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$). En posant $\varphi = \chi - \frac{\varepsilon}{2}$ et $\psi = \chi + \frac{\varepsilon}{2}$, on a bien le résultat voulu. □

Démonstration

Seconde étape : on suppose f continue par morceaux sur $[a, b]$. Soit $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ une subdivision adaptée à f . Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. On note \tilde{f}_k le prolongement par continuité de $f|_{]x_k, x_{k+1}[}$ sur $[x_k, x_{k+1}]$. En appliquant la première étape à \tilde{f}_k , on peut choisir des fonctions φ_k et ψ_k en escalier sur $[x_k, x_{k+1}]$, vérifiant $\varphi_k \leq \tilde{f}_k \leq \psi_k$ et $\psi_k - \varphi_k \leq \varepsilon$.

On définit φ et ψ sur $[a, b]$, coïncidant avec f en tout point du support de σ , et avec φ_k (resp. ψ_k) sur $]x_k, x_{k+1}[$, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Ces fonctions sont en escalier sur $[a, b]$, et vérifient :

$$\varphi \leq f \leq \psi \text{ et } \psi - \varphi \leq \varepsilon$$

□

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a, b])$. On note $\mathcal{E}^+(f) = \{\psi \in \mathcal{E}([a, b]), f \leq \psi\}$ et $\mathcal{E}^-(f) = \{\varphi \in \mathcal{E}([a, b]), \varphi \leq f\}$.

Proposition (Définition de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux)

Étant donné une fonction f continue par morceaux sur $[a, b]$, les quantités

$$\alpha^- = \sup \left\{ \int_{[a,b]} \varphi, \varphi \in \mathcal{E}^-(f) \right\} \quad \text{et} \quad \alpha^+ = \inf \left\{ \int_{[a,b]} \psi, \psi \in \mathcal{E}^+(f) \right\}$$

sont bien définies et égales.

1.d

Démonstration

Soit φ et ψ des éléments respectifs de $\mathcal{E}^-(f)$ et de $\mathcal{E}^+(f)$ (on sait que ces ensembles ne sont pas vides, d'après la proposition fondamentale précédente, ou parce qu'une fonction continue par morceaux est bornée). On a, par croissance de l'intégrale (pour les fonctions en escalier)

$$\int_{[a,b]} \varphi \leq \int_{[a,b]} \psi.$$

Fixons provisoirement ψ . Le réel $\int_{[a,b]} \psi$ est un majorant de la partie non vide

$$\left\{ \int_{[a,b]} \varphi, \varphi \in \mathcal{E}^-(f) \right\}$$

de \mathbb{R} , ce qui prouve l'existence de α^- , mais aussi l'inégalité $\alpha^- \leq \int_{[a,b]} \psi$.

Faisons maintenant varier ψ . Le réel α^- est un minorant de la partie non vide

$$\left\{ \int_{[a,b]} \psi, \psi \in \mathcal{E}^+(f) \right\}$$

de \mathbb{R} , ce qui prouve l'existence de α^+ , mais aussi l'inégalité $\alpha^- \leq \alpha^+$.

Soit ε un réel strictement positif quelconque. Soit φ et ψ deux éléments respectifs de $\mathcal{E}^-(f)$ et $\mathcal{E}^+(f)$ vérifiant $\psi - \varphi \leq \varepsilon$ (il en existe d'après la proposition fondamentale).

Par croissance et linéarité de l'intégrale, on a

$$\int_{[a,b]} \psi - \int_{[a,b]} \varphi \leq \varepsilon(b-a)$$

et notamment

$$\alpha^+ \leq \int_{[a,b]} \psi \leq \int_{[a,b]} \varphi + \varepsilon(b-a) \leq \alpha^- + \varepsilon(b-a).$$

Ceci étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\alpha^+ \leq \alpha^-$, et donc finalement l'égalité

$$\alpha^+ = \alpha^-.$$

□

Définition (Intégrale d'une fonction continue par morceaux)

Dans ce contexte, l'intégrale de la fonction continue par morceaux f sur le segment $[a, b]$, notée $\int_{[a,b]} f$ (ou $\int_a^b f(t)dt$) est cette quantité commune :

$$\int_{[a,b]} f = \sup \left\{ \int_{[a,b]} \varphi, \varphi \in \mathcal{E}^-(f) \right\} = \inf \left\{ \int_{[a,b]} \psi, \psi \in \mathcal{E}^+(f) \right\}$$

1.f

Caractérisation de l'intégrale

$\int_{[a,b]} f$ est donc l'unique réel α vérifiant les inégalités

$$\int_{[a,b]} \varphi \leq \alpha \leq \int_{[a,b]} \psi$$

pour tout $(\varphi, \psi) \in \mathcal{E}^-(f) \times \mathcal{E}^+(f)$.

1.2

Cette définition étend bien celle des intégrales des fonctions en escalier sur un segment.

On ne change pas la valeur de l'intégrale d'une fonction si on change cette dernière en un nombre fini de points.

Interprétation graphique : l'intégrale permet de calculer l'aire algébrique de la portion du plan délimitée par les droites d'équations $x = a$, $x = b$, $y = 0$, et le graphe de f .

Illustration

Exercice (Calcul de l'intégrale d'une fonction affine)

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, et $f : x \mapsto \alpha x + \beta$. Calculer, en revenant à la définition de l'intégrale,

$$\int_a^b f(t)dt.$$

1

2. PROPRIÉTÉS DE L'INTÉGRALE

2.1. LINÉARITÉ ET CROISSANCE

Proposition (Linéarité de l'intégrale)

L'application

$$\begin{aligned} \Delta : \mathcal{C}_{pm}([a, b]) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto \int_{[a, b]} f \end{aligned}$$

est une forme linéaire, i.e. :

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall f, g \in \mathcal{C}_{pm}([a, b], \mathbb{R}), \quad \int_{[a, b]} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_{[a, b]} f + \mu \int_{[a, b]} g$$

2.a

Démonstration

Première étape : on montre le respect de la multiplication scalaire. Soit donc $f \in \mathcal{C}_{pm}([a, b])$, et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si $\lambda = 0$, on a clairement $\int_{[a, b]} 0 \cdot f = 0 = \int_{[a, b]} f (= 0)$.

Si $\lambda > 0$, soit $(\varphi, \psi) \in \mathcal{E}^-(f) \times \mathcal{E}^+(f)$. On a $\lambda\varphi \in \mathcal{E}^-(\lambda f)$ et $\lambda\psi \in \mathcal{E}^+(\lambda f)$. Par linéarité de l'intégrale pour les fonctions en escalier, on a donc :

$$\lambda \int_{[a, b]} \varphi \leq \int_{[a, b]} (\lambda f) \leq \lambda \int_{[a, b]} \psi$$

En divisant par le réel strictement positif λ , on obtient

$$\int_{[a, b]} \varphi \leq \frac{1}{\lambda} \int_{[a, b]} (\lambda f) \leq \int_{[a, b]} \psi,$$

ce qui montre le résultat voulu (d'après la caractérisation de $\int_{[a, b]} f$).

Si $\lambda < 0$, soit $(\varphi, \psi) \in \mathcal{E}^-(f) \times \mathcal{E}^+(f)$. On a $\lambda\psi \in \mathcal{E}^-(\lambda f)$ et $\lambda\varphi \in \mathcal{E}^+(\lambda f)$, et donc, par linéarité de l'intégrale pour les fonctions en escalier :

$$\lambda \int_{[a, b]} \psi \leq \int_{[a, b]} (\lambda f) \leq \lambda \int_{[a, b]} \varphi$$

En divisant par le réel strictement négatif λ , on obtient

$$\int_{[a, b]} \varphi \leq \frac{1}{\lambda} \int_{[a, b]} (\lambda f) \leq \int_{[a, b]} \psi,$$

ce qui montre le résultat voulu (d'après la caractérisation de $\int_{[a, b]} f$).

□

Démonstration

Seconde étape : on montre le respect de la somme. Soit donc f, g continues par morceaux sur $[a, b]$. Soit φ_f et φ_g des éléments respectifs de $\mathcal{E}^-(f)$ et de $\mathcal{E}^-(g)$. On a $\varphi_f + \varphi_g \in \mathcal{E}^-(f + g)$, et donc (également par linéarité de l'intégrale pour les fonctions en escalier) :

$$\int_{[a,b]} \varphi_f + \int_{[a,b]} \varphi_g \leq \int_{[a,b]} (f + g).$$

Le réel $\int_{[a,b]} (f + g) - \int_{[a,b]} \varphi_g$ est donc un majorant de $\{\int_{[a,b]} \varphi_f, \varphi_f \in \mathcal{E}^-(f)\}$. Par définition de $\int_{[a,b]} f$, on a donc $\int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} (f + g) - \int_{[a,b]} \varphi_g$.

Le réel $\int_{[a,b]} (f + g) - \int_{[a,b]} f$ est donc un majorant de $\{\int_{[a,b]} \varphi_g, \varphi_g \in \mathcal{E}^-(g)\}$. Par définition de $\int_{[a,b]} g$, on a donc $\int_{[a,b]} g \leq \int_{[a,b]} (f + g) - \int_{[a,b]} f$, soit $\int_{[a,b]} f + \int_{[a,b]} g \leq \int_{[a,b]} (f + g)$.

Pour démontrer l'inégalité en sens inverse, on peut au choix effectuer un raisonnement analogue avec $(\psi_f, \psi_g) \in \mathcal{E}^+(f) \times \mathcal{E}^+(g)$, ou appliquer le résultat précédent à $-f$ et $-g$. □

Proposition (Croissance de l'intégrale)

Soit f, g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$.

- (1) Si $f \geq 0$, alors $\int_{[a,b]} f \geq 0$.
- (2) Si $f \leq g$, alors $\int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} g$.
- (3) $|\int_{[a,b]} f| \leq \int_{[a,b]} |f|$.

2.b

Démonstration

□

Le deuxième résultat exprime la croissance de la fonction Δ .

Exercice (Une inégalité intégrale)

Faire la question 2 de l'exercice 5 de TD.

2

2.2. STRICTE CROISSANCE DE L'INTÉGRALE POUR LES FONCTIONS CONTINUES

On sait que l'intégrale de la fonction nulle sur $[a, b]$ est nulle, mais si f est une fonction positive d'intégrale nulle, alors f n'est pas nécessairement nulle. Montrons cependant que f est nulle si f est en outre supposée continue :

Proposition (Stricte croissance de l'intégrale pour les fonctions continues)

Soit f une application continue et positive sur $[a, b]$. Si $\int_{[a,b]} f = 0$, alors $f = 0$.

2.c

Démonstration

□

La réciproque est évidemment vraie, mais sans grand intérêt. La contraposée est plus intéressante : si f est continue, non identiquement nulle et positive, alors $\int_{[a,b]} f > 0$.

Si $f, g \in \mathcal{C}([a, b])$, $f \leq g$ et $f \neq g$ (ce que l'on note dans ce cours $f < g$), alors $\int_{[a,b]} f < \int_{[a,b]} g$: la fonction Δ , restreinte à $\mathcal{C}([a, b])$ est donc strictement croissante.

Exercice (Stricte croissance de l'intégrale pour les fonctions continues)

Faire quelques questions de l'exercice 2 de TD.

3

2.3. ENCADREMENT D'UNE INTÉGRALE

Proposition (Inégalités de la moyenne, cas réel)

Si f et g sont continues par morceaux sur $[a, b]$, alors :

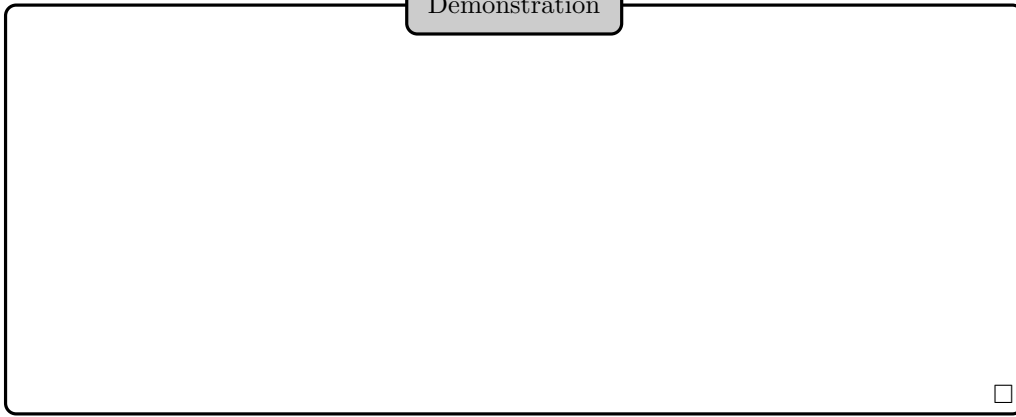
$$\left| \int_{[a,b]} fg \right| \leq \sup_{[a,b]} |f| \int_{[a,b]} |g|$$

En particulier,

$$\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq \sup_{[a,b]} |f| (b - a)$$

2.d

Démonstration



Définition (Valeur moyenne d'une fonction cpm sur un segment)

On appelle *valeur moyenne* de la fonction continue par morceaux f sur le segment $[a, b]$, le nombre :

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt.$$

2.a

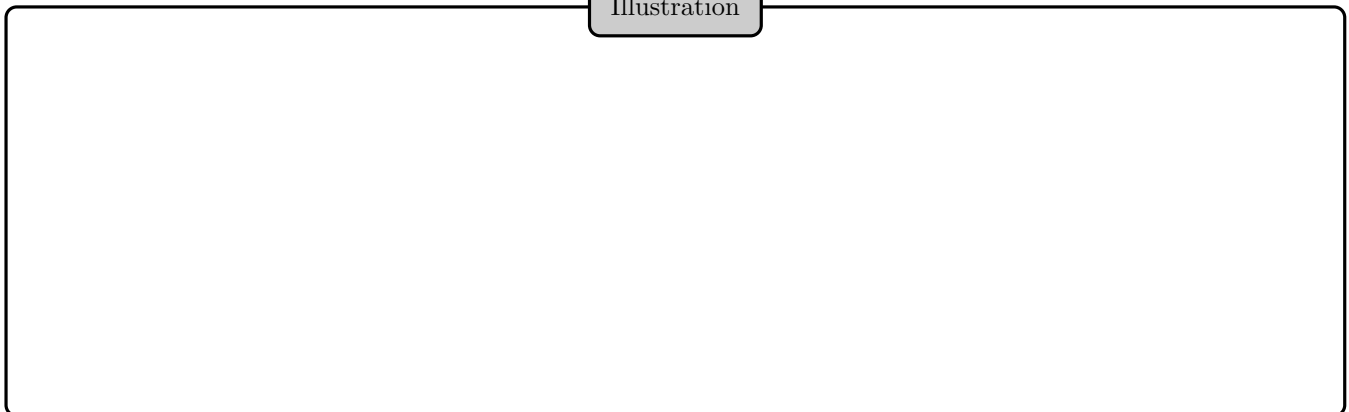
Exercice (Valeur moyenne d'une application affine)

Calculer la valeur moyenne d'une fonction affine.

4

La valeur moyenne de f est encadrée par les bornes de f .
Interprétation graphique, lien avec les moyennes discrètes.

Illustration



Exercice (Valeurs moyennes)

Faire l'exercice 1 de TD.

5

2.4. RELATION DE CHASLES

Proposition (Additivité par rapport à l'intervalle d'intégration)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, et $c \in]a, b[$. f est continue par morceaux sur $[a, b]$ si et seulement si $f|_{[a, c]}$ et $f|_{[c, b]}$ le sont, et on a alors :

$$\int_{[a, b]} f = \int_{[a, c]} f + \int_{[c, b]} f$$

2.e

Démonstration

Toute restriction à un segment d'une fonction continue par morceaux est continue par morceaux. Si réciproquement (y_0, \dots, y_p) et (z_0, \dots, z_q) sont adaptées aux fonctions continues par morceaux $f|_{[a, c]}$ et $f|_{[c, b]}$, alors $(y_0, \dots, y_p (= z_0 = c), z_1, \dots, z_q)$ est adaptée à la fonction continue par morceaux f .

Soit $\varphi \in \mathcal{E}^-(f)$. On a $\int_{[a, b]} \varphi = \int_{[a, c]} \varphi + \int_{[c, b]} \varphi$, donc

$$\int_{[a, b]} \varphi \leq \int_{[a, c]} f + \int_{[c, b]} f$$

Ceci étant valable pour tout $\varphi \in \mathcal{E}^-(f)$, on a :

$$\int_{[a, b]} f \leq \int_{[a, c]} f + \int_{[c, b]} f$$

Pour montrer l'inégalité en sens inverse, on peut raisonner de manière analogue sur $\psi \in \mathcal{E}^+(f)$, ou plus simplement appliquer l'inégalité trouvée à $-f$ (et exploiter la linéarité de l'intégrale). □

Si f est continue par morceaux sur un segment $[\alpha, \beta]$, $\alpha \leq \beta$, on pose :

$$\int_{\beta}^{\alpha} f(t) dt = - \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = - \int_{[\alpha, \beta]} f$$

De plus, on pose $\int_{\gamma}^{\gamma} f(t) dt = 0$ pour tout $\gamma \in [\alpha, \beta]$.

La valeur moyenne est donc inchangée si on échange a et b .

Attention, si $\alpha \leq \beta$, et $f \geq 0$, on a :

$$\int_{\beta}^{\alpha} f(t) dt \leq 0.$$

Il s'ensuit la relation suivante, appelée *relation de Chasles* :

Proposition (Relation de Chasles)

$$\forall (\alpha, \beta, \gamma) \in [a, b]^3, \quad \int_{\alpha}^{\gamma} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt + \int_{\beta}^{\gamma} f(t) dt$$

2.f

Démonstration

On égrène tous les cas possibles. □

Corollaire (Relation de Chasles généralisée)

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a, b])$, $n \in \mathbb{N}^*$, x_0, \dots, x_n des points de $[a, b]$. On a

$$\int_{x_0}^{x_n} f(t)dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)dt.$$

2.g

Exercice (Inégalité entre valeurs moyennes)

Faire l'exercice 4 de TD.

6

Exercice (Équivalent de la série harmonique)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. En utilisant la décroissance de la fonction inverse sur \mathbb{R}_+ , montrer que

$$H_n \sim \ln(n).$$

7

2.5. UN PRODUIT SCALAIRE SUR $\mathcal{C}([a, b])$

On peut définir une application

$$\begin{aligned} B : \mathcal{C}_{pm}([a, b])^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) &\mapsto \int_{[a, b]} fg \end{aligned}$$

Proposition (Pseudo-produit scalaire intégral)

L'application B est bilinéaire, symétrique et *positive*^a. On dit que c'est une forme bilinéaire, car l'espace vectoriel d'arrivée est le corps des scalaires.

^a i.e. $\forall f \in \mathcal{C}_{pm}([a, b]), B(f, f) \geq 0$.

2.h

Par positivité, on peut définir une application $N : \mathcal{C}_{pm}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}_+$, envoyant f sur $\sqrt{B(f, f)}$.

Proposition (Pseudo-inégalité de Cauchy-Schwarz intégrale)

Si $f \in \mathcal{C}_{pm}([a, b])$ et $N(f) = 0$, alors f est nulle sauf en un nombre fini de points. En particulier, si $f \in \mathcal{C}([a, b])$ et $N(f) = 0$, alors $f = 0$.

2.i

Ainsi, lorsqu'on restreint B à $\mathcal{C}([a, b])^2$, on obtient une application bilinéaire, symétrique, et dite *définie positive* : on dit que cette restriction est un *produit scalaire*.

On utilise les notations suivantes : pour tout $f, g \in \mathcal{C}([a, b])$, on note $\langle f, g \rangle = B(f, g)$ et $\|f\| = N(f)$

Proposition (Inégalité de Cauchy-Schwarz intégrale)

Soit $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continues par morceaux. On a alors :

$$\left(\int_{[a, b]} fg \right)^2 \leq \int_{[a, b]} f^2 \int_{[a, b]} g^2$$

De plus, si f et g sont continues, il y a égalité si et seulement si (f, g) est liée.

2.j

Démonstration

Partir de l'observation que, pour tout réel λ : $N(f + \lambda g)^2 \geq 0$.

□

Cette inégalité exprime simplement dans le cas continu le fait que $|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\|$. C'est d'ailleurs un bon moyen de la retenir.

3. CALCUL APPROCHÉ D'UNE INTÉGRALE

3.1. SOMMES DE RIEMANN

Définition (Subdivision pointée)

Soit $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ une subdivision de $[a, b]$. Pour tout entier $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on choisit un réel ξ_k dans $[x_k, x_{k+1}]$, et on note $\chi = (\xi_0, \dots, \xi_{n-1})$. Le couple (σ, χ) est appelée *subdivision pointée*. On parle également de la subdivision σ pointée par la famille χ ou par les points ξ_0, \dots, ξ_{n-1} , et on dit que χ est un *pointage* de σ .

- (1) Si σ est à pas constant, on dira que la subdivision pointée est à *pas constant*.
- (2) Si $\xi_k = x_k$, on dira que la subdivision est *pointée à gauche*.
- (3) Si $\xi_k = x_{k+1}$, on dira que la subdivision est *pointée à droite*.

Le *pas* d'une subdivision pointée (σ, χ) est celui de σ .

3.a

Définition (Somme de Riemann)

Soit f une application, définie sur le segment $[a, b]$ et à valeurs réelles. Soit (σ, χ) une subdivision pointée de $[a, b]$, $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ et $\chi = (\xi_0, \dots, \xi_{n-1})$. La quantité

$$R_{(\sigma, \chi)}(f) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) f(\xi_k)$$

est appelée *somme de Riemann* de f associée à la subdivision σ et au pointage χ (ou aux points ξ_k) (ou à la subdivision pointée (σ, χ)).

On note parfois abusivement $R_\sigma(f)$ au lieu de $R_{(\sigma, \chi)}(f)$.

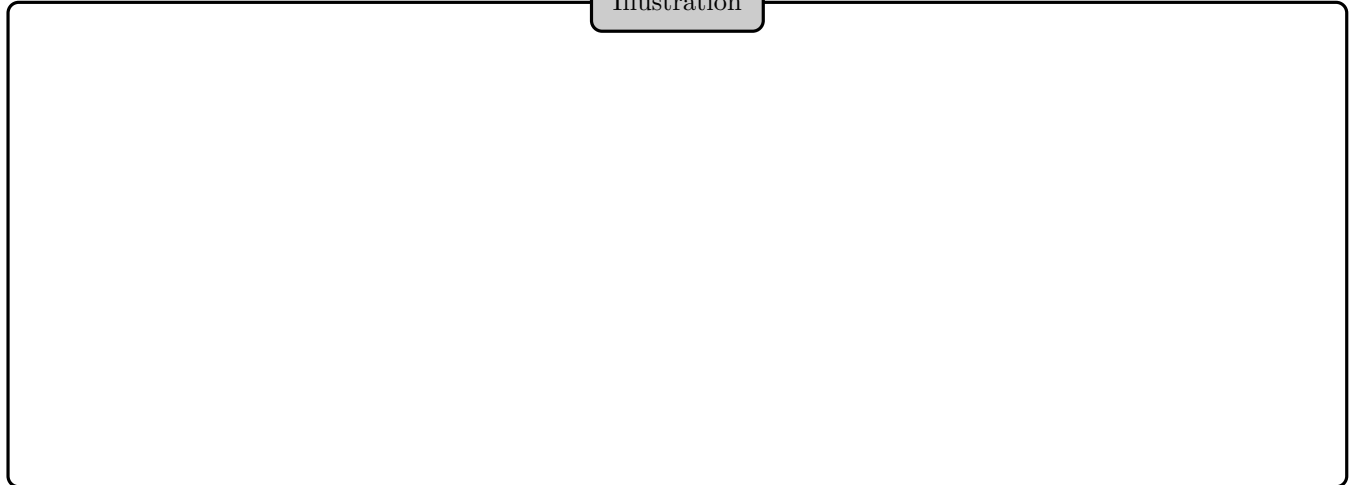
3.b

Dans 97% des cas au moins, on considère le cas où la subdivision pointée est à pas constant et pointée à gauche ou à droite. Si la subdivision pointée est à pas constant, on a :

$$R_{(\sigma, \chi)}(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)$$

Interprétation graphique :

Illustration



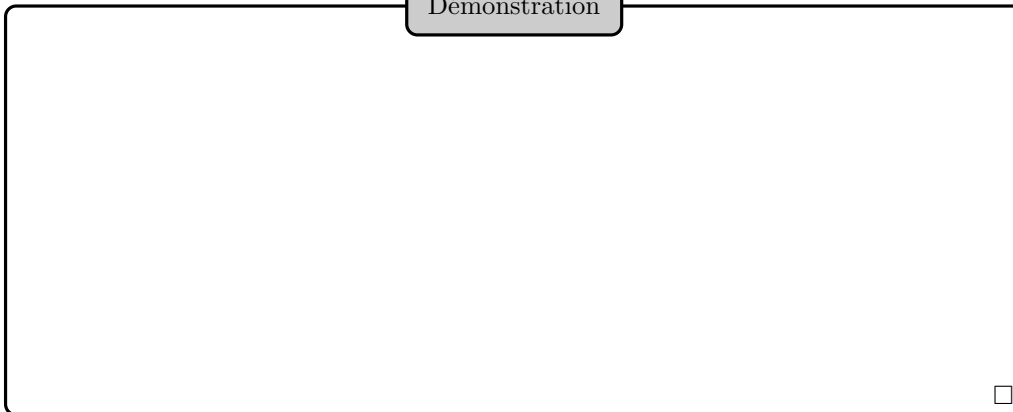
Dans la suite de ce paragraphe, on considère une subdivision pointée (σ, χ) de $[a, b]$.

Lemme pour les sommes de Riemann

$$\left| \int_{[a,b]} f - R_{(\sigma, \chi)}(f) \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(t) - f(\xi_k)| dt.$$

3.a

Démonstration



□

Proposition (Sommes de Riemann, cas lipschitzien)

Soit f K -lipschitzienne sur $[a, b]$. Si σ est une subdivision de pas h , alors pour toute somme de Riemann $R_\sigma(f)$ associée à la subdivision σ , on a :

$$\left| \int_{[a,b]} f - R_\sigma(f) \right| \leq K(b-a)h$$

3.b

Démonstration

□

Cette proposition est valable en particulier pour une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$. Notons $M_1 = \sup |f'|$. On considère une subdivision pointée de pas constant $\frac{b-a}{n}$. On a :

$$\left| \int_{[a,b]} f - R_n(f) \right| \leq M_1 \frac{(b-a)^2}{n}.$$

Pour une fonction de classe \mathcal{C}^1 , on a donc convergence des sommes de Riemann vers l'intégrale lorsque l'on fait tendre le pas des subdivisions considérées vers 0 (on a même une majoration de l'erreur, donc une estimation de la vitesse de convergence). Montrons que le résultat subsiste pour une fonction continue (en perdant toutefois l'aspect quantitatif).

Proposition (Sommes de Riemann, cas continu)

Soit $f \in \mathcal{C}([a, b])$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour toute subdivision $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ de pas $h \leq \eta$, toute somme de Riemann associée à σ , on ait :

$$\left| \int_{[a,b]} f - R_\sigma(f) \right| \leq \varepsilon$$

3.c

Démonstration

f est continue donc uniformément continue sur le segment $[a, b]$.

Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que pour tous points $x, y \in [a, b]$, on ait :

$$|y - x| \leq \eta \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Soit (σ, χ) une subdivision pointée de $[a, b]$ de pas $h \leq \eta$. Pour tout $t \in [x_k, x_{k+1}]$, on a $|f(t) - f(\xi_k)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$. Il vient :

$$\left| \int_{[a,b]} f - R_{(\sigma, \chi)}(f) \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon.$$

□

Corollaire (Sommes de Riemann, cas continu)

Pour tout entier naturel non nul n , soit $R_n(f)$ une somme de Riemann associée à la subdivision de $[a, b]$ de pas constant égal à $\frac{b-a}{n}$ (peu importe la valeur des ξ_k). Alors

$$\lim R_n(f) = \int_{[a,b]} f$$

3.d

Exercice (Somme de Riemann, cas continu par morceaux)

(Facultatif) Montrer la convergence dans le cas d'une fonction continue par morceaux.

8

Exercice (Calcul d'intégrale en passant par une somme de Riemann)

Faire l'exercice 10 de TD.

9

Exercice (Le théorème fondamental de l'analyse par les sommes de Riemann)

Faire l'exercice 13 de TD.

10

Exercice (Calcul préliminaire pour la méthode des trapèzes)

Montrer que $\int_a^b (t-a)(b-t)dt = \frac{(b-a)^3}{6}$.

11

3.2. LA MÉTHODE DES TRAPÈZES

La méthode des trapèzes consiste à approcher la fonction f (supposée suffisamment régulière), non plus par une fonction en escalier comme dans les sommes de Riemann, mais par une fonction continue, affine par morceaux.

Plus précisément, on choisit la subdivision $\sigma_n = (x_0, \dots, x_n)$ de $[a, b]$ de pas constant $\frac{b-a}{n}$. On considère la fonction γ_n affine sur chaque segment $[x_k, x_{k+1}]$: cette fonction est en particulier continue. L'aire du trapèze de sommet $(x_k, 0)$, $(x_{k+1}, 0)$, $(x_k, f(x_k))$, $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$ vaut :

$$\frac{1}{2} (x_{k+1} - x_k) (f(x_k) + f(x_{k+1}))$$

L'intégrale de la fonction γ_n vaut :

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} (x_{k+1} - x_k) (f(x_k) + f(x_{k+1})) = \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) \right)$$

Pour estimer avec quelle finesse cette intégrale approche celle de f , on utilise le :

Lemme pour la méthode des trapèzes

Soit $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$ telle que $|f''|$ soit majorée par M_2 sur I . Soient $\alpha, \beta \in I$, $\alpha \leq \beta$.
On a :

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f - (\beta - \alpha) \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} \right| \leq \frac{M_2}{12} (\beta - \alpha)^3$$

3.e

Démonstration

Soit g la fonction affine coïncidant avec f en α et β .

La fonction

$$\varphi : t \mapsto f(t) - \varepsilon \frac{M_2}{2}(t - \alpha)(\beta - t)$$

est convexe (resp. concave) si $\varepsilon = 1$ (resp. $\varepsilon = -1$) (dérivée $\varphi''(t) = f''(t) + \varepsilon M_2$) et donc

$$\forall t \in [\alpha, \beta], f(t) - \frac{M_2}{2}(t - \alpha)(\beta - t) \leq g(t).$$

et

$$\forall t \in [\alpha, \beta], f(t) + \frac{M_2}{2}(t - \alpha)(\beta - t) \geq g(t).$$

Nous avons donc

$$\forall t \in [\alpha, \beta], |f(t) - g(t)| \leq \frac{M_2}{2}(t - \alpha)(\beta - t).$$

On a donc

$$\left| \int_{[\alpha, \beta]} f - \int_{[\alpha, \beta]} g \right| \leq \int_{[\alpha, \beta]} |f - g| \leq \frac{M_2}{12}(\beta - \alpha)^3$$

Il ne reste plus qu'à remarquer que g étant affine, sa valeur moyenne est $\frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}$. □

En conséquence immédiate du lemme, on a donc :

Proposition (Majoration de l'erreur pour la méthode des trapèzes)

$$\left| \int_{[\alpha, \beta]} f - A_n \right| \leq \frac{M_2(b - a)^3}{12n^2}$$

3.f

La convergence est donc assurée (on a montré un résultat plus précis), et pouvait être déduite d'un encadrement de A_n par des sommes de Riemann.

4. EXTENSION DE LA DÉFINITION D'UNE INTÉGRALE

4.1. FONCTIONS CONTINUES PAR MORCEAUX SUR UN INTERVALLE

Soit I un intervalle de \mathbb{R} d'intérieur non vide.

Définition (Fonction continue par morceaux sur I)

On dit que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est *continue par morceaux* sur I si elle (en fait sa restriction) est continue par morceaux sur tout segment de I d'intérieur non vide.

On note $\mathcal{C}_{pm}(I)$ (ou $\mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$) l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I (et à valeurs réelles). 4.a

Fonction continue par morceaux sur I

- On peut convenir qu'une fonction définie en un seul point est continue par morceaux, même si cela n'a pas grand intérêt.
- Une fonction continue sur I est continue par morceaux sur I . La fonction inverse sur \mathbb{R}_+^* est continue par morceaux sur \mathbb{R}_+^* , mais n'est pas prolongeable en une fonction continue par morceaux sur \mathbb{R}_+ , car sa restriction à $[0, 1]$ (par exemple) ne serait pas continue par morceaux (car non bornée).
- Toute fonction continue par morceaux sur I admet une limite finie à gauche et une limite finie à droite en tout point où cela a un sens. Par exemple, la fonction $x \mapsto \sin(1/x)$ sur $]0, 1]$ est continue par morceaux, mais n'est pas prolongeable en une fonction continue par morceaux sur $[0, 1]$.

4.1

Notation (Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle)

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}(I)$. On note

$$\int_{[a,b]} f := \int_{[a,b]} f_{|[a,b]}$$

pour tous $a, b \in I$, $a < b$ (l'intégrale de droite a un sens car $f_{|[a,b]}$ est continue par morceaux sur le segment $[a, b]$, ce qui donne un sens à l'intégrale de gauche).

Ensuite, on définit, pour tous $\alpha, \beta \in I$:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \begin{cases} \int_{[\alpha, \beta]} f & \text{si } \alpha < \beta \\ -\int_{[\beta, \alpha]} f & \text{si } \beta < \alpha \\ 0 & \text{si } \alpha = \beta \end{cases}$$

4.b

Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle

- Il n'y a pas grand chose à rajouter aux propriétés déjà vues, cependant : méfiez vous des bornes d'intégration inversées (pour des questions de signe), des bornes égales (par exemple, la fonction valant 1 en 0 est continue positive d'intégrale nulle sur $[0, 0]$, mais pas nulle).
- En particulier, la relation de Chasles est toujours valable :

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in I, \quad \int_{\alpha}^{\gamma} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt + \int_{\beta}^{\gamma} f(t) dt,$$

de même pour la relation de Chasles généralisée.

- Nous n'avons pas donné de sens à $\int_I f$, sauf dans le cas où I est un segment. L'année prochaine, vous verrez une notion étendue d'intégrale.

4.2

4.2. INTÉGRATION D'UNE FONCTION À VALEURS COMPLEXES

L'idée est de se ramener au cas d'une fonction réelle à valeurs réelles, en prenant les parties réelle et imaginaire de la fonction à valeurs complexes considérée.

Définition (Fonction complexe continue par morceaux)

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est dite *continue par morceaux* s'il existe une subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ de $[a, b]$ (pour un certain entier $n \in \mathbb{N}^*$), telle que, pour tout entier $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$:

- La restriction f_k de f à $]x_k, x_{k+1}[$ est continue.
- Cette restriction est prolongeable par continuité aux points x_k et x_{k+1} .

On dit alors que la subdivision σ est *adaptée* (ou *subordonnée*) à f .

Leur ensemble est noté $\mathcal{C}_{pm}([a, b], \mathbb{C})$.

4.c

Fonction complexe continue par morceaux

- f est continue par morceaux si et seulement si $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ le sont.
- L'ensemble $\mathcal{C}_{pm}([a, b], \mathbb{C})$ est un \mathbb{C} -espace vectoriel, stable par produit.

4.3

Définition (Intégrale d'une fonction complexe continue par morceaux)

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a, b], \mathbb{C})$. On appelle *intégrale de la fonction f sur le segment $[a, b]$* et on note $\int_{[a,b]} f$ ou $\int_a^b f(t)dt$ le nombre complexe :

$$\int_{[a,b]} \operatorname{Re} f + i \int_{[a,b]} \operatorname{Im} f$$

4.d

Intégrale d'une fonction complexe continue par morceaux

On a donc $\int_{[a,b]} \operatorname{Re} f = \operatorname{Re} \int_{[a,b]} f$, $\int_{[a,b]} \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} \int_{[a,b]} f$.

4.4

Notation (Fonction complexe continue par morceaux sur I)

On conserve les notations des autres sections, et on définit la notion de fonction continue par morceaux sur un intervalle réel d'intérieur non vide : un élément de $\mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{C})$ est une fonction de I dans \mathbb{C} , dont la restriction à tout segment est continue par morceaux.

4.e

En se ramenant aux parties réelles et imaginaires, on retrouve les propriétés vues précédemment, sauf celles qui font intervenir l'ordre (on ne parle plus de croissance de l'intégrale par exemple) :

Proposition (Linéarité de l'intégrale complexe)

L'application

$$\begin{aligned} \nabla : \mathcal{C}_{pm}([a, b], \mathbb{C}) &\rightarrow \mathbb{C} \\ f &\mapsto \int_{[a,b]} f \end{aligned}$$

est une forme linéaire sur \mathbb{C} .

4.a

Proposition (Relation de Chasles)

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{C})$, et $\alpha, \beta, \gamma \in I$. On a :

$$\int_{\alpha}^{\gamma} f(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt + \int_{\beta}^{\gamma} f(t)dt.$$

4.b

Proposition (Module d'une intégrale)

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a, b], \mathbb{C})$. Alors $|f|$ est continue par morceaux sur $[a, b]$ et :

$$\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq \int_{[a,b]} |f|$$

4.c

Démonstration

$|f|$ est clairement continue par morceaux si f l'est (toute subdivision adaptée à f le sera à $|f|$).

Il existe un réel θ tel que

$$\int_a^b f(t)dt = e^{i\theta} \left| \int_a^b f(t)dt \right|$$

d'où (par linéarité de l'intégrale, et d'après 4.2)

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| = \int_a^b (e^{-i\theta} f(t)dt) = \int_a^b \operatorname{Re}(e^{-i\theta} f(t)dt)$$

Comme $\operatorname{Re}(e^{-i\theta} f) \leq |f|$, la croissance de l'intégrale *réelle* permet de conclure.

□

Ceci permet de déduire l'inégalité de la moyenne :

Proposition (Inégalité de la moyenne, cas complexe)

Si f et g sont continues par morceaux sur $[a, b]$, alors :

$$\left| \int_{[a,b]} fg \right| \leq \sup_{[a,b]} |f| \int_{[a,b]} |g|$$

En particulier,

$$\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq \sup_{[a,b]} |f| (b - a)$$

4.d

Démonstration

$$\left| \int_{[a,b]} fg \right| \leq \int_{[a,b]} |fg| = \int_{[a,b]} |f||g| \leq \sup_{[a,b]} |f| \int_{[a,b]} |g|.$$

□

5. FEUILLE DE TD 20 : INTÉGRATION

Sauf mention contraire, a et b sont deux réels, $a < b$. On admet (provisoirement) le théorème fondamental de l'analyse, faisant le lien entre primitive et intégrale.

5.1. ANNULATION ET INTÉGRALES

Exercice 1 (Lorsque la valeur moyenne est aussi le maximum)

0

Déterminer les fonctions f de $[a, b]$ dans \mathbb{R} , continues, telles que $\int_a^b f(t)dt = (b-a) \sup_{[a,b]} |f|$.

Exercice 2 (Annulation de fonction et intégrales)

0 à 2

- 1 Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$, d'intégrale nulle sur $[a, b]$. Montrer que f s'annule.
- 2 Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe $a \in]0, 1[$ tel que $f(a) = a$.
- 3 Soit f continue de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} , $n \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \int_0^1 f(u)u^k du = 0.$$

Montrer que f admet au moins $n + 1$ zéros distincts dans $]0, 1[$.

4 (X PC 09) Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, \pi], \mathbb{R})$. On suppose que : $\int_0^\pi f(t) \cos(t)dt = \int_0^\pi f(t) \sin(t)dt = 0$. Montrer que f s'annule au moins deux fois sur $[0, \pi]$.

5 (Cachan 07) Soit f une fonction réelle de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , 2π -périodique et de moyenne nulle. Montrer que $f + f''$ s'annule quatre fois au moins sur $[0, 2\pi]$.

Exercice 3 (Nullité de fonction et intégrales)

3 à 4

- 1 Soit $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continues, telles que :

$$\forall x \in [0, 1], f(x) = \int_0^x g(t)dt \text{ et } g(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

Montrer $f = g = 0$.

- 2 Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\int_{[0,1]} f^2 = \int_{[0,1]} f^3 = \int_{[0,1]} f^4$. Montrer $f = 0$ ou $f = 1$.

- 3 Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ telle que :

$$\forall g \in \mathcal{E}([0, 1], \mathbb{R}), \int_{[0,1]} fg = 0.$$

Montrer que $f = 0$.

- 4 (Centrale 08) Soit $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \int_a^b f \int_a^b g = 0$. Montrer que $f = 0$ ou $g = 0$.

- 5 Soit f continue de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} telle que $\int_0^1 f^n(u)du$ ne prenne qu'un nombre fini de valeurs quand n décrit \mathbb{N} . Montrer que $f = -1$ ou $f = 0$ ou $f = 1$.

5.2. INÉGALITÉS INTÉGRALES

Exercice 4 (Inégalité entre valeurs moyennes)

2

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $a < b < c$. Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a, c])$. Montrer :

$$\frac{1}{c-a} \int_a^c f(t) dt \leq \max \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt, \frac{1}{c-b} \int_b^c f(t) dt \right).$$

Exercice 5 (Inégalités intégrales)

2

1 Soit $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, continues et positives, telles que $fg \geq 1$. Montrer

$$\left(\int_{[0,1]} f \right) \left(\int_{[0,1]} g \right) \geq 1.$$

2 (X MP 05) Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\int_{[0,1]} f = 0$, m le minimum de f et M son maximum. Prouver $\int_{[0,1]} f^2 \leq -mM$.

3 (X MP 05) Soit f et g deux fonctions croissantes et continues sur $[0, 1]$. Comparer $\int_{[0,1]} fg$ et $(\int_{[0,1]} f)(\int_{[0,1]} g)$.

5.3. SUITES ET INTÉGRALES

Exercice 6 (Suites étudiées à l'aide d'intégrales)

1

1 En remarquant que $\frac{(-1)^k}{k} = -\int_0^1 (-x)^{k-1} dx$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

2 (Mines MP 08) Calculer $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{3k+1}$.

3 (Mines MP 08) Nature de la suite de terme général $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k}$.

Exercice 7 (Limite de suites d'intégrales)

1

1 (Mines PC) Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}_+^*)$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 x^n f(x) dx$. Que peut-on dire de la suite (I_n) ?

2 (X PC 09) Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$: $I_n = n \int_0^1 t^n f(t) dt$. Déterminer la limite de (I_n) .

3 (Centrale et Mines MP 05, TPE 09) Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} . Déterminer la limite de $I_n = \int_0^1 f(t^n) dt$.

Exercice 8 (Comparaison somme intégrale)

1

On considère une fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux, décroissante de limite nulle en $+\infty$, telle que $\int_0^x f(t)dt$ tende vers un réel l lorsque x tend vers $+\infty$.

1 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n^2} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_0^n f(t)dt \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n^2-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

En déduire que $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n^2} f\left(\frac{k}{n}\right)$ tend vers l lorsque n tend vers $+\infty$.

2 Application : calculer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n^2} \frac{n}{n^2 + k^2}.$$

Exercice 9 (Lemme de Lebesgue)

1 et 4

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$. Montrer que la suite de terme général $\int_a^b f(t) \cos(nt)dt$ converge vers 0.

Indication : le montrer d'abord pour les fonctions en escalier.

5.4. SOMMES DE RIEMANN

Exercice 10 (Calcul d'intégrale en passant par une somme de Riemann)

0

Calculer à l'aide d'une somme de Riemann : $\int_a^b e^t dt$.

Exercice 11 (Calcul de limites par les sommes de Riemann)

0

Calculer :

1 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.

2 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{k^2 + n^2}$.

3 $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$;

Exercice 12 (Estimation de la vitesse de convergence d'une somme de Riemann)

1

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}.$$

Calculer $l = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$. En appliquant l'égalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 à la fonction arctangente (en $\frac{k}{n}$, évaluée en $\frac{k-1}{n}$), donner un équivalent de $u_n - l$.

Exercice 13 (Le théorème fondamental de l'analyse par les sommes de Riemann)

2

En utilisant les sommes de Riemann et l'égalité des accroissements finis, montrer que si $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$, alors $\int_{[a,b]} f' = f(b) - f(a)$.

Exercice 14 (Une pseudo-somme de Riemann)

4

Soit f et g continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} . Calculer :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

5.5. DIVERS

Exercice 15 (Extremums d'une fonction définie par des intégrales (CCP 09))

2

Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}_+^*)$ et $\Phi : f \in E \mapsto \int_0^1 \frac{dt}{f(t)} \times \int_0^1 f(t) dt$. Déterminer $\inf \Phi$ et $\sup \Phi$.

Exercice 16 (Cesàro intégral)

2

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux telle que f soit de limite $l \in \mathbb{R}$ en $+\infty$. Montrer que $\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$ tend vers l lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 17 (Équations fonctionnelles intégrales)

2

1 (X PC 09) Déterminer les $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t) dt$.

2 (Centrale PC 09) Trouver les $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], [0, 1])$ telles que $\int_0^1 f = \int_0^1 f^2$.

Exercice 18 (Fonctions définies par une intégrale)

2

1 On définit sur \mathbb{R}_+^* la fonction $f : x \mapsto \int_x^{3x} \frac{\cos(t)}{t} dt$. Calculer la limite de f en 0, en $+\infty$.

2 Étudier en 1 la fonction $x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$.

Exercice 19 (Équation différentielle et limite à l'infini)

4

Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continûment dérivable sur \mathbb{R} telle que $\lim_{+\infty} f + f' = 0$ est de limite nulle en $+\infty$.

Primitives et formules de Taylor

Sommaire

1. Primitives et intégrales d'une fonction continue	481
1.1. Définitions	481
1.2. Les résultats fondamentaux	482
2. Méthodes de calcul de primitives	483
2.1. Intégration par parties	483
2.2. Changement de variable	484
3. Primitives des fonctions usuelles	486
4. Techniques de calcul de primitives	486
4.1. Primitives des fonctions rationnelles	486
4.2. Primitives des fonctions rationnelles en sinus et cosinus	487
4.3. Primitives des fonctions rationnelles en cosinus et sinus hyperboliques	488
4.4. Compléments	488
5. Formules de Taylor	489
5.1. Formule de Taylor avec reste intégral	489
5.2. Inégalité de Taylor-Lagrange	490
5.3. Formule de Taylor-Young	491
6. Feuille de TD 21 : Primitives et formules de Taylor	493

Dans ce chapitre, I désigne un intervalle réel d'intérieur non vide. \mathbb{K} désigne le corps \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

1. PRIMITIVES ET INTÉGRALES D'UNE FONCTION CONTINUE

1.1. DÉFINITIONS

Définition (Primitive)

Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. On appelle *primitive* de f sur I toute fonction de I dans \mathbb{K} , dérivable sur I , de dérivée égale à f .

1.a

Si F est une primitive de $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$, alors les primitives de f sont les $F + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

Le fait d'être sur un intervalle est primordial.

En particulier, si deux primitives d'une même fonction continue f sur I coïncident en un point, alors elles sont égales (cf. la condition de Cauchy).

Par exemple, si $a \in I$, il existe au plus une primitive de f s'annulant en a .

Exemple (Primitives)

Primitives d'une fonction polynomiale, de la fonction exponentielle, inverse.

i

1.2. LES RÉSULTATS FONDAMENTAUX

Théorème (Expression intégrale de la primitive s'annulant en a)

Soit f une fonction continue de I dans \mathbb{R} , et $a \in I$. La fonction F_a définie par :

$$\forall x \in I, F_a(x) = \int_a^x f(t)dt$$

est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a .

1.a

Démonstration

□

Exercice (Continuité d'une expression intégrale)

Montrer, sans utiliser ce le théorème ci-dessus, le résultat plus faible suivant : F_a est continue sur I .

1

Échec de l'extension de la notion de primitive

Que dire si f est continue par morceaux ? La démonstration précédente montre que F_a admet des dérivées à gauche et à droite en tout point de l'intérieur de I , qui sont les limites à gauche et à droite de f en ce point. En particulier, il se peut fort bien que F_a ne soit pas dérivable en certains points (à prendre parmi les points de discontinuité de f).

Si une fonction continue par morceaux admet une primitive, alors elle est continue : on ne peut donc espérer étendre la notion de primitive telle qu'on l'a définie au cas d'une fonction continue par morceaux.

1.1

On en déduit plusieurs corollaires, le premier sera qualifié de théorème étant donné son importance :

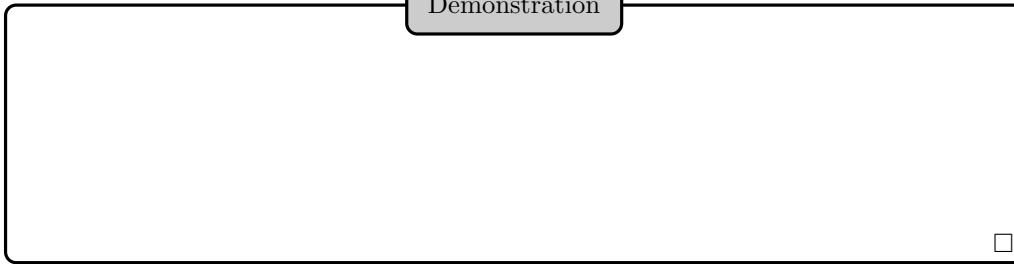
Théorème (Primitives et intégrale)

Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$, a et b deux points de I . Si F est une primitive de f sur I , on a :

$$\int_{[a,b]} f = F(b) - F(a)$$

1.b

Démonstration



On peut reformuler ce théorème ainsi : soit $f \in \mathcal{C}^1(I)$. Pour tout $(a, b) \in I^2$, on a :

$$f(b) - f(a) = \int_{[a,b]} f'.$$

Exercice (Dérivation d'une fonction définie par une intégrale à bornes variables)

Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$, et α, β dérivables sur un intervalle J à valeurs dans I . Montrer que la fonction

$$\begin{aligned} \varphi : J &\rightarrow \mathbb{K} \\ x &\mapsto \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f \end{aligned}$$

est dérivable sur J et exprimer sa dérivée en fonction de f , α et β .

2

Exercice (Primitives des fonctions paires, impaires, périodiques)

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

- 1 On suppose f impaire. Que dire des primitives de f ?
- 2 On suppose f paire. Combien f admet-elle de primitives impaires ?
- 3 On suppose f T -périodique. À quelle condition nécessaire et suffisante f admet-elle (au moins) une primitive T -périodique ?

3

Écritures $\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = [F(t)]_{t=a}^{t=b}$.

La notation $\int f$, ou $\int f(x)dx$, désigne (abusivement) une primitive de f (cf. Maple). On écrira par exemple

$$\int \exp(x)dx = \exp(x) + C \quad (C \in \mathbb{K})$$

2. MÉTHODES DE CALCUL DE PRIMITIVES

2.1. INTÉGRATION PAR PARTIES

Proposition (Intégration par parties)

Si u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$, on a :

$$\int_{[a,b]} uv' = [uv]_a^b - \int_{[a,b]} u'v.$$

2.a

Démonstration

□

Cette formule provient donc simplement de la formule de dérivation d'un produit.

Lorsqu'on applique cette méthode, bien préciser u , v (et non pas u et v'), et ne pas oublier de signaler que ces deux fonctions sont de classe \mathcal{C}^1 .

Quand effectuer une intégration par parties? Cette formule est aussi utile pour se débarrasser de fonctions « compliquées » telles que \ln , \arcsin , \arctan , etc.

Elle permet également dans certains cas d'obtenir un terme intégral que l'on arrive plus facilement à encadrer.

Il est parfois utile d'appliquer cette formule en prenant pour u' ou v' une fonction constante (exemple : fonction logarithme), et de l'intégrer en une fonction affine non linéaire (*i.e.* avec un terme constant).

Il arrive d'appliquer plusieurs fois d'affilée cette méthode (voire de calculer une suite d'intégrales).

Exercice (Intégration par parties)

Calculer $\int_0^\pi x \sin(x) dx$ en effectuant une intégration par parties.

4

2.2. CHANGEMENT DE VARIABLE

Proposition (Changement de variable)

Soit I et J deux intervalles de \mathbb{R} , et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue, $\varphi : J \rightarrow I$ de classe \mathcal{C}^1 . Soient α et β deux éléments de J . On a :

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u)) \varphi'(u) du.$$

2.b

Démonstration

□

Cette formule provient donc simplement de la formule de dérivation d'une composée.

Moyen mnémotechnique à la physicienne : si $t = \varphi(u)$, alors $dt = \varphi'(u) du$.

Il ne faut pas oublier de changer les bornes de l'intégrale!

Exemple (Changement de variable)

En effectuant le changement de variable $u = \sin(t)$, on a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(t) \cos(t) dt = \int_0^1 u^3 du = \frac{1}{4}.$$

On aurait aussi pu écrire

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(t) \cos(t) dt = \int_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} \sin^3(t) d \sin(t) = \left[\frac{\sin^4(t)}{4} \right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}.$$

i

Exercice (Intégration par parties)

Calculer $\int_0^\pi x \sin(x) dx$ en effectuant le changement de variable $u = \pi - x$.

5

Exercice (Invariance par translation)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. Soit $\tau \in \mathbb{R}$. Vérifier

$$\int_a^b f(t) dt = \int_{a+\tau}^{b+\tau} f(t - \tau) dt$$

- 1 Dans le cas où f est continue.
- 2 Dans le cas général.

6

Exercice (Valeur moyenne d'une fonction périodique)

Soit f une fonction T -périodique, continue par morceaux, de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

1 Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

$$\int_{[a, a+T]} f = \int_{[b, b+T]} f.$$

Ainsi, il est permis de définir la *valeur moyenne* d'une fonction T -périodique comme le réel

$$\frac{1}{T} \int_{[a, a+T]} f,$$

et ce pour n'importe quelle valeur de a .

2 Calculer les valeurs moyennes de \cos , \sin , \cos^2 , \sin^2 .

7

Exercice (Aire d'un quart de disque)

Calculer $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$.

8

Les changements de variable les plus simples, les changements de variable affines, permettent notamment d'exploiter la périodicité et la symétrie de la fonction considérée (périodicité, parité, imparité, décalage).

Ils permettent aussi de se ramener au cas où le segment d'intégration est $[0, 1]$ ($t = a + u(b - a)$), ou $[-1, 1]$ ($t = \frac{a+b}{2} + u \frac{a-b}{2}$) au choix.

3. PRIMITIVES DES FONCTIONS USUELLES

On mentionne ici des primitives classiques et trop souvent oubliées.

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C. (\alpha \neq -1).$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C.$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C (a \in \mathbb{R}_+^*).$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C'.$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos(x)^2} = \tan(x) + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sin(x)^2} = -\cotan(x) + C.$$

$$\int \frac{dx}{\cos(x)} = \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sin(x)} = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C.$$

$$\int \tan(x) dx = -\ln |\cos(x)| + C.$$

4. TECHNIQUES DE CALCUL DE PRIMITIVES

4.1. PRIMITIVES DES FONCTIONS RATIONNELLES

Il est aisé de calculer une primitive de $x \mapsto (x - \alpha)^n$ lorsque $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ (même si α est complexe).

Si $\alpha \in \mathbb{R}$, on connaît depuis belle lurette une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x-\alpha}$.

On peut vérifier que si $\alpha = a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, et $b \neq 0$, alors

$$\int \frac{1}{x-\alpha} dx = \frac{1}{2} \ln((x-a)^2 + b^2) + i \arctan\left(\frac{x-a}{b}\right) + C$$

Ainsi, il est facile de déterminer les primitives d'une fraction rationnelle lorsqu'on a sa décomposition en éléments simples sur \mathbb{C} .

En pratique, il est fréquent de partir d'une décomposition sur \mathbb{R} , et la seule difficulté est de calculer une primitive de

$$\frac{\lambda X + \mu}{(X^2 + bX + c)^r}$$

lorsque $b^2 - 4c < 0$.

Lorsque $r = 1$, l'idée est d'exprimer la fraction rationnelle comme combinaison linéaire de deux fonctions dont on sait calculer la primitive, à savoir

$$x \mapsto \frac{2x+b}{x^2+bx+c} \text{ et } x \mapsto \frac{1}{x^2+bx+c}$$

Pour cette dernière, on pensera à écrire $X^2 + bX + c = (X + \frac{b}{2})^2 + \frac{4c-b^2}{4}$, puis on calculera une primitive grâce à un changement de variable et la relation à retenir

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

Si $r \geq 2$, on peut :

(1) Soit se ramener au calcul de $\int \frac{dx}{(x^2+bx+c)^r}$ et, par changement de variable, se ramener à

$$I_r = \int \frac{dt}{(1+t^2)^r}.$$

Une intégration par parties donne

$$2nI_{n+1} = \frac{t}{(1+t^2)^n} + (2n-1)I_n$$

(2) Soit écrire $\lambda X + \mu = \alpha(X^2 + bX + c) + (\beta X + \gamma)(2X + b)$, et intégrer par parties pour la dernière, afin de se ramener au calcul de $\int \frac{\lambda'x + \mu'}{(x^2+bx+c)^{r-1}} dx$. Toujours commencer par les ordres les plus élevés si on veut utiliser cette méthode.

Exercice (Un calcul barbare d'intégrale)

Calcul de

$$\int_1^2 \frac{2x^8 + 5x^6 - 12x^5 + 30x^4 + 36x^2 + 24}{x^4(x^2 + 2)^3} dx$$

Réponse : La décomposition de la fraction rationnelle dans $\mathbb{R}(X)$ est :

$$\frac{3}{x^4} + \frac{2}{x^2 + 2} - \frac{6}{(x^2 + 2)^2} - \frac{12x - 16}{(x^2 + 2)^3}$$

Primitives

$$-\frac{1}{x^3} + \frac{2x + 3}{(x^2 + 2)^2} + \sqrt{2} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + C$$

On obtient donc pour valeur $\frac{37}{72} + 2\sqrt{2} \arctan \sqrt{2} - \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

9

4.2. PRIMITIVES DES FONCTIONS RATIONNELLES EN SINUS ET COSINUS

On peut se ramener au calcul de la primitive d'une fonction rationnelle. Ce sera aussi le cas dans la plupart des autres calculs de primitives. On mesure donc l'apport de la décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples à cette partie de l'analyse.

4.2.1. *Polynômes en sinus et cosinus.* Si nos fonctions sont polynomiales en sinus et cosinus, nous sommes ramenés au calcul des primitives de fonctions $\sin^m \cos^n$. Si m ou n est impair, on peut exploiter la relation $\cos^2 + \sin^2 = 1$ pour avoir à intégrer une fonction $\cos^k \sin$ ou $\sin^k \cos$, ce qui se fait sans problème.

Si m et n sont pairs, on peut toujours linéariser l'expression.

Exercice (Polynômes en sinus et cosinus)

Calculer

$$\int \sin^2 x \cos^3 x dx, \int \cos^2 x \sin^2 x dx$$

10

4.2.2. *Fonctions rationnelles en sinus et cosinus.* Si la fonction à intégrer est une fonction rationnelle f en sinus et cosinus (obtenue à partir des fonctions sinus et cosinus en utilisant les opérations algébriques), on peut :

- (1) Utiliser le changement de variable $u = \tan(t/2)$ (et donc $dt = \frac{2du}{u^2+1}$).
- (2) Utiliser les règles de Bioche (en principe hors-programme) :
 - (a) Si l'expression $f(\cos x, \sin x)dx$ est invariante par la transformation $x \mapsto -x$, on pose $u = \cos x$.
 - (b) Si l'expression $f(\cos x, \sin x)dx$ est invariante par la transformation $x \mapsto \pi - x$, on pose $u = \sin x$.
 - (c) Si l'expression $f(\cos x, \sin x)dx$ est invariante par $x \mapsto \pi + x$, on pose $u = \tan x$.
 - (d) Il se peut que l'emploi des règles de Bioche ne soit pas la meilleure méthode.

Pour les règles de Bioche, ne pas oublier le dx dans l'évaluation de la transformation.

Si aucune des règles de Bioche n'est applicable, on pose $u = \tan \frac{x}{2}$.

Si les trois règles de Bioche conviennent, on peut avantageusement faire le changement de variable $u = \cos 2x$.

Exercice (Primitives de fonctions rationnelles polynomiales)

1 Calcul de $\int \frac{\sin x dx}{\sin^3 x + \cos^3 x}$. **Réponse :** Poser $u = \tan x$. On obtient :

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{-1 + 2 \tan x}{\sqrt{3}} \right) + \frac{1}{6} \ln (\tan^2 x - \tan x + 1) - \frac{1}{3} \ln |1 + \tan x| + C$$

2 Calcul de $\int \frac{dx}{2 + \cos x}$. **Réponse :** Poser $u = \tan \frac{x}{2}$, et on trouve

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \tan \left(\frac{x}{2} \right) \right) + C$$

11

Dans le cas du changement de variable $u = \tan(x)$, il faut se placer sur un intervalle où la fonction tangente est définie, ce qui nécessite d'être soigneux dans certains cas, voir la question 6 de l'exercice 2.

4.3. PRIMITIVES DES FONCTIONS RATIONNELLES EN COSINUS ET SINUS HYPERBOLIQUES

L'étude est similaire à celle des fonctions rationnelles trigonométriques : pour les polynômes, l'étude est identique.

Si $F(\text{ch}, \text{sh})$ est une fonction rationnelle en ch et sh , on utilise les règles de Bioche dans le sens suivant : si l'étude de $F(\cos, \sin)$ conduit à un changement de variable, trigonométrique, alors on effectue le changement de variable hyperbolique correspondant pour trouver une primitive de $F(\text{ch}, \text{sh})$.

Si aucune des règles de Bioche n'est applicable, on peut effectuer le changement de variable $u = \tanh \frac{x}{2}$, mais aussi tout simplement $t = e^x$.

Exercice (Primitives de fonctions rationnelles hyperboliques)

1 Calcul de $\int \frac{dx}{\text{ch } x(1+\text{sh } x)}$. **Réponse :** $\frac{1}{2} \ln |1 + \text{sh } x| - \frac{1}{2} \ln(\text{ch } x) + \frac{1}{2} \arctan(\text{sh } x) + C$.

2 Calcul de $\int \frac{dx}{5 \text{ch } x + 3 \text{sh } x + 4}$. **Réponse :** $-\frac{1}{2(2e^x+1)} + C$.

12

4.4. COMPLÉMENTS

Proposition (Primitives d'une exponentielle-polynôme)

Si a est un complexe non nul et $P \in \mathbb{R}[X]$, alors la fonction $x \mapsto P(x)e^{ax}$ possède une primitive de la forme $x \mapsto Q(x)e^{ax}$, où $Q \in \mathbb{R}[X]$ est de même degré que P .

4.a

Démonstration

□

Soit $\alpha, \omega \in \mathbb{R}$, $P \in \mathbb{R}[X]$. Pour trouver une primitive de $\int P(x) \cos \omega x e^{\alpha x} dx$ (resp. $\int P(x) \sin \omega x e^{\alpha x} dx$), on prend la partie réelle (resp. la partie imaginaire) d'une primitive de $\int P(x) e^{(\alpha+i\omega)x} dx$.

Soit $F(X, Y)$ une fraction rationnelle.

Pour calculer une primitive d'une fonction du type $x \mapsto F(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})$, on pose le changement de variable $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, ce qui nous ramène au calcul d'une primitive d'une fonction rationnelle en t .

Exercice (Primitives avec des racines)

Calcul de

$$\int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt[4]{x+1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt[4]{x+1}} dx$$

Réponse : $x + 1 - \frac{8}{3}(x+1)^{\frac{3}{4}} + 4(x+1)^{\frac{1}{2}} - 8(x+1)^{\frac{1}{4}} + 8 \ln \left((x+1)^{\frac{1}{4}} + 1 \right) + C$.

13

5. FORMULES DE TAYLOR

Dans cette section, on expose les différentes formules de Taylor, qui vont justifier l'existence et permettre de calculer les développements limités de fonctions suffisamment régulières.

On fixe deux réels distincts a et b , sans imposer $a < b$ ni $b < a$. Le segment d'extrémités a et b sera noté $|a, b|$:

$$|a, b| = \{x, \exists \lambda \in [0, 1], x = \lambda a + (1 - \lambda)b\}.$$

5.1. FORMULE DE TAYLOR AVEC RESTE INTÉGRAL

Théorème (Formule de Taylor avec reste intégral)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f : |a, b| \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^{n+1} sur $|a, b|$. On a alors :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

5.a

Définition (Formule de Taylor avec reste intégral)

Cette formule est appelée *formule de Taylor avec reste intégral* à l'ordre n de f , en a , appliquée en b .

5.a

Démonstration

Par récurrence sur n , en effectuant une intégration par parties du reste intégral :

□

Cette formule est difficile à retenir, surtout le terme intégral. Pour ne pas se tromper, on pensera à la vérifier pour $n = 0$. Se rappeler que la puissance n -ième est associée à $n!$. On peut également penser à l'appliquer à $x \mapsto \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$.

Ne pas oublier non plus l'hypothèse f de classe \mathcal{C}^{n+1} qui est naturelle, puisqu'on intègre la fonction $x \mapsto \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)$.

De ce théorème découlent toutes les autres formules de Taylor : il est donc à la fois le plus précis et le plus puissant. Comme il s'agit d'une égalité, il n'y a aucune approximation, et donc aucune perte d'information.

Exemple (Formule de Taylor avec reste intégral)

(1) Cas de la fonction exponentielle. Pour tout réel x :

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt.$$

(2) Cas de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$. Pour tout $x \in]-1, +\infty[$:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + (-1)^n \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt.$$

i

5.2. INÉGALITÉ DE TAYLOR-LAGRANGE

En corollaire immédiat de l'égalité de Taylor avec reste intégral, on obtient la puissante inégalité de Taylor-Lagrange :

Théorème (Inégalité de Taylor-Lagrange)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : |a, b| \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^{n+1} sur $|a, b|$. On a alors :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{|a,b|} |f^{(n+1)}|$$

5.b

Démonstration

□

En particulier, lorsque f est de classe \mathcal{C}^{n+1} sur I et que $a \in I$, on peut écrire

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + O_{x \rightarrow a}((x-a)^{n+1})$$

et *a fortiori*

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o_{x \rightarrow a}((x-a)^n).$$

Exemple (Inégalité de Taylor-Lagrange)

(1) Cas de la fonction exponentielle. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^x.$$

En particulier, pour $x = 1$, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_-$, on a :

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

(2) Cas de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\left| \ln(1+x) - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} \right| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

En particulier, pour $x = 1$, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2).$$

Pour tout $x \in]-1, 0]$, on a :

$$\left| \ln(1+x) - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1+x)^{n+1}}.$$

ii

Exercice (Inégalité de Taylor-Lagrange)

1 Montrer que pour tout réel x ,

$$x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24} \leq \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$$

et que

$$x - \frac{x^3}{6} - \frac{|x|^5}{5!} \leq \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{|x|^5}{5!}.$$

2 Quelle inégalité préférez-vous ? (on pourra tracer des graphes pour comparer les encadrements)

3 Trouver une approximation rationnelle de $\sin(1)$ à 10^{-2} près, puis à 10^{-5} près.

14

5.3. FORMULE DE TAYLOR-YOUNG

Théorème (Formule de Taylor-Young)

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^n sur un intervalle I . Pour tout $a \in I$, on peut écrire :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o_{x \rightarrow a}((x-a)^n).$$

5.c

Démonstration

Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction auxiliaire

$$g : x \mapsto f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$$

de classe \mathcal{C}^n sur I , et dont les dérivées en a , jusqu'à l'ordre n compris, sont nulles.

□

La formule de Taylor-Young est bien une conséquence de l'inégalité de Taylor-Lagrange, mais pas aussi facilement qu'on pourrait le croire, car f n'est supposée que de classe \mathcal{C}^n .

Exemple (Formule de Taylor-Young)

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4).$$

iii

6. FEUILLE DE TD 21 : PRIMITIVES ET FORMULES DE TAYLOR

Exercice 1 (Fractions rationnelles)

0

Calculer

1 $\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 1}$.

2 $\int \frac{dx}{(x^4 - 1)}$.

3 $\int \frac{dx}{x(x^2 + 1)^2}$.

4 $\int_0^1 \frac{dx}{1 + ix}$.

5 $\int \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^2}$.

6 (X MP 08) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - x^2}{1 - x^2 + x^4} dx$.

7 (X MP 08) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}$ ($a, b \in \mathbb{R}_+^*$).

Exercice 2 (Fonctions trigonométriques circulaires)

0

Calculer

1 $\int_0^{2\pi} \sin px \sin qx dx$, $\int_0^{2\pi} \sin px \cos qx dx$, $\int_0^{2\pi} \cos px \cos qx dx$, où $(p, q) \in \mathbb{N}^2$

2 $\int \cos^2 x \sin^2 x dx$.

3 $\int \cos^2 x \sin^3 x dx$.

4 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin^3 x} dx$.

5 $\int_{\sqrt{2}}^{\pi + \sqrt{2}} \frac{(\cos(2t))^3}{2 + \sin^2 t \cos^2 t} dt$.

6 $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + 3 \sin^2 x}$.

7 $\int \frac{\sin(x) dx}{\sin^3(x) + \cos^3(x)}$.

8 $\int \frac{dx}{2 + \cos x}$.

9 $\int \frac{\sin(2x)}{1 + \cos^2(x)} dx$.

Exercice 3 (Fonctions trigonométriques hyperboliques)

0

Calculer

1 $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x (1 + \operatorname{sh} x)}$.

2 $\int \frac{dx}{5 \operatorname{ch} x + 3 \operatorname{sh} x + 4}$.

Exercice 4 (Racines)

0

Calculer

1 $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x+1} dx.$

2 $\int \frac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}}.$

3 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}.$

4 (X MP 08) $\int_a^b \sqrt{(b-x)(x-a)} dx.$

5 (X MP 08) $\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\sin t} dt.$

6 $\int_2^3 \frac{dx}{x+\sqrt{x-1}}.$

7 $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[4]{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x+1}} dx.$

Exercice 5 (Primitives diverses)

0

Trouver les primitives de f , où f est successivement donnée par

1 $x \mapsto x \arctan(x)^2.$

2 $x \mapsto \frac{1}{x+x \ln(x)^2}.$

3 $x \mapsto \frac{1}{x} \ln(\ln(x)).$

4 $x \mapsto \arctan \sqrt{1-x^2}.$

Exercice 6 (Calcul d'une intégrale)

2

Calculer $\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan(t)) dt.$

Exercice 7 (Méthode de calcul pour une intégrale (Centrale MP 09))

2

Donner une méthode pour calculer $\int_0^1 \frac{t^p}{(1+t^2)^q} dt$, lorsque $(p, q) \in \mathbb{N}^2$.

Exercice 8 (Une astuce de calcul intégral (Mines PSI 08))

2

Soit f continue sur $[a, b]$ telle que : $\forall x \in [a, b], f(a+b-x) = f(x)$.

1 Montrer que $\int_a^b x f(x) dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx.$

2 Calculer $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x e^{ix}}{1+\cos^2 x} dx.$

Exercice 9 (La même astuce de calcul intégral (Centrale MP 09))

2

1 Soit $f \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$. Montrer : $\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx.$

2 Calculer $\int_0^{\pi} \frac{x \sin^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x} dx.$

Exercice 10 (Fonction nulle sur un voisinage de $+\infty$)

2

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^∞ telle que $f(0) = 1$, et $\forall x \geq \frac{1}{2}, f(x) = 0$.

1 Montrer que $\sup_{\mathbb{R}^+} |f^{(n)}| \geq 2^n n!$.

2 Montrer que pour $n \geq 1$, $\sup_{\mathbb{R}^+} |f^{(n)}| > 2^n n!$

Exercice 11 (Fonction dont les dérivées sont nulles en 0)

2

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^∞ telle que :

(1) $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = 0$.

(2) $\exists \lambda > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \sup_{\mathbb{R}} |f^{(n)}| \leq \lambda^n n!$.

1 Montrer que f est nulle sur l'intervalle $] -\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}[$, puis sur \mathbb{R} .

2 Montrer que la première condition n'est pas suffisante pour que f soit nulle.

Déterminant

Sommaire

1. Groupe symétrique	497
1.1. Définitions	497
1.2. Parties génératrices de \mathcal{S}_n	499
1.3. Signature, groupe alterné	501
2. Applications multilinéaires	502
2.1. Définitions	503
2.2. Applications multilinéaires alternées	504
3. Déterminant de n vecteurs dans une base	506
3.1. Formes n -linéaires alternées sur E	506
3.2. Définitions et propriétés du déterminant de n vecteurs	507
4. Déterminant d'un endomorphisme	508
5. Déterminant d'une matrice carrée	510
6. Calcul et utilité d'un déterminant	512
6.1. Propriétés calculatoires d'un déterminant	512
6.2. Cofacteurs, comatrice	512
6.3. Aspect polynomial du déterminant	514
7. Applications de la notion de déterminant	514
7.1. Inverse d'une matrice	514
7.2. Formules de Cramer	515
7.3. Orientation	516
7.4. Calcul du rang d'une matrice (hors-programme)	516
8. Feuille de TD 22 : Déterminant	517
8.1. Calculs de déterminants	517
8.2. Propriétés du déterminant	519
8.3. Utilisation du déterminant	520

Étant donné une application f de E dans F , $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n) \in E^n$, nous noterons $\tilde{f}(\mathcal{B})$ la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ de vecteurs de F .

1. GROUPE SYMÉTRIQUE

1.1. DÉFINITIONS

Soit E un ensemble non vide. On appelle *permutation* de E une application bijective de E sur lui-même. On note \mathcal{S}_E (ou $\mathcal{S}(E)$, \mathfrak{S}_E) l'ensemble des permutations de E . Cet ensemble est muni d'une structure de groupe pour la composition. Si E est fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$, alors \mathcal{S}_E est fini de cardinal $n!$. On rappelle que le cardinal d'un groupe est également appelé son ordre.

Définition (Groupe symétrique d'indice n)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit le *groupe symétrique* \mathcal{S}_n (ou \mathfrak{S}_n) comme le groupe des permutations de $[[1, n]]$, muni de la composition.

1.a

Un élément σ de \mathcal{S}_n ($n \in \mathbb{N}^*$) peut être représenté sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Par exemple, l'élément neutre $e(= \text{Id}_{[[1,n]]})$ de \mathcal{S}_n est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix},$$

et

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \mathcal{S}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

On a $\mathcal{S}_3 = :$

Le groupe \mathcal{S}_n est d'ordre $n!$, non commutatif dès que $n \geq 3$:

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. L'ensemble

$$\{\sigma \in \mathcal{S}_n, \sigma(n) = n\}$$

est un sous-groupe de \mathcal{S}_n , canoniquement isomorphe à \mathcal{S}_{n-1} .

Proposition (Ordre d'une permutation)

Pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$, il existe un plus petit entier naturel non nul p tel que $\sigma^p = e$.

1.a

Démonstration

L'ensemble

$$\Omega = \{\sigma^k, k \in \mathbb{N}\}$$

étant fini, l'application $k \in \mathbb{N} \mapsto \sigma^k$ n'est pas injective, et il existe donc deux entiers naturels i et j , $i < j$, tels que $\sigma^i = \sigma^j$. Ainsi, $\sigma^{j-i} = e$. Il s'ensuit que l'ensemble $\{k \in \mathbb{N}^*, \sigma^k = e\}$ est une partie non vide de \mathbb{N} , et admet donc un plus petit élément p .

□

Définition (Ordre d'une permutation)

Dans le contexte de la proposition précédente, p est appelé l'ordre de σ .

1.b

Exemple (Ordre d'une permutation)

Le seul élément d'ordre 1 de \mathcal{S}_n est son élément neutre. Les permutations $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ sont des éléments d'ordre 2 de \mathcal{S}_4 .

i

Définition (Cycle, transposition)

Soit $n \geq 2$, $p \in \llbracket 2, n \rrbracket$. Un élément de \mathcal{S}_n est appelé *cycle* de longueur p (ou p -*cycle*) s'il existe p éléments distincts i_1, \dots, i_p de $\llbracket 1, n \rrbracket$ tels que :

(1) $\sigma(i_1) = i_2, \sigma(i_2) = i_3, \dots, \sigma(i_{p-1}) = i_p, \sigma(i_p) = i_1$.

(2) Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i_1, \dots, i_p\}$, $\sigma(j) = j$.

On appelle *support* du p -cycle σ l'ensemble $\{i_1, \dots, i_p\}$.

σ peut être noté $(i_1 \ i_2 \ \dots \ i_p)$.

Un 2-cycle est aussi appelé *transposition*.

Le cycle $(1 \ 2 \ \dots \ n)$ est appelé *permutation circulaire*.

1.c

Toute transposition est d'ordre 2, mais un exemple précédent nous montre que la réciproque est fautive. Deux cycles de supports disjoints commutent.

Un même cycle peut posséder plusieurs « écritures ». Par exemple, $(1 \ 2 \ 3) = (3 \ 1 \ 2)$.

Un p -cycle est d'ordre p .

Exemple (Cycles)

(1) L'exemple de

$$(1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6)^2 = (1 \ 3 \ 5)(2 \ 4 \ 6)$$

montre qu'une puissance d'un cycle n'est pas toujours un cycle.

(2) Soit $n \geq 3$ et $j, k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $j \neq k$. On a $(1 \ j)(1 \ k)(1 \ j) = (j \ k)$.

(3) L'inverse du p -cycle $\sigma = (i_1 \ i_2 \ \dots \ i_p)$ est $(i_p \ i_{p-1} \ \dots \ i_1)$ (c'est aussi σ^{p-1}).

ii

\mathcal{S}_n possède $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ transpositions.

1.2. PARTIES GÉNÉRATRICES DE \mathcal{S}_n

Définition (Orbite d'un élément sous-l'action d'une permutation)

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, et $\sigma \in \mathcal{S}_n$. On appelle *orbite* de i pour σ (ou sous l'action de σ) l'ensemble

$$\Omega_i = \{\sigma^k(i), k \in \mathbb{N}\}$$

Une orbite est dite *triviale* si c'est un singleton.

1.d

Exercice (Cardinal d'une orbite)

Montrer que

$$\text{Card}(\Omega_i) = \min\{p \in \mathbb{N}^*, \sigma^p(i) = i\},$$

et que $\text{Card}(\Omega_i)$ divise l'ordre de σ .

1

On a

$$\Omega_i = \{\sigma^k(i), k \in \mathbb{N}^*\} = \{\sigma^k(i), k \in \mathbb{Z}\}$$

mais aussi, si $\sigma^p(i) = i$:

$$\Omega_i = \{\sigma^k(i), k \in \llbracket 1, p \rrbracket\} = \{\sigma^k(i), k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket\}$$

Un élément σ de \mathcal{S}_n est un cycle si et seulement si toutes les orbites de σ , sauf une, sont triviales.

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$, et $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. La relation « appartenir à l'orbite de » ($i\mathcal{R}j$ équivaut à $i \in \Omega_j$) est une relation d'équivalence. En particulier, $\llbracket 1, n \rrbracket$ est union disjointe des orbites distinctes sous l'action de σ .

Proposition (Décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints)

Soit $n \geq 2$. Tout élément non trivial de \mathcal{S}_n peut s'écrire comme produit de cycles à supports disjoints. De plus, cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

1.b

Démonstration

Unicité : les cycles intervenant dans une telle décomposition (de $\sigma \in \mathcal{S}_n \setminus \{e\}$) doivent avoir pour supports les différentes orbites non triviales de σ , et pour une telle orbite, l'action du cycle correspondant s doit coïncider avec celle de σ , ce qui détermine s . □

Démonstration

Existence : soit σ un élément non trivial de \mathcal{S}_n , et $\Omega_{j_1}, \dots, \Omega_{j_l}$ les différentes orbites non triviales de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sous l'action de σ . Pour tout $k \in \llbracket 1, l \rrbracket$, on note p_k le cardinal de l'orbite Ω_{j_k} , de sorte que

$$\Omega_{j_k} = \{j_k, \sigma(j_k), \dots, \sigma^{p_k-1}(j_k)\}.$$

On note $\sigma_k = \begin{pmatrix} j_k & \sigma(j_k) & \dots & \sigma^{p_k-1}(j_k) \\ \sigma(j_k) & \sigma^2(j_k) & \dots & \sigma^{p_k}(j_k) \end{pmatrix}$. Les permutations σ et σ_k coïncident sur Ω_{j_k} . On sait par ailleurs que les cycles $\sigma_1, \dots, \sigma_l$ commutent deux à deux. Vérifions que $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_l$.

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Cet entier appartient à au plus une des orbites $\Omega_{j_1}, \dots, \Omega_{j_l}$:

- S'il n'appartient à aucune d'entre elles, il est laissé fixe par σ , ainsi que par $\sigma_1, \dots, \sigma_l$, de sorte que $\sigma(i) = (\sigma_1 \dots \sigma_l)(i)$.
- S'il appartient à l'une d'entre elles, mettons $\Omega_{j_{k_0}}$, alors, il est laissé invariant par tout σ_j tel que $j \neq k_0$, de sorte que $(\sigma_1 \dots \sigma_l)(i) = \sigma_{j_{k_0}}(i) = \sigma(i)$. □

Exercice (Décomposition d'une permutation)

Décomposer $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 1 & 8 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

2

Quel est l'intérêt d'une telle décomposition ?

- (1) Comparaison de permutations : grâce à l'unicité, deux permutations sont égales si et seulement si on a trouvé les mêmes décompositions.
- (2) Vérification d'une propriété sur \mathcal{S}_n : si on veut vérifier une propriété¹ sur \mathcal{S}_n , il suffit de vérifier qu'elle est vraie pour tous les cycles, et qu'elle est stable par produit.
- (3) Puissances d'une permutation : muni d'une telle décomposition, il est aisé de calculer toute puissance d'une permutation (car les cycles intervenant dans cette décomposition commutent deux à deux). Ainsi, dans l'exercice ci-dessus,

$$\sigma^{17} =$$

1. On peut comparer cela au principe de récurrence : pour vérifier une propriété sur \mathbb{N} , il suffit de la vérifier au rang 0 et d'établir qu'elle est par passage au successeur. On a aussi utilisé ce genre d'arguments en algèbre linéaire.

Proposition (Génération du groupe symétrique par les transpositions)

Soit $n \geq 2$. Tout élément de \mathcal{S}_n peut s'écrire comme produit de transpositions.

1.c

Démonstration

D'après la proposition précédente, il suffit de le prouver pour tout cycle. On note que :

$$(i_1 \dots i_p) = (i_1 i_2)(i_2 i_3) \dots (i_{p-1} i_p).$$

□

Cette décomposition n'est pas unique en général, voir l'exemple 2 page 499. De plus, d'après cet exemple, les transpositions $(1 j)$ engendrent \mathcal{S}_n .

1.3. SIGNATURE, GROUPE ALTERNÉ

Définition (Signature d'une permutation)

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. On appelle *signature* de σ le nombre noté $\varepsilon(\sigma)$, défini par

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{n-t},$$

où t est le nombre d'orbites de σ .

On dit que σ est de signature *paire* (resp. *impaire*) si $\varepsilon(\sigma) = 1$ (resp. $\varepsilon(\sigma) = -1$).

1.e

Exemple (Signature d'une permutation)

- (1) $\varepsilon(\text{Id}_{[1,n]}) = 1$.
- (2) Une transposition est de signature -1 .
- (3) Un 3-cycle est de signature 1 .
- (4) Plus généralement, pour tout p -cycle σ , on a $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{p+1}$.
- (5) $(1 2)(3 4)$ élément de \mathcal{S}_4 est de signature 1 .

iii

Lemme sur la signature

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$, et τ une transposition de \mathcal{S}_n . Alors

$$\varepsilon(\sigma \circ \tau) = -\varepsilon(\sigma)$$

1.d

Démonstration

Écrivons $\tau = (i j)$ ($i \neq j$). Soit Ω une orbite sous l'action de σ . On vérifie que

- si Ω ne comprend ni i ni j , alors Ω est aussi une orbite sous l'action de $\sigma \circ \tau$.
- si Ω comprend i et j , alors les orbites de i et j sous l'action de $\sigma \circ \tau$ sont disjointes, d'union Ω .
- si Ω comprend i mais pas j , et si on note Ω' l'orbite de j sous l'action de σ , alors l'orbite de i et de j sous l'action de $\sigma \circ \tau$ est $\Omega \cup \Omega'$.

Ainsi, les nombres d'orbites sous les actions respectives de σ et $\sigma \circ \tau$ n'ont pas même parité, d'où le résultat.

□

Ce lemme permet de prouver la :

Proposition (La signature est un morphisme)

L'application $\varepsilon : (\mathcal{S}_n, \circ) \rightarrow (\{-1, 1\}, \times)$ est un morphisme de groupes multiplicatifs.

1.e

Démonstration

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Le lemme précédent montre que si l'on décompose σ en produit de k transpositions, $\varepsilon(\sigma) = (-1)^k$. Ainsi, si $\sigma' \in \mathcal{S}_n$ se décompose en produit de k' transpositions, on a :

$$\varepsilon(\sigma\sigma') = (-1)^{k+k'} = (-1)^k(-1)^{k'} = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma'),$$

d'où le résultat. \square

Cela prouve en particulier que si $\sigma \in \mathcal{S}_n$ se décompose en produit de p transpositions (resp. de q transpositions), alors p et q ont même parité.

Définition (Groupe alterné d'indice n)

On définit le *groupe alterné* d'indice n , noté \mathcal{A}_n (ou \mathfrak{A}_n), comme le noyau du morphisme de groupes $\varepsilon : \mathcal{S}_n \rightarrow \{-1, 1\}$ (i.e. l'ensemble des permutations de \mathcal{S}_n de signature paire).

1.f

Exercice (Cardinal du groupe symétrique alterné d'indice n)

On suppose $n \geq 2$. Montrer que \mathcal{A}_n est d'ordre $n!/2$.

3

Exercice (Autre point de vue sur la signature)

(Exercice facultatif, peu utile dans la suite)

Étant donné $\sigma \in \mathcal{S}_n$, $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, où $i < j$, on dit que σ inverse i et j si $\sigma(j) < \sigma(i)$.

1 Montrer que $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\text{inv}(\sigma)}$, où $\text{inv}(\sigma)$ désigne le nombre d'inversions d'inversions sous l'action de σ , i.e. le nombre de couples $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, où $i < j$, tels que σ inverse i et j , soit encore

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}.$$

2 En utilisant la question précédente, montrer à nouveau que ε est un morphisme de groupes.

4

2. APPLICATIONS MULTILINÉAIRES

Dans toute la suite du chapitre, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} , n est un entier naturel non nul, et E et F sont deux \mathbb{K} -espaces vectoriels.

2.1. DÉFINITIONS

Définition (Application multilinéaire)

Soit f une application de E^n dans F . On dit que f est linéaire en sa i -ème variable (où $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$) si, pour tout choix de vecteurs $u_j, j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}$, l'application $u \mapsto f(u_1, \dots, u_{i-1}, u, u_{i+1}, \dots, u_n)$ (de E dans F) est linéaire.

On dit que f est n -linéaire (ou multilinéaire) si elle est linéaire en chacune de ses n variables.

On note $\mathcal{L}_n(E, F)$ l'ensemble des applications n -linéaires de E^n vers F

Si $n = 2$ (resp. $n = 3$), et si $f \in \mathcal{L}_n(E, F)$, alors on dit que f est bilinéaire (resp. trilinéaire).

On dit que f est une forme multilinéaire (ou n -linéaire) sur E si $f \in \mathcal{L}_n(E, \mathbb{K})$.

2.a

Attention ! Il ne faut pas confondre $\mathcal{L}_n(E, F)$ et $\mathcal{L}(E^n, F)$. On a par exemple (avec des notations évidentes)

$$f(\lambda u_1, \dots, \lambda u_n) = \lambda f(u_1, \dots, u_n) \text{ si } f \text{ est linéaire,}$$

mais

$$f(\lambda u_1, \dots, \lambda u_n) = \lambda^n f(u_1, \dots, u_n) \text{ si } f \text{ est } n\text{-linéaire.}$$

De même, on a :

(1) $f(u + u', v + v') = f(u, v) + f(u', v')$ si f est linéaire.

(2) $f(u + u', v + v') = f(u, v) + f(u, v') + f(u', v) + f(u', v')$ si f est bilinéaire.

$\mathcal{L}_n(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de F^{E^n} .

Exemple (Applications multilinéaires)

Exemples d'applications bilinéaires :

- (1) La multiplication de \mathbb{K}^2 dans \mathbb{K} .
- (2) Le produit scalaire sur \mathbb{R}^2 (ou \mathbb{R}^3).
- (3) Le produit vectoriel dans \mathbb{R}^3 .
- (4) Le déterminant dans \mathbb{R}^2 .
- (5) $(f, g) \mapsto \int_0^1 fg$ dans $\mathcal{C}([0, 1])$.
- (6) $(f, g) \mapsto (fg)'$ de $(\mathcal{C}^1(\mathbb{R}))^2$ dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.
- (7) Exemple d'application trilinéaire : le produit mixte (ou déterminant) dans \mathbb{R}^3 .

i

Exercice (Exemples d'applications multilinéaires)

Construire des applications n -linéaires par composition à partir d'applications n -linéaires et d'applications linéaires.

5

Proposition (Expression d'une application n -linéaire dans une base)

On suppose E de dimension finie $p \geq 1$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E . On considère n vecteurs $u_j = \sum_{i=1}^p a_{i,j} e_i$ (exprimés dans \mathcal{B}) de E , et $\varphi \in \mathcal{L}_n(E, F)$. On a alors

$$\varphi(u_1, \dots, u_n) = \sum_{1 \leq i_1 \leq p, \dots, 1 \leq i_n \leq p} a_{i_1,1} \dots a_{i_n,n} \varphi(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})$$

2.a

Démonstration

Récurrence sur n . □

En reprenant le contexte de cette proposition :

(1) Réciproquement, une expression de la forme

$$\sum_{1 \leq i_1 \leq p, \dots, 1 \leq i_n \leq p} \lambda_{i_1, \dots, i_n} a_{i_1, 1} \cdots a_{i_n, n},$$

où les λ sont des scalaires, définit une application n -linéaire.

(2) Pour vérifier² que deux applications n -linéaires sont égales, il suffit de vérifier qu'elles coïncident en chaque $(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})$, $(i_1, \dots, i_n) \in \llbracket 1, p \rrbracket^n$.

2.2. APPLICATIONS MULTILINÉAIRES ALTERNÉES

Définition (Application n -linéaire symétrique, antisymétrique, alternée)

Soit $\varphi : E^n \rightarrow F$.

(1) φ est dite *symétrique* si, pour toute transposition τ de $\llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad \forall (u_1, \dots, u_n) \in E^n, \\ \varphi(u_{\tau(1)}, \dots, u_{\tau(n)}) = \varphi(u_1, \dots, u_n).$$

(2) φ est dite *antisymétrique* si, pour toute transposition τ de $\llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad \forall (u_1, \dots, u_n) \in E^n, \\ \varphi(u_{\tau(1)}, \dots, u_{\tau(n)}) = -\varphi(u_1, \dots, u_n).$$

(3) φ est dite *alternée* si

$$\forall (u_1, \dots, u_n) \in E^n, (\exists (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j \wedge u_i = u_j) \Rightarrow (\varphi(u_1, \dots, u_n) = 0_F)$$

L'ensemble des applications n -linéaires alternées de E^n dans F est noté $A_n(E, F)$.

2.b

φ est alternée si et seulement si

$$\forall (u_1, \dots, u_n) \in E^n, (\text{Card}(\{u_1, \dots, u_n\}) < n) \Rightarrow (\varphi(u_1, \dots, u_n) = 0_F)$$

Proposition (Équivalence entre antisymétrie et caractère alterné)

$\varphi \in \mathcal{L}_n(E, F)$ est antisymétrique si et seulement si elle est alternée.

2.b

Démonstration

□

2. C'est une bonne approche pour montrer la formule du double produit vectoriel par exemple

Proposition (Formule pour les applications n -linéaires alternées)

Soit $f \in A_n(E, F)$, et $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Pour tous vecteurs u_1, \dots, u_n de E , on a :

$$f(u_{\sigma(1)}, u_{\sigma(2)}, \dots, u_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma)f(u_1, \dots, u_n).$$

2.c

Démonstration

□

On a une formule plus simple (sans le « $\varepsilon(\sigma)$ ») analogue dans le cas d'une application multilinéaire symétrique.

Exemple (Applications n -linéaires alternées)

- (1) Le déterminant dans le plan est bilinéaire alterné.
- (2) Le produit vectoriel est bilinéaire alterné.
- (3) Le produit mixte (ou le déterminant) dans l'espace \mathbb{R}^3 est trilinéaire alterné.

ii

Une application n -linéaire à la fois symétrique et antisymétrique est nulle (si $n \geq 2$).
 $A_n(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}_n(E, F)$.

Proposition (Évaluation d'une application n -linéaire alternée sur une famille liée)

Soit φ une application n -linéaire alternée. Si (u_1, \dots, u_n) est une famille liée de vecteurs de E , alors

$$\varphi(u_1, \dots, u_n) = 0_F$$

2.d

Démonstration

□

En particulier, si $\dim E < n$, alors $A_n(E, F)$ est un singleton, constitué de l'application nulle $E^n \rightarrow F$.

Corollaire (Image d'une application n -linéaire alternée)

Soit φ une application n -linéaire alternée. Si (u_1, \dots, u_n) est une famille de vecteurs de E , et si on ajoute à u_j une combinaison linéaire des autres vecteurs de (u_1, \dots, u_n) pour obtenir un vecteur u'_j , alors

$$\varphi(u_1, \dots, u_n) = \varphi(u_1, \dots, u_{j-1}, u'_j, u_{j+1}, \dots, u_n)$$

(i.e. on ne modifie pas l'image de (u_1, \dots, u_n) en ajoutant à l'un des vecteurs u_j une combinaison linéaire des autres vecteurs de cette famille).

2.e

Proposition (Expression sommatoire pour une application n -linéaire alternée)

On suppose E de dimension n , et on se donne une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E . On considère n vecteurs $u_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i$ de E exprimés dans \mathcal{B} , et $\varphi \in A_n(E, F)$. On a :

$$\varphi(u_1, \dots, u_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} \varphi(e_1, \dots, e_n)$$

2.f

Démonstration

□

Exercice (Expression sommatoire en basse dimension)

Écrire en extension cette formule en dimensions 1, 2 puis 3.

6

3. DÉTERMINANT DE n VECTEURS DANS UNE BASE

E est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Nous allons dans un premier temps étudier les formes n -linéaires alternées sur E , et prouver que $\dim A_n(E, \mathbb{K}) = 1$, ce qui débouchera sur la définition du déterminant (d'une famille) de n vecteurs de E dans la base \mathcal{B} .

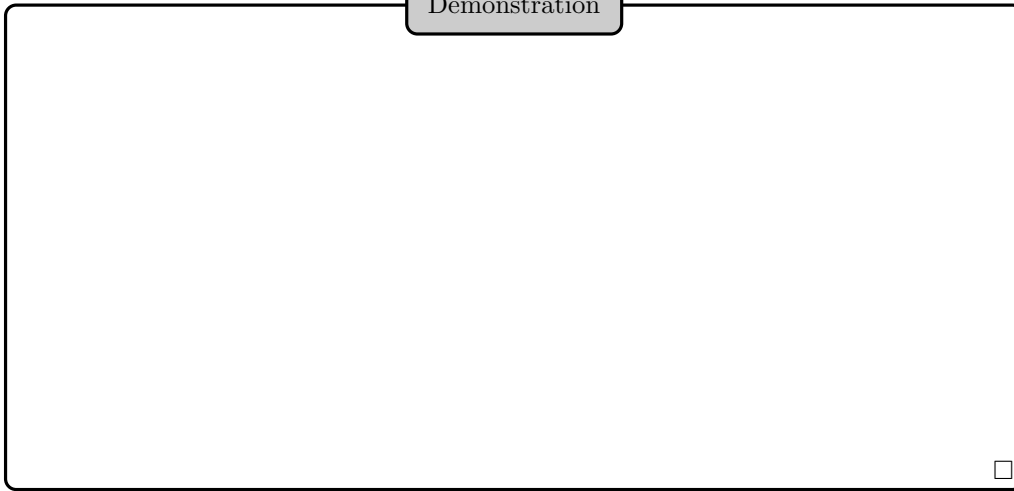
3.1. FORMES n -LINÉAIRES ALTERNÉES SUR E

Théorème fondamental pour le déterminant

L'espace vectoriel $A_n(E, \mathbb{K})$ est une droite vectorielle.

3.a

Démonstration



L'application

$$f \mapsto f(e_1, \dots, e_n)$$

est un isomorphisme de $A_n(E, \mathbb{K})$ sur \mathbb{K} .

3.2. DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS DU DÉTERMINANT DE n VECTEURS

Définition (Déterminant dans une base)

L'unique forme n -linéaire alternée φ sur E telle que

$$\varphi(e_1, \dots, e_n) = 1$$

est appelée application *déterminant dans la base \mathcal{B}* , et est notée $\det_{\mathcal{B}}$.

3.a

Pour tout élément φ de $A_n(E, F)$, on a

$$\varphi = \varphi(e_1, \dots, e_n) \det_{\mathcal{B}}$$

D'après ce qui précède, on a :

Proposition (Formule sommatoire du déterminant dans une base)

On considère n vecteurs $u_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i$ de E . On a :

$$\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n),n}$$

3.b

Attention! Contrairement au début d'année, on ne parle pas simplement de déterminant d'une famille de vecteurs, mais de déterminant d'une famille de vecteurs *dans une base*.

Cette formule est rarement employée pour calculer effectivement un déterminant. En revanche, on l'utilise souvent dans les exercices théoriques permettant de montrer un résultat général.

Proposition (Lien entre les déterminants dans deux bases)

Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ une base de E . Pour tous vecteurs u_1, \dots, u_n de E , on a :

$$\det_{\mathcal{B}'}(u_1, \dots, u_n) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n).$$

3.c

Démonstration

□

Nous en déduisons une des premières propriétés vraiment utiles de la notion de déterminant :

Proposition (Caractérisation des bases par le déterminant)

La famille (e'_1, \dots, e'_n) de $\dim(E)$ vecteurs de E est une base de E si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(e'_1, \dots, e'_n) \neq 0$.

3.d

Démonstration

□

Exercice (Base grâce au déterminant)

Soit $(u_1, u_2, u_3) = ((1, 2, 3), (2, 1, -1), (0, 1, a))$, où a est un paramètre réel. Déterminer pour quelles valeurs de a (u_1, u_2, u_3) est une base de \mathbb{R}^3 .

7

4. DÉTERMINANT D'UN ENDOMORPHISME

E désigne un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Proposition (Définition du déterminant d'un endomorphisme)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Il existe un unique scalaire λ tel que, pour toute base \mathcal{B} de E , on ait, pour tout $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$:

$$\det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \dots, f(u_n)) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n).$$

4.a

Démonstration

Unicité : fixons une base \mathcal{B} de E . On doit avoir :

$$\det_{\mathcal{B}}(\tilde{f}(\mathcal{B})) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B})) = \lambda$$

L'unique valeur possible pour λ est donc $\det_{\mathcal{B}}(\tilde{f}(\mathcal{B}))$.

□

Démonstration

Existence :

(1) Fixons une base \mathcal{B} de E . L'application

$$\det_{\mathcal{B}}(f(\cdot)) : \begin{array}{ccc} E^n & \rightarrow & \mathbb{K} \\ (u_1, \dots, u_n) & \mapsto & \det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \dots, f(u_n)) \end{array}$$

est une forme n -linéaire alternée sur E . La droite vectorielle $A_n(E, \mathbb{K})$ étant dirigée par $\det_{\mathcal{B}}$, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\det_{\mathcal{B}}(f(\cdot)) = \lambda \det_{\mathcal{B}}$. Ceci prouve l'existence de λ , pour une base donnée. Il reste à vérifier que ce scalaire ne dépend pas de cette base.

(2) Soit \mathcal{B}' une base de E . On sait qu'il existe un scalaire μ tel que

$$\det_{\mathcal{B}'} = \mu \det_{\mathcal{B}}$$

(on sait même que $\mu = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$). On a alors $\det_{\mathcal{B}'}(f(\cdot)) = \mu \det_{\mathcal{B}}(f(\cdot))$. L'égalité $\det_{\mathcal{B}}(f(\cdot)) = \lambda \det_{\mathcal{B}}$, multipliée par μ , montre que :

$$\det_{\mathcal{B}'}(f(\cdot)) = \lambda \det_{\mathcal{B}'}$$

L'assertion est prouvée. □

Définition (Déterminant d'un endomorphisme)

Soit f un endomorphisme de E , $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Le scalaire

$$\det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n)) \left(= \det_{\mathcal{B}}(\tilde{f}(\mathcal{B})) \right)$$

ne dépend pas de la base \mathcal{B} (mais seulement de f). On l'appelle *déterminant* de f et on le note $\det(f)$. 4.a

Attention ! Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$ (et non $\lambda \det(f)$, sauf cas particulier) et, en général, $\det(f + g) \neq \det(f) + \det(g)$

De plus, on ne parle pas du déterminant d'un endomorphisme *dans une base*, mais simplement du déterminant d'un endomorphisme.

Exemple (Déterminant d'un endomorphisme)

- (1) Le déterminant de l'endomorphisme nul de E est nul.
 - (2) Le déterminant de l'application identique de E vaut 1.
 - (3) $\det(\lambda \text{Id}_E) = \lambda^n$.
- i

Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$ et tous $u_1, \dots, u_n \in E$, on a :

$$\det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \dots, f(u_n)) = \det(f) \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n).$$

Proposition (Déterminant d'une composée)

Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$. On a :

$$\det(f \circ g) = \det(f) \det(g)$$
4.b

Démonstration

□

En particulier, $\det f \circ g = \det g \circ f$.

Proposition (Caractérisation des automorphismes par le déterminant)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. f est un automorphisme de E si et seulement si son déterminant est non nul. Dans ce dernier cas, on a :

$$\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det f}$$

4.c

Démonstration

□

Le déterminant définit donc un morphisme de $\text{GL}(E)$ vers \mathbb{K}^* .

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout entier naturel p , on a :

$$\det(f^p) = (\det f)^p$$

(par convention, $f^0 = \text{Id}_E$). Ce résultat s'étend à tout entier relatif dans le cas où f est un automorphisme.

5. DÉTERMINANT D'UNE MATRICE CARRÉE

Définition (Déterminant d'une matrice carrée)

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. On appelle *déterminant* de A , et on note $\det A$, le scalaire

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}.$$

Ce scalaire est noté

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

5.a

$\det(A)$ est donc le déterminant de la famille des vecteurs colonnes de A dans la base canonique, vus comme des vecteurs de \mathbb{K}^n . C'est également le déterminant de l'endomorphisme de \mathbb{K}^n , canoniquement associé à A , et même le déterminant de tout endomorphisme représenté par A dans une base donnée.

Exemple (Déterminant matriciels)

On a

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} =$$

et

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} =$$

i

Le travail précédent montre les propriétés suivantes :

(1) Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$. On a alors

$$\det(AB) = \det A \det B \quad \text{et} \quad \det(\lambda A) = \lambda^n \det(A).$$

Attention! En général, $\det(\lambda A) \neq \lambda \det(A)$, et $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$.

(2) Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$. On a alors

$$\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$$

(3) La formule $\det(A^k) = (\det A)^k$ est valable pour tout entier k pour lequel elle a un sens.

(4) Deux matrices semblables ont même déterminant.

(5) Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Soit (u_1, \dots, u_n) une famille de vecteurs de E , et A la matrice carrée de cette famille dans la base \mathcal{B} . On a alors

$$\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) = \det A$$

Cette famille est une base si et seulement si $\det A \neq 0$.

(6) On considère deux bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' de E . Soit $P = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$. On a :

$$\det_{\mathcal{B}} = \det P \det_{\mathcal{B}'}$$

Proposition (Invariance du déterminant par transposition)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a :

$$\det {}^t A = \det A$$

5.a

Démonstration

□

Exercice (Calculs de déterminants par l'expression sommatoire)

Faire la première question de l'exercice 2 de TD en utilisant l'expression sommatoire du déterminant.

8

6. CALCUL ET UTILITÉ D'UN DÉTERMINANT

6.1. PROPRIÉTÉS CALCULATOIRES D'UN DÉTERMINANT

Remarquons que nous retrouvons bien les définitions données en début d'année pour des tableaux 2×2 et 3×3 .

Pour calculer un déterminant, il est rare de recourir à l'expression sommatoire donnée plus haut.

Par abus de langage, on confond le déterminant (qui est un scalaire) avec le « tableau » dont on part. Ainsi, nous pourrions parler de colonnes et de lignes d'un déterminant.

- (1) Multiplier une colonne par un scalaire λ multiplie le déterminant par λ .
- (2) Multiplier tous les coefficients (*i.e.* chaque colonne) par λ multiplie le déterminant par λ^n .
- (3) Un déterminant dont une colonne est nulle est nul.
- (4) Permuter deux colonnes change le déterminant en son opposé. Plus généralement, appliquer une permutation de signature paire (resp. impaire) à l'ensemble des colonnes d'un déterminant le laisse inchangé (resp. le change en son opposé).
- (5) On ne modifie pas la valeur d'un déterminant en ajoutant à une de ses colonnes une combinaison linéaire des autres colonnes.
- (6) Un déterminant est nul si et seulement si ses vecteurs colonnes sont liés.

On a bien sûr des propriétés analogues sur les lignes d'un déterminant (puisque le déterminant d'une matrice est le déterminant de sa transposée). Ces propriétés sont, avec le développement d'un déterminant selon une ligne ou une colonne (voir plus loin), les plus utiles en pratique pour calculer un déterminant.

6.2. COFACTEURS, COMATRICE

Ici n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Définition (Mineur, cofacteur, comatrice)

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout couple d'indices $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on appelle *mineur* du coefficient de position (i, j) dans A (ou par abus mineur de $a_{i,j}$) et on note $\Delta_{i,j}$ le déterminant $\Delta_{i,j}$, d'ordre $n-1$, obtenu en supprimant dans A la i -ème ligne et la j -ième colonne (ligne et colonne où se trouve $a_{i,j}$).

Le scalaire $A_{i,j} = (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}$ est appelé *cofacteur* du coefficient $a_{i,j}$.

On appelle *comatrice* de A et on note $\text{com } A$ la matrice $(A_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

6.a

On parle aussi abusivement de cofacteur d'un déterminant.

Exercice (Comatrices)

Donner les comatrices des matrices carrées de taille 2, puis de taille 3.

9

Exercice (Comatrice de la transposée)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\text{com}({}^t A) = {}^t \text{com}(A)$.

10

Lemme premier pour le développement du déterminant selon une colonne

Le déterminant d'une matrice carrée $A = (a_{i,j})$ dont la dernière colonne est nulle sauf son dernier coefficient, qui vaut 1, est le mineur de ce coefficient.

6.a

Démonstration

On a

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n},$$

or $a_{\sigma(n),n} = 0$ si $\sigma(n) \neq n$ et $a_{n,n} = 1$. La somme est donc indiquée sur le sous-groupe G de \mathcal{S}_n laissant n invariant. On a un isomorphisme canonique entre \mathcal{S}_{n-1} et G , qui laisse la signature inchangée. Le résultat s'ensuit. □

Lemme second pour le développement du déterminant selon une colonne

Si la j -ième colonne de $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nulle, sauf son i -ème terme, qui vaut 1, alors

$$\det A = (-1)^{i+j} \Delta_{i,j} = A_{i,j}.$$

6.b

Démonstration

Si c'est le i -ème et non plus le dernier coefficient qui vaut 1 et les autres 0, alors on se ramène au cas précédent par action du cycle $(n \ n-1 \ \dots \ i+1 \ i)$ sur les lignes de A , cycle de signature $(-1)^{n-i+1-1}$. Si en outre c'est la j -ième colonne qui a tous ses coefficients nuls sauf 1, on effectue la permutation $(n \ n-1 \ \dots \ j+1 \ j)$ sur les colonnes de A , de signature $(-1)^{n-j+1-1}$. □

Proposition (Développement d'un déterminant par rapport à une ligne ou une colonne)

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On a, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j} = \sum_{i=1}^n a_{i,j} A_{i,j}$$

(développement de Δ par rapport à sa j -ème colonne)

On a aussi, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j} = \sum_{j=1}^n a_{i,j} A_{i,j}$$

(développement de Δ par rapport à sa i -ème ligne)

6.c

Démonstration

□

Une combinaison habile des propriétés calculatoires d'un déterminant et ces formules constituent très souvent la façon la plus simple de calculer un déterminant.

Exercice (Calculs de déterminants)

Faire les questions **3** et **4** de l'exercice 2 de TD.

11

6.3. ASPECT POLYNOMIAL DU DÉTERMINANT

D'après son expression sommatoire, on constate que l'application déterminant $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \det(A)$ est polynomiale en ses n^2 coefficients. Cet aspect polynomial permet de calculer certains déterminants, en estimant le degré du polynôme considéré, et en le connaissant en un nombre suffisant de points.

L'exemple typique sur le sujet est le très classique déterminant de Vandermonde :

Exercice (Déterminant de Vandermonde)

Faire l'exercice 3 de TD.

12

7. APPLICATIONS DE LA NOTION DE DÉTERMINANT

Nous avons déjà vu comment la notion de déterminant permettait facilement de tester si une famille est une base, ou si un endomorphisme est un automorphisme.

7.1. INVERSE D'UNE MATRICE

Proposition (Formule avec la comatrice)

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$A({}^t\text{com } A) = ({}^t\text{com } A)A = (\det A)I_n$$

En particulier, si A est inversible, alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}({}^t\text{com } A)$$

7.a

Démonstration

□

Il faut bien observer que la première formule est valable (et est utile) même si A n'est pas inversible.

Exemple (Inverse d'une matrice de taille 2 par la comatrice)

On ne se sert pas souvent de cette formule pour un calcul d'inverse, sauf dans le cas d'une matrice carrée de taille 2 : si $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible, alors son inverse est

$$\frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

i

Exercice (Inverse d'une matrice triangulaire par la comatrice)

Soit A une matrice triangulaire supérieure inversible. Montrer, avec la formule de la comatrice, que son inverse est triangulaire supérieure.

13

7.2. FORMULES DE CRAMER

On se donne un système carré \mathcal{S} (*i.e.* dont la matrice est carrée). On sait que le système est de Cramer si et seulement si le déterminant de sa matrice n'est pas nul.

Proposition (Formules de Cramer)

On se donne un système de Cramer \mathcal{S} , d'écriture matricielle $AX = B$. L'unique vecteur solution de \mathcal{S} est le n -uplet (x_1, \dots, x_n) tel que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad x_i = \frac{\det A_i}{\det A},$$

où A_i désigne la matrice obtenue à partir de A en remplaçant sa i -ème colonne par le vecteur colonne second membre B .

7.b

Démonstration

□

Comme pour la formule avec la comatrice, l'intérêt de cette formule est avant tout théorique

Le déterminant de la matrice est néanmoins utile pour vérifier/trouver les valeurs spéciales d'un paramètre, c'est-à-dire celles qui rendent le système non inversible.

Exemple (Formules de Cramer)

Le système

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases},$$

est de Cramer si et seulement si $ad - bc \neq 0$, et on a alors pour unique solution le couple (x_0, y_0) , où

$$x_0 = \frac{ed - bf}{ad - bc} \quad \text{et} \quad y_0 = \frac{af - ce}{ad - bc}.$$

ii

7.3. ORIENTATION

Grâce à la notion de déterminant, nous pouvons reprendre et étendre la notion d'orientation d'un espace vectoriel réel.

Considérons un \mathbb{R} -espace vectoriel E de dimension $n \geq 1$. On définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases de E en posant que \mathcal{B}' a même orientation que \mathcal{B} si

$$\det M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$$

(nous savons déjà que ce déterminant est non nul).

Si deux bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' n'ont pas la même orientation, alors toute base \mathcal{B}'' aura même orientation que \mathcal{B} ou que \mathcal{B}' : nous avons ainsi deux orientations possibles pour E .

Ainsi, le choix d'une base \mathcal{B} de E définit une orientation de E . Toutes les bases de même orientation que \mathcal{B} seront dites *directes*, les autres *indirectes*.

En général, nous orientons \mathbb{R}^n avec sa base canonique (c'est parfois implicite). Nous retrouvons les définitions de l'orientation du plan et de l'espace vues en début d'année.

Si (e_1, \dots, e_n) est directe et $\sigma \in \mathcal{S}_n$, alors $(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$ est directe (resp. indirecte) si σ est de signature paire (resp. impaire).

Interprétation du déterminant (plutôt de sa valeur absolue) comme aire/volume en dimensions 2 et 3.

7.4. CALCUL DU RANG D'UNE MATRICE (HORS-PROGRAMME)

Exercice (Rang d'une matrice par le déterminant)

Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in [1,n] \times [1,p]} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle matrice extraite de A toute matrice obtenue en supprimant des lignes ou colonnes de A .

Montrer que le rang de A est la plus grande taille d'une matrice inversible extraite de A .

14

Ainsi, le rang de A est la plus grande taille d'un « déterminant extrait » de A non nul.

8. FEUILLE DE TD 22 : DÉTERMINANT

n désigne un entier naturel non nul.

8.1. CALCULS DE DÉTERMINANTS

Exercice 1 (Nullité d'un déterminant)

0

Montrer sans calcul que pour tous réels a, b, c, d :

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Exercice 2 (Calculs divers de déterminants)

0

1 Montrer que le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux.

2 Calculer

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & 0 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 \end{vmatrix}.$$

3 Calculer

$$\begin{vmatrix} 1 & n & \dots & 2 \\ 2 & 1 & \vdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n-1 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

Réponse : $(-1)^{n-1} n^{n-2} \frac{n(n+1)}{2}$.

4 Calculer ($a, b, c \in \mathbb{R}$) :

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & (c+a)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

Réponse : $2abc(a+b+c)^3$.

5 (X MP 09, CCP PSI 09) Soit $\Phi : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto {}^t A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer $\det \Phi$.

6 (X PC 09) Soit $\Phi : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto A + 2{}^t A$. Déterminer la trace et le déterminant de Φ .

Exercice 3 (Déterminant de Vandermonde)

1

On considère un entier $n \geq 1$ et $n+1$ scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$. Calculer :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n & \dots & \alpha_{n+1}^n \end{vmatrix}.$$

Exercice 4 (Matrice compagnon)

1

On considère un entier $n \geq 2$ et n scalaires a_0, \dots, a_{n-1} . Calculer

$$\begin{vmatrix} -X & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & -X & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} - X \end{vmatrix}.$$

Exercice 5 (Calcul de déterminant par multilinéarité)

2

(Mines PSI) Soit $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ et $M = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$, où $m_{i,i} = a_i + b_i$ et $m_{i,j} = b_i$ si $i \neq j$. Calculer le déterminant de M .

Exercice 6 (Mines MP 08)

3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P_n = X^n - X + 1$.

1 Montrer que P_n admet n racines distinctes z_1, \dots, z_n dans \mathbb{C} .

2 Calculer le déterminant de $\begin{pmatrix} 1+z_1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+z_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1+z_n \end{pmatrix}$.

Exercice 7 (Un déterminant tridiagonal)

3

Soit a, b, c trois réels, et Δ_n le déterminant de taille n ($n \geq 2$) suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & & 0 \\ c & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ 0 & & c & a \end{vmatrix}$$

On pose $\Delta_0 = 1$, $\Delta_1 = a$.

1 Montrer que pour tout entier naturel n :

$$\Delta_{n+2} = a\Delta_{n+1} - bc\Delta_n.$$

2 En déduire une méthode de calcul de Δ_n pour tout entier naturel n .

3 Donner une formule explicite pour Δ_n dans le cas où $a^2 = 4bc$.

Exercice 8 (Calcul astucieux de déterminant)

3

(Centrale PC 09) Soit a, b, c trois réels, $b \neq c$. Calculer :

$$\begin{vmatrix} a & b & \dots & \dots & b \\ c & a & \ddots & \mathbf{b} & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \mathbf{c} & \ddots & \ddots & b \\ c & \dots & \dots & c & a \end{vmatrix}.$$

Exercice 9 (Mines MP 08)

4

On se donne m et n dans \mathbb{N}^* avec $m < n$, $P_1, \dots, P_n \in \mathbb{R}_m[X]$, a_1, \dots, a_n dans \mathbb{R} . Calculer le déterminant de la matrice $(P_i(a_j))_{1 \leq i, j \leq n}$.

8.2. PROPRIÉTÉS DU DÉTERMINANT

Exercice 10 (Déterminant par blocs)

2

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ ($p, q \geq 1$).

1 Calculer

$$\begin{vmatrix} A & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & B \end{vmatrix}.$$

2 Étendre ce résultat à $\begin{vmatrix} A & C \\ 0_{q,p} & B \end{vmatrix}$, où $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

Exercice 11 (Dérivation d'un déterminant)

2

1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}[X])$. Montrer que si $a_{i,j} = P_{i,j}(X) \in \mathbb{R}[X]$ (pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$), alors

$$(\det(A))' = \begin{vmatrix} P'_{1,1} & P_{1,2} & \dots & P_{1,n} \\ P'_{2,1} & P_{2,2} & \dots & P_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P'_{n,1} & P_{n,2} & \dots & P_{n,n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} P_{1,1} & P'_{1,2} & P_{1,3} & \dots & P_{1,n} \\ P_{2,1} & P'_{2,2} & P_{2,3} & \dots & P_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n,1} & P'_{n,2} & P_{n,3} & \dots & P_{n,n} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} P_{1,1} & \dots & P_{1,n-1} & P'_{1,n} \\ P_{2,1} & \dots & P_{2,n-1} & P'_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ P_{n,1} & \dots & P_{n,n-1} & P'_{n,n} \end{vmatrix}$$

2 Calculer, au moyen d'une récurrence, le déterminant suivant de taille n :

$$\begin{vmatrix} 1+X & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+X & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1+X \end{vmatrix}.$$

Exercice 12 (Perturbation matricielle sans effet sur le déterminant)

3

1 (X MP 09) Soit n un entier pair, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique, J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Montrer que, pour tout réel t , $\det(A + tJ) = \det(A)$.

2 (X PC 09) Déterminer les $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \det(A + M) = \det(A) + \det(M)$.

Exercice 13 (Déterminant d'un endomorphisme matriciel)

3

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. On considère l'endomorphisme u_A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ défini par $B \mapsto AB$. Préciser la matrice de u_A dans la base $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$, et vérifier que $\det(u_A) = (\det A)^2$.

Exercice 14 ((Ulm MP 08))

3

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$ et $\det(A + B) \geq 0$. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\det(A^p + B^p) \geq 0$.

Exercice 15 (X 07, Mines MP 08)

4

Soit A et H dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $\text{rg}(H) = 1$. Montrer : $\det(A + H) \det(A - H) \leq \det A^2$.

8.3. UTILISATION DU DÉTERMINANT

Exercice 16 (Racines carrées réelles de l'unité)

0

On suppose qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = -I_n$. Montrer que n est pair. Si n est pair, existe-t-il une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = -I_n$?

Exercice 17 (Matrice antisymétrique de taille impaire)

0

Montrer qu'une matrice antisymétrique de taille impaire ne peut pas être inversible.

Exercice 18 (Inversion matricielle par le déterminant)

0

En utilisant les déterminants, inverser la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 19 (Comatrice)

0

On considère trois réels a, b, c , et

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix}$$

Calculer le déterminant et la comatrice de A . Quand A est inversible, préciser A^{-1} .

Exercice 20 (Rang et déterminant de la comatrice)

1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, où $n \geq 2$. Calculer $\text{rg}(\text{com } A)$ et $\det(\text{com } A)$.

Indication : discuter selon le rang de A , le cas compliqué étant $\text{rg}(A) = n - 1$.

Exercice 21 (Indépendance de la similitude par rapport au corps des scalaires)

3

(Mines MP 08, X PC 09) Montrer que si deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors elles le sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Séries numériques

Sommaire

1. Généralités	524
2. Séries à termes positifs	526
3. Comparaison série-intégrale dans le cas monotone	527
4. Séries absolument convergentes	530
5. Représentation décimale des réels	532
6. Compléments (hors programme)	533
6.1. Le critère spécial des séries alternées	533
6.2. Sommation des relations de comparaison	533
6.3. Transformation d'Abel (hors-programme même en Spé)	535
7. Feuille de TD 23 : Séries numériques	536
7.1. Calculs de sommes	536
7.2. Séries à termes positifs	536
7.3. Séries à termes quelconques	538
7.4. Applications aux développements asymptotiques	538

Informellement, une série est une suite (S_n) , étudiée non plus selon son terme général S_n , mais selon l'écart entre deux termes consécutifs $u_n = S_n - S_{n-1}$. S_0 est la position initiale, et u_n est la vitesse, ou l'accroissement, entre les instants $n - 1$ et n .

Si on considère qu'une suite modélise un système discret (le temps ne prend que des valeurs entières), le passage aux séries fait étudier l'évolution du processus d'un instant au suivant, par l'écart entre ces deux données.

De nombreuses propriétés des suites se traduisent en des propriétés des séries : la croissance d'une suite se traduit par la positivité du terme général (à partir du rang 1), le théorème des suites adjacentes deviendra le critère spécial des séries alternées, etc.

De plus, de nombreuses suites sont en fait données par des sommes du type $\sum_{k=0}^n u_k$, donc par des séries :

- la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$;
- la série $\sum \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$ des (évaluations des parties régulières des) développements de Taylor d'une fonction f de classe \mathcal{C}^∞ en un point.
- la suite des développements décimaux par défaut d'un réel s'écrit aussi naturellement sous forme d'une série $\sum \frac{a_n}{10^n}$, où $a_0 \in \mathbb{Z}$ et les a_n appartiennent à $[[0, 9]]$ pour tout $n \geq 1$.

Enfin, l'analyse asymptotique de u_n nous donnera des renseignements fins sur la série $\sum u_n$. Par exemple, le théorème de Cesàro sera vu comme une conséquence immédiate d'un résultat sur la sommation des relations de comparaison.

Dans le cas où $\sum_{n=0}^N u_n$ admet une limite $l \in \mathbb{K}$ lorsque N tend vers l'infini, nous noterons le nombre l sous la forme $\sum_{n=0}^\infty u_n$. Nous donnons donc ici un sens à une « somme infinie », comme valeur d'une certaine limite (lorsqu'elle existe).

Nous verrons cependant que non seulement cette notation n'a pas toujours un sens, mais surtout qu'*a priori*, son statut (existence ou non) et son éventuelle valeur dépendent de l'ordre dans lequel on effectue la somme : réindexer les termes de (u_n) peut changer la valeur de la somme.

Dans la suite \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} , et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites d'éléments de \mathbb{K} .

Pour clarifier l'exposition, les séries seront indexées par \mathbb{N} dans les résultats du cours, mais ils s'étendent sans problème à des séries indexées par \mathbb{N}^* , ou même $[[N, \infty[[$, où $N \in \mathbb{N}$ est fixé. C'est par exemple le cas de la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$, implicitement indexée par \mathbb{N}^* .

1. GÉNÉRALITÉS

Définition (Série)

On appelle *série* de terme général u_n et on note $\sum u_n$ ou $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ le couple $((u_n), (S_n))$, où

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La suite (S_n) est appelée *suite des sommes partielles* associée à la série $\sum u_n$. Plus précisément, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ est appelée *somme partielle d'ordre* de $\sum u_n$.

1.a

En fait, on reviendra rarement à cette définition formelle d'une série comme couple de suites (liées par une formule), on parlera simplement de la série $\sum u_n$, de son terme général u_n et de sa somme partielle S_n d'ordre n .

Bien sûr, on a $u_n = S_n - S_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et $u_0 = S_0$.

Définition (Convergence d'une série)

La série $\sum u_n$ est dite *convergente* (resp. *divergente*) si la suite des sommes partielles associée (S_n) converge (resp. diverge).

En cas de convergence, on appelle *somme* de la série $\sum u_n$ et on note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ la limite de (S_n) .

Toujours en cas de convergence, on appelle *reste* d'ordre n de la série $\sum u_n$ et on note R_n le scalaire

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

La *nature* d'une série est sa convergence ou sa divergence (selon le cas).

1.b

Dans le cas d'une série convergente, on a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n + R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

La nature d'une série est inchangée si on change la valeur de son terme général en un nombre fini d'indices. En particulier, pour tout $N \in \mathbb{N}$, les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq N} u_n$ ont même nature.

Condition nécessaire non suffisante de convergence

Bien sûr, pour que $\sum u_n$ converge, il faut que son terme général u_n tende vers 0. Cette condition nécessaire de convergence nous donne donc une condition suffisante de divergence : lorsque u_n ne tend pas vers 0, la série $\sum u_n$ est divergente (on dit que la divergence est *grossière*).

Par exemple, la série $\sum \cos(n)$ est grossièrement divergente (une fois acquise la divergence de $(\cos(n))$, ou même seulement sa non convergence vers 0).

1.1

Exemple (Séries géométriques)

Une série $\sum u_n$ est dite *géométrique* si la suite (u_n) est géométrique. Supposons-la de terme initial non nul, et de raison q . On vérifie que $\sum u_n$ converge si et seulement si $|q| < 1$:

En cas de convergence, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{u_0}{1-q}.$$

Par exemple, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{9}{10^n} = 1$, ou, de façon plus imagée, $0,999999\dots = 1$.

Pour le cas **très restreint** des séries géométriques, la divergence équivaut donc à la divergence grossière.

i

Exemple (Lien entre suite et série)

Soit (α_n) une suite de scalaires. La série $\sum(\alpha_{n+1} - \alpha_n)$ et la suite (α_n) ont même nature. Une série de cette forme est dite *télescopique*.

Par exemple, la série télescopique $\sum \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ illustre qu'une série peut être divergente sans l'être grossièrement.

ii

Exercice (Exemples de séries convergentes ou pas)

1 Montrer que la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ est divergente. Cet exemple montre lui aussi qu'une série peut être divergente sans être grossièrement divergente.

2 Montrer que la série $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ converge.

3 Montrer que la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

1

On définit aisément l'addition (ou la somme¹) de deux séries, et le produit d'une série par un scalaire, conférant à l'ensemble des séries d'éléments de \mathbb{K} une structure de \mathbb{K} -espace vectoriel.

En revanche, nous ne définirons pas ici de produit de deux séries.

Proposition (Linéarité de la somme)

L'ensemble Ω des séries convergentes est un espace vectoriel, et l'application

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \Omega & \rightarrow & \mathbb{K} \\ \sum u_n & \mapsto & \sum_{n=0}^{\infty} u_n \end{array}$$

est une forme linéaire.

1.a

1. qui n'a bien sûr rien à voir avec la somme d'une série

Démonstration

□

2. SÉRIES À TERMES POSITIFS

On se restreint ici au cas de séries à termes positifs : l'équivalent pour les suites serait de se restreindre aux suites croissantes². Comme pour les suites, cette hypothèse supplémentaire simplifie considérablement l'étude. Pour les suites par exemple, on sait que toute suite convergente est bornée, que la réciproque est fautive, mais qu'elle devient vraie si on se limite aux suites monotones. Il n'est donc pas étonnant que les résultats à suivre tombent en défaut lorsqu'on ne suppose plus la série à terme général positif.

Ici, $\sum u_n$ sera donc à termes positifs, *i.e.* la suite (u_n) sera positive.

Voici la version « séries » du théorème de la limite monotone (pour les suites) :

Proposition (Condition nécessaire et suffisante de convergence pour une série à termes positifs)

Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.

2.a

Démonstration

□

L'hypothèse de positivité est essentielle :

Proposition (Ordre et séries à termes positifs)

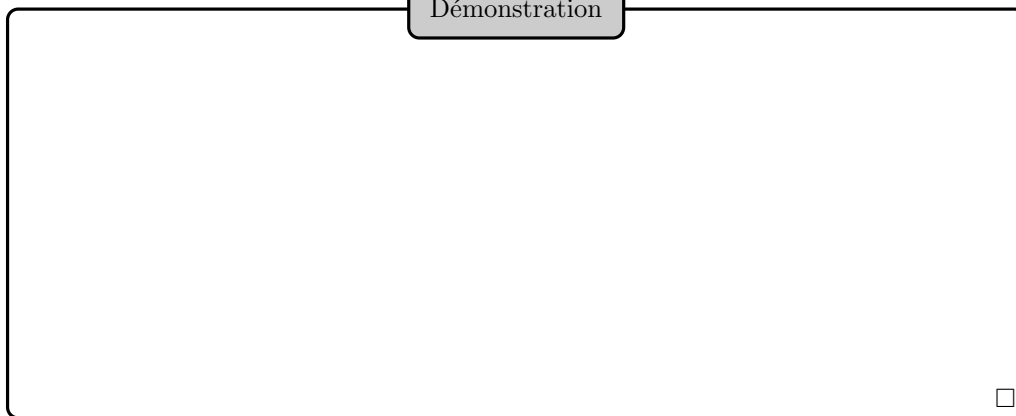
On suppose $0 \leq u \leq v$.

- (1) si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
- (2) si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

2.b

2. Et de termes initiaux positifs, mais cette précision est moins cruciale.

Démonstration



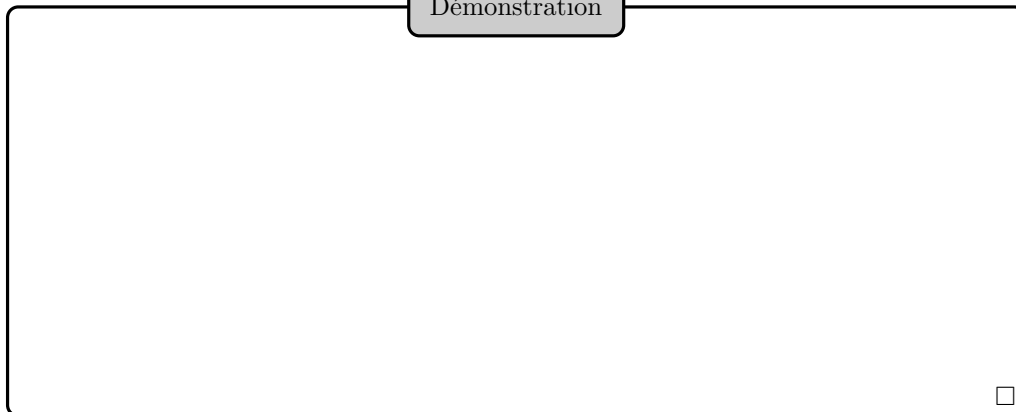
Là encore, l'hypothèse de positivité est essentielle :

Proposition (Équivalence et séries à termes positifs)

Si u et v sont positives, et si $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.

2.c

Démonstration



Comme précédemment, l'hypothèse de positivité est essentielle :

3. COMPARAISON SÉRIE-INTÉGRALE DANS LE CAS MONOTONE

On considère une fonction monotone $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, continue (ou même seulement continue par morceaux), ainsi que la série $\sum f(n)$.

La monotonie de f permet d'encadrer les sommes partielles S_N de cette série (où $N \in \mathbb{N}^*$) :

Si f est croissante, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f(n) \leq \int_n^{n+1} f \leq f(n+1),$$

et donc, en sommant de 0 à $N - 1$:

$$S_N - f(N) \leq \int_0^N f \leq S_N - f(0),$$

soit encore

$$f(0) + \int_0^N f \leq S_N \leq f(N) + \int_0^N f$$

Si f est décroissante, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f(N) + \int_0^N f \leq S_N \leq f(0) + \int_0^N f$$

Exemple (Série harmonique par les intégrales)

On a $H_n \sim \ln(n)$, et même plus précisément

$$H_n = \ln(n) + O(1).$$

i

Exercice (Un équivalent par comparaison série-intégrale)

Montrer par comparaison série-intégrale que

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{k} \sim \frac{2}{3}n\sqrt{n}.$$

2

Retrouver ce résultat par une autre technique.

Cette technique s'appelle *comparaison série-intégrale*, ou *méthode des rectangles*.

Illustration

Définition (Séries de Riemann)

On appelle *série de Riemann* toute série de la forme $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

3.a

Proposition (Séries de Riemann)

La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

3.a

Démonstration

□

Cette méthode des rectangles peut permettre d'estimer les sommes partielles de certaines séries divergentes et les restes de certaines séries convergentes :

Exercice (Application à l'étude de sommes partielles et de restes)

On considère la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$. Donner un équivalent des sommes partielles en cas de divergence, et un équivalent des restes en cas de convergence.

3

On dispose en fait d'un résultat plus fin sur la comparaison série-intégrale (programme de Spé) :

Exercice (Précision sur la comparaison série-intégrale)

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue par morceaux et décroissante.

1 Montrer que la série de terme général

$$u_n = \int_{n-1}^n f(t) dt - f(n)$$

converge.

2 Que donne ce résultat pour $f(t) = \frac{1}{t+1}$? La limite de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ lorsque n tend vers l'infini est appelée *constante d'Euler*, et notée γ . On a

$$\gamma \simeq 0.5772156649\dots$$

En fait, on connaît des milliards de décimales de γ , mais on ne sait toujours pas si γ est rationnel.

3 Montrer que $\sum f(n)$ est convergente si et seulement si $\int_0^x f(t) dt$ a une limite finie lorsque x tend vers l'infini.

4

L'outil intégral permet aussi d'établir certaines convergences, sans que la technique employée soit celle des rectangles :

Exercice (Série harmonique alternée)

Montrer que la série $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ (appelée *série harmonique alternée*) est convergente, et calculer sa somme.

Remarque : on rappelle que l'inégalité de Taylor-Lagrange nous avait déjà fourni ce résultat.

5

4. SÉRIES ABSOLUMENT CONVERGENTES

Définition (Convergence absolue)

On dit que la série $\sum u_n$ est *absolument convergente* si la série $\sum |u_n|$ converge.

4.a

Proposition (La convergence absolue implique la convergence)

Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente. La série $\sum u_n$ est alors convergente.

4.a

Démonstration

Séparer les cas réel (pour lequel on utilisera $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$) et complexe.

□

Séries semi-convergentes

La convergence n'entraîne pas l'absolue convergence, comme le montre l'exemple de la série harmonique alternée. Une telle série (convergente non absolument convergente) est dite *semi-convergente*.

Cela dépasse de loin le programme officiel, mais dans le cas de la semi-convergence, une permutation des termes de la série peut bouleverser son comportement asymptotique (attendre le débriefing au tableau pour comprendre cette remarque).

On revient donc à l'aspect asymptotique de la notation $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$, qu'il ne faut pas perdre de vue.

4.1

Proposition (Relation de domination et absolue convergence)

Si (u_n) est une suite complexe, si (v_n) est une suite d'éléments de \mathbb{R}_+ , si $u_n = O(v_n)$, et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ est absolument convergente et donc convergente.

4.b

Démonstration

□

En exemple, un cas particulier important : la comparaison à une série géométrique (*i.e.* le critère de d'Alembert) :

Exercice (Critère de d'Alembert)

Soit (z_n) une suite de complexes tous non nuls. On suppose que la suite de terme général $\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|}$ admet une limite $l \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

1 Montrer que si $l < 1$, alors $\sum z_n$ est absolument convergente.

2 Montrer que si $l > 1$, alors $\sum z_n$ est divergente.

3 Montrer, en donnant des contre-exemples, qu'on ne peut pas conclure lorsque $l = 1$.

Ces résultats constituent le *critère* (ou la *règle*) *de d'Alembert*. Le cas où $l = 1$ est appelé *cas limite*, ou *cas douteux*.

6

Exemple (Série exponentielle complexe)

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente (d'après le critère de D'Alembert pour $z \neq 0$), donc convergente. On aurait pu prouver l'absolue convergence à partir de l'inégalité de Taylor-Lagrange.

Ceci permet de définir la *fonction exponentielle complexe* :

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \end{aligned}$$

i

Série exponentielle complexe

Nous avons déjà défini une fonction exponentielle complexe en début d'année : ces deux notions coïncident-elles bien, et laquelle est la « vraie » définition de l'exponentielle complexe ?

4.2

5. REPRÉSENTATION DÉCIMALE DES RÉELS

Définition (Nombre décimal)

On appelle *nombre décimal* un réel de la forme $\frac{n}{10^p}$, où $(n, p) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. On note \mathbb{D} leur ensemble.

5.a

En fait \mathbb{D} est le sous-anneau de \mathbb{R} engendré par $\frac{1}{10}$, *i.e.* le plus petit sous-anneau de \mathbb{R} (au sens de l'inclusion) possédant $\frac{1}{10}$.

Fixons un réel positif x .

Définition (Développement décimal propre d'un réel)

On appelle *développement décimal* de x toute série de somme x , de la forme

$$\sum \frac{a_n}{10^n},$$

où $a_0 \in \mathbb{N}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \in \llbracket 0, 9 \rrbracket$.

Un tel développement est dit *propre* si la suite (a_n) ne stationne pas à 9.

5.b

Exemple (Développement décimal propre d'un réel)

Bien sûr, tout entier positif, et plus généralement tout décimal positif, admet un développement décimal propre.

Le rationnel $\frac{1}{9}$ admet le développement décimal $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{10^n}$, de sorte que $\frac{1}{9} = 0,111111\bar{1}$

(le 1 souligné signifiant qu'il se répète à l'infini).

i

Proposition (Unicité du développement décimal propre)

x admet au plus un développement décimal propre.

5.a

Démonstration

□

On a déjà défini les suites (α_n) et (β_n) de ses approximations décimales, par défaut et par excès respectivement.

Proposition (Approximations décimales par défaut d'un réel strictement positif)

Il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de $[[0, 9]]$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_n = \alpha_0 + \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{10^k}$$

On a donc

$$x = E(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}$$

5.b

Ceci montre donc l'existence d'un développement décimal propre pour tout réel positif.

Revenons au cas général où x est réel, et soit $\sum \frac{a_n}{10^n}$ son développement décimal propre.

Le terme général de (a_n) stationne à 0 si et seulement si x est décimal.

Dans le cas où x est décimal non nul, et dans ce cas uniquement, x admet un autre développement décimal, dit *impropre*, provenant essentiellement de la relation $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{9}{10^n} = 1$. Plus précisément, si $N = \max\{n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0\}$ (N est bien défini car x est supposé non nul), alors, en posant $a'_k = a_k$ si $k < N$, $a'_N = a_N - 1$ et $a_k = 9$ si $k > N$, on a également

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a'_n}{10^n}.$$

Dans le cas d'un réel strictement négatif, l'usage consiste à le représenter par un symbole $-$ suivi du développement décimal propre de son opposé.

6. COMPLÉMENTS (HORS PROGRAMME)

6.1. LE CRITÈRE SPÉCIAL DES SÉRIES ALTERNÉES

Exercice (Critère spécial des séries alternées)

Soit (a_n) une suite réelle décroissante de limite nulle.

1

Montrer que la série $\sum (-1)^n a_n$ converge, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|R_n| \leq a_{n+1}$$

(c'est le *critère spécial des séries alternées*).

Indication : ce critère est la version « séries » du théorème de convergence des suites adjacentes.

2 En déduire que $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.

2 Montrer sur un exemple l'importance de la condition de décroissance.

7

6.2. SOMMATION DES RELATIONS DE COMPARAISON

Nous avons déjà vu des résultats mêlant nature de séries et relations de comparaison. En fait, on peut aller beaucoup plus loin. Comme remarqué précédemment, les résultats ne s'appliqueront que dans le cas où la série de référence est à termes positifs.

Théorème de sommation des relations de comparaison, cas de la convergence

On suppose $\sum v_n$ à termes positifs, et convergente.

(1) si $u_n = o(v_n)$, alors $\sum u_n$ est absolument convergente, et

$$\sum_{k=n}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n}^{+\infty} v_k\right).$$

(2) si $u_n = O(v_n)$, alors $\sum u_n$ est absolument convergente, et

$$\sum_{k=n}^{+\infty} u_k = O\left(\sum_{k=n}^{+\infty} v_k\right).$$

(3) si $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ est convergente, et

$$\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n}^{+\infty} v_k.$$

6.a

Démonstration

□

Théorème de sommation des relations de comparaison, cas de la divergence

On suppose $\sum v_n$ à termes positifs, et divergente.

(1) si $u_n = o(v_n)$, alors

$$\sum_{k=0}^n u_k = o\left(\sum_{k=0}^n v_k\right).$$

(2) si $u_n = O(v_n)$, alors

$$\sum_{k=0}^n u_k = O\left(\sum_{k=0}^n v_k\right).$$

(3) si $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ est divergente, et

$$\sum_{k=0}^n u_k \sim \sum_{k=0}^n v_k.$$

6.b

Démonstration

□

Il y a donc deux points essentiels à retenir :

- Ces théorèmes supposent la série de référence à termes positifs.
- En cas de convergence, on s'intéresse aux restes, et en cas de divergence, on s'intéresse aux sommes partielles.

Exercice (Cesàro par sommation des relations de comparaison)

Expliquer comment déduire le théorème de Césaro du théorème de sommation des relations de comparaison.

8

6.3. TRANSFORMATION D'ABEL (HORS-PROGRAMME MÊME EN SPÉ)

Exercice (Transformation d'Abel)

Soit (a_n) et (B_n) deux suites complexes. On définit deux suites complexes (A_n) et (b_n) par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A_n = \sum_{k=0}^n a_k \quad \text{et} \quad b_n = B_{n+1} - B_n.$$

1 Montrer que

$$\sum_{k=0}^n a_k B_k = A_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_k.$$

Remarque : cette formule, appelée *formule d'Abel* ou *formule de sommation par parties*, est la version discrète de l'intégration par parties.

2 Montrer que si (B_n) converge vers 0, (A_n) est bornée, et $\sum b_n$ est absolument convergente, alors $\sum a_n B_n$ est convergente.

3 Applications :

1 Montrer que $\sum \frac{\sin(n)}{n}$ converge.

2 Étudier l'absolue convergence de cette dernière série.

Indication : utiliser les formules trigonométriques et (à nouveau) la transformation d'Abel.

9

7. FEUILLE DE TD 23 : SÉRIES NUMÉRIQUES

7.1. CALCULS DE SOMMES

Exercice 1 (Lorsque le terme général est une fonction rationnelle)

0

Montrer la convergence et calculer la somme de $\sum u_n$, lorsque :

1 $u_n = \frac{n}{n^4 + n^2 + 1}$.

2 $u_n = \frac{2n-1}{n^3-4n}$ (où $n \geq 3$).

3 $u_n = \frac{1}{n^2+3n}$.

4 $u_n = \frac{1}{n^2+3n+2}$.

5 (Mines MP) $u_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^n k^2}$.

Exercice 2 (Autres calculs de sommes)

2

Montrer la convergence et calculer la somme de $\sum u_n$, lorsque :

1 $u_n = (-1)^n \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ ($n \geq 2$).

2 $u_n = \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ ($n \geq 2$).

3 On pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Montrer que la série $\sum u_n$ où $u_n = \frac{H_n}{n(n+1)(n+2)}$ converge, et calculer sa somme.

4 $\sum \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

7.2. SÉRIES À TERMES POSITIFS

Exercice 3 (Nature de séries à termes positifs)

0

Déterminer la nature de $\sum u_n$, où :

1 $u_n = n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

2 $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

3 $u_n = \frac{\ln(n)}{\ln(e^n-1)}$.

4 $u_n = \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$.

5 $u_n = \left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n$.

6 $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}$.

7 $u_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}$.

8 $u_n = e^{-\sqrt{n}}$.

9 $u_n = \sqrt{\operatorname{ch}\left(\frac{1}{n}\right) - 1}$.

10 $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

Exercice 4 (Séries de Bertrand)

1

Soit $\alpha, \beta > 0$.

1 Montrer que $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

2 Donner un équivalent des sommes partielles lorsque $\alpha = \beta = 1$.

Exercice 5 (Opérateurs sur les séries convergentes à termes positifs)

2

On considère une série convergente à termes positifs $\sum a_n$.

Étudier la convergence des séries suivantes :

1 $\sum a_n^2$.

2 $\sum \frac{a_n}{a_n+1}$.

3 $\sum a_n a_{2n}$.

4 $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}$.

Remarque : pour prolonger l'exercice, on peut se poser les questions suivantes :

5 Étude des réciproques.

6 Que se passe-t-il si on ne suppose plus la série à termes positifs ?

Exercice 6 (Lois de composition interne sur les séries convergentes à termes positifs)

2

Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries convergentes à termes positifs.

Établir la convergence des séries suivantes :

1 $\sum \max(a_n, b_n)$.

2 $\sum \sqrt{a_n b_n}$.

3 $\sum \frac{a_n b_n}{a_n + b_n}$ (en supposant que $(a_n + b_n)$ ne s'annule pas).

Exercice 7 (Cas douteux de la règle de d'Alembert)

2

Soit $a > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \frac{a^n n!}{n^n}$.

Étudier, selon la valeur de a , la convergence de $\sum u_n$.

Exercice 8 (Une idée reçue sur les séries)

4

1 Donner un exemple de série convergente $\sum u_n$ tel que $u_n \neq o\left(\frac{1}{n}\right)$ (si possible avec $u_n \geq 0$).

2 Montrer cependant que si $\sum u_n$ converge et si (u_n) décroît, alors $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

7.3. SÉRIES À TERMES QUELCONQUES

Exercice 9 (Nature de séries à termes quelconques)

0

Déterminer la nature de $\sum u_n$, où :

1 $u_n = \frac{\sin(n^2)}{n^2}$.

2 $u_n = \frac{(-1)^n \ln(n)}{n}$.

3 $u_n = \sin(\pi(2 - \sqrt{3})^n)$.

4 $u_n = \sin(\pi(2 + \sqrt{3})^n)$.

Indication : faire le lien avec la question précédente.

5 $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.

6 $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{2n+1}\right)$.

Exercice 10 (Une autre idée reçue sur les séries (X MP))

4

Donner un exemple de série divergente dont le terme général tend vers 0 et dont les sommes partielles sont bornées.

7.4. APPLICATIONS AUX DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES

Exercice 11 (Application des séries aux suites récurrentes)

4

1 Soit (u_n) la suite de terme initial $u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$, et d'itératrice sinus. Donner un développement asymptotique à deux termes de u_n .

2 (Mines MP 2010) Soit (u_n) telle que $u_0 > 0$ et d'itératrice $f : x \mapsto x + \frac{1}{\sqrt{x}}$. Donner un développement asymptotique à deux termes de u_n .

3 Soit (x_n) une suite définie par $x_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{n+1} = x_n + x_n^2.$$

i Montrer que (x_n) tend vers $+\infty$.

ii On pose $u_n = 2^{-n} \ln(x_n)$ et $v_n = u_{n+1} - u_n$. Montrer que la série de terme général v_n converge. En déduire que (u_n) converge.

iii Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $x_n \sim \alpha^{2^n}$.

4 (Mines MP 2006) Soit $u_0 \in]0, 2\pi[$, puis $u_{n+1} = \sin(u_n/2)$.

i Montrer que (u_n) tend vers 0.

ii Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} (2^n u_n) = A$ pour un certain $A > 0$.

iii Trouver un équivalent simple de $(u_n - A2^{-n})$.

Exercice 12 (Autres développements asymptotiques)

4

1 (Mines MP) On pose

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n}.$$

i Montrer que (a_n) converge et trouver sa limite λ .

ii Trouver un équivalent simple de $a_n - \lambda$.

2 Développement asymptotique à deux termes de $u_n = \sum_{p=1}^n \frac{\ln(p)}{p}$.

3 Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes positifs. On note $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ et on suppose

$$u_n \sim R_n^2.$$

Déterminer un équivalent de u_n .

Exercice 13 (Vers les séries entières)

3 et 5

Convergence et somme de

1

i $\sum \frac{1}{(2n)!}$.

ii $\sum \frac{1}{(3n)!}$.

iii $\sum \frac{n^3}{n!}$.

2 Pour quels $z \in \mathbb{C}$ la série $\sum \frac{z^n}{n^2}$ est-elle convergente ?

3 Pour quels $z \in \mathbb{C}$ la série $\sum \frac{z^n}{\sqrt{n}}$ est-elle convergente ?

Exercice 14 (Rayon de convergence d'une série entière)

2 et 5

On considère une suite (a_n) de nombres complexes, $z \in \mathbb{C}$ (vu comme une variable), et la série $\sum a_n z^n$.

1 Montrer l'existence (et l'unicité) de $R \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tel que, si $|z| < R$, alors $\sum a_n z^n$ converge absolument, et si $|z| > R$, alors $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

R est appelé *rayon de convergence* de la série entière $\sum a_n z^n$. Il faut bien comprendre que si $|z| = R$, nous sommes dans un cas douteux.

2 Calculer les rayons de convergence de $\sum z^n$, $\sum n z^n$, $\sum \frac{z^n}{n}$, $\sum \frac{z^n}{n!}$ et $\sum n! z^n$.

Variables aléatoires

Sommaire

1. Variables aléatoires	541
2. Lois usuelles	542
3. Couples de variables aléatoires	544
4. Variables aléatoires indépendantes	544
5. Espérance	546
6. Variance, écart type et covariance	549
7. Feuille de TD 24 : Variables aléatoires	553
7.1. Loi d'une variable aléatoire	553
7.2. Couples de variables aléatoires	554
7.3. Espérance, variance, moments	555
7.4. V.a.i.i.d.	556

Dans tout le chapitre, on se fixe un univers probabilisé (Ω, P) . Conformément au programme, on suppose Ω fini.

Dans la suite, X, Y, X_1, X_2 etc. désigneront des variables aléatoires sur Ω .

1. VARIABLES ALÉATOIRES

Définition (Variable aléatoire)

Une *variable aléatoire* (en abrégé : va ou v.a.) est une application définie sur l'univers Ω à valeurs dans un ensemble E . Lorsque $E \subset \mathbb{R}$, la variable aléatoire est dite *réelle*.

1.a

Pour toute partie A de E , $X^{-1}(A)$ est une partie¹ de Ω , c'est-à-dire un événement : on le note souvent $\{X \in A\}$ ou $(X \in A)$. Dans le cas particulier où A est un singleton $\{x\}$, on le note $\{X = x\}$ ou $(X = x)$.

Dans le cas où $E = \mathbb{R}$ et si A est un intervalle $] -\infty, x]$, on note $(X \leq x)$ l'événement $X^{-1}(A)$ (de même pour les autres types d'intervalles).

Définition (Support et atome)

On appelle *support* de X son image $X(\Omega)$. Les éléments x du support tels que $P(X = x) > 0$ sont appelés *atomes* de la variable aléatoire X .

1.b

En règle générale, les atomes sont exactement les éléments du support, sauf lorsqu'il existe des événements non vides négligeables (*i.e.* de probabilité nulle).

1. C'est par définition $\{\omega \in \Omega, X(\omega) \in A\}$

Définition (Loi d'une variable aléatoire)

L'application

$$\begin{aligned} P_X : \mathcal{P}(E) &\rightarrow [0, 1] \\ A &\mapsto P(X \in A) \end{aligned}$$

est appelée *loi* P_X de la variable aléatoire X . On dira alors que X suit la loi P_X et on écrira $X \hookrightarrow P_X$ ou $X \sim P_X$.

1.c

L'application P_X (qui est une probabilité sur $X(\Omega)$, ou même sur E) est déterminée par la donnée des $P(X = x)$ pour x dans $X(\Omega)$ (qui forment un système complet d'événements).

Réciproquement, pour toute donnée d'un ensemble fini $\{x_1, \dots, x_n\}$ de cardinal n et de réels $\{p_1, \dots, p_n\}$ positifs ou nuls et de somme 1, il existe une variable aléatoire de support $\{x_1, \dots, x_n\}$ et de loi donnée par $P(X = x_i) = p_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Définition (Image d'une variable aléatoire par une fonction)

Étant donné une fonction $f : E \rightarrow F$, $f \circ X$ est une variable aléatoire à valeurs dans F , notée $f(X)$.

1.d

Dans ce contexte, la loi associée à $f(X)$ est

$$\begin{aligned} P_{f(X)} : \mathcal{P}(F) &\rightarrow [0, 1] \\ A &\mapsto P(X \in f^{-1}(A)) \end{aligned}$$

Exemple (Variables aléatoires)

Comme exemple de variables aléatoires, on peut donner le résultat d'un lancer de dé X , le résultat d'un autre lancer de dé Y . Dans ces deux cas, si on suppose les dés équilibrés, les deux variables aléatoires suivront la même loi (uniforme) sur $E = \llbracket 1, 6 \rrbracket$, et seront donc fonctionnellement identiques, mais pourtant, on se doute qu'elles ne peuvent pas être considérées comme égales.

La somme de ces résultats $X + Y$, l'écart $|Y - X|$, ou même X^2 , $(X + 2Y)^3$, $\sin(X)$, $\cos(Y) * \exp(X)$, sont également des variables aléatoires, même si ces derniers exemples n'ont sans doute pas grand intérêt.

On peut aussi donner des exemples plus informels, comme le nombre de personnes faisant la queue à un guichet, le nombre de jours restants avant la prochaine pluie, pour lesquels $E = \mathbb{N}$ (éventuellement $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ pour les jours de pluie), etc.

De la même façon qu'une fonction dépendant d'une variable peut s'avérer constante, on accepte qu'une variable aléatoire soit constante.

Pour tout événement A de Ω (c'est-à-dire une partie de Ω), l'indicatrice 1_A de A dans Ω est une variable aléatoire de support $\{0, 1\}$.

i

2. LOIS USUELLES

On présente ici des lois usuelles.

Définition (Loi uniforme)

On dit que X suit la *loi uniforme* sur un ensemble fini $\{x_1, \dots, x_n\}$ de cardinal n si

$$P_X(x_k) = \frac{1}{n}$$

pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

2.a

Le lancer d'un dé équilibré suit une loi uniforme sur $\llbracket 1, 6 \rrbracket$.

Définition (Loi de Bernoulli)

On dit que X suit la *loi de Bernoulli* de paramètre $p \in [0, 1]$ si elle est de support $\{0, 1\}$, que $P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p$. Cette loi est notée $\mathcal{B}(p)$.

2.b

La loi de Bernoulli peut être vue comme évaluant la probabilité de succès d'une expérience : il y a succès avec probabilité p (et échec avec probabilité $1 - p$).

Exemple (Loi de Bernoulli)

Pour toute partie A de Ω , l'indicatrice de A suit une loi de Bernoulli (et son paramètre vaut $\frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega}$ si la probabilité sur Ω est uniforme).

i

Exemple (Loi de Rademacher)

Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, alors $Y = 2X - 1$ suit ce qu'on appelle la *loi de Rademacher* de paramètre p , pour laquelle $P(Y = 1) = p$ et $P(Y = -1) = 1 - p$.

ii

Définition (Loi binomiale)

On dit que X suit la *loi binomiale* de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$ si son support est $\llbracket 0, n \rrbracket$, et si, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

On note $\mathcal{B}(p, n)$ cette loi.

2.c

Nous verrons que le nombre de succès lors de la répétition de n expériences de Bernoulli indépendantes de paramètre p suit la loi $\mathcal{B}(p, n)$.

Exemple (Loi binomiale)

Cette loi est aussi celle du nombre de succès lors de n tirages avec remise dans un modèle d'urnes. Plus précisément, considérons par exemple une urne dans laquelle se trouvent des boules rouges et bleues, et que l'on tire une boule rouge avec une probabilité p . Si on effectue n tirages avec remise, la variable aléatoire donnant le nombre de boules rouges tirées suit la loi binomiale de paramètres p et n .

iii

Et sans remise ?

Supposons avoir N boules dans une urne, m blanches et $N - m$ noires. On considère la variable aléatoire X donnant le nombre de boules blanches tirées après n tirages sans remise, où n est fixé (et $n \leq N$). Un simple dénombrement donne, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$P(X = k) = \frac{\binom{m}{k} \binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Cette loi est appelée *loi hypergéométrique* de paramètres $p = \frac{m}{N}$, n et N .

2.1

3. COUPLES DE VARIABLES ALÉATOIRES

On se fixe ici deux variables aléatoires X et Y , sur E et F respectivement.

Définition (Loi conjointe, lois marginales de (X, Y))

On appelle *loi conjointe* de (X, Y) et on note $P_{(X,Y)}$ l'application donnée par :

$$\forall (x, y) \in E \times F, \quad P_{(X,Y)}(x, y) = P(X = x \text{ et } Y = y).$$

P_X et P_Y sont appelées *lois marginales* de (X, Y) .

3.a

Supposons E et F de cardinaux respectifs m et n . $P_{(X,Y)}$ est alors donné par les nm scalaires $p_{i,j} = P((X, Y) = (x_i, y_j))$, que l'on peut fournir dans un tableau

$X \backslash Y$	y_1	\dots	y_n
x_1	$p_{1,1}$	\dots	$p_{1,n}$
\vdots	\vdots		\vdots
x_m	$p_{m,1}$	\dots	$p_{m,n}$

Tous les coefficients sont positifs ou nuls, et leur somme vaut 1.

La loi marginale de X (resp. Y) est ici obtenue en sommant les colonnes (resp. les lignes) de ce tableau.

Il faut noter qu'*a priori*, les lois marginales ne déterminent pas la loi conjointe (elles nous donnent $m + n$ équations pour ces mn inconnues).

Bien entendu, la donnée de ce tableau permet de trouver la valeur de $P(X \in A, Y \in B)$, pour tout $(A, B) \in \mathcal{P}(X(\Omega)) \times \mathcal{P}(Y(\Omega))$.

Définition (Loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$.)

Soit $x \in X(\Omega)$. On suppose $P(X = x) > 0$. On appelle *loi conditionnelle de Y sachant $X = x$* l'application donnée par :

$$P(Y = y | X = x) = \frac{P(X = x \text{ et } Y = y)}{P(X = x)} = \frac{P_{(X,Y)}(x,y)}{P_X(x)}.$$

3.b

Encore une fois, le tableau précédent fournit facilement ces lois conditionnelles.

Exercice (Loi conjointe)

On tire avec remise deux fois un jeton, dans une urne contenant quatre jetons numérotés de 1 à 4. On note X et Y les résultats des premier et second tirages respectivement, et $Z = \max(X, Y)$.

1 Donner la loi conjointe de (X, Y) , les lois conditionnelles.

2 Même question pour (X, Z) .

1

On étend sans difficulté ces notions au cas d'un n -uplet de variables aléatoires.

4. VARIABLES ALÉATOIRES INDÉPENDANTES

Définition (Couple de variables aléatoires indépendantes)

On dit que les variables X et Y sont *indépendantes* si pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$

$$P((X, Y) = (x, y)) = P(X = x)P(Y = y)$$

4.a

X et Y sont indépendants si et seulement si pour tout $(A, B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$,

$$P((X, Y) \in A \times B) = P(X \in A)P(Y \in B)$$

Lorsque X et Y sont indépendantes, les lois marginales permettent de retrouver la loi conjointe, et la matrice ci-dessus est de rang 1 (produit d'une matrice colonne non nulle par une matrice ligne non nulle).

Définition (Variables aléatoires mutuellement indépendantes)

On dit que les variables aléatoires X_1, \dots, X_n sont *mutuellement indépendantes* si pour tout $(x_i) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$, on a :

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i).$$

Dans le cas où toutes ces variables aléatoires sont en outre de même loi, on dira que ce sont des *variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées* (abréviation v.a.i.i.d.).

4.b

Comme pour les événements, on ne confondra pas l'indépendance mutuelle et l'indépendance deux à deux.

On modélise souvent n expériences aléatoires indépendantes par une suite finie (X_i) de variables aléatoires indépendantes. De plus, ces variables aléatoires sont identiquement distribuées, *i.e.* de même loi, si par exemple on réitère plusieurs fois la même expérience, comme lancer un dé ou tirer une boule rouge dans une urne (avec remise).

Intuitivement, l'existence d'une telle suite finie de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant des lois fixées est claire. On peut le prouver mathématiquement, mais nous nous contenterons de l'admettre, et ces variables aléatoires seront des données de l'énoncé, il ne sera pas nécessairement d'en prouver l'existence.

Exercice (Somme de v.a.i.i.d. de Bernoulli)

On suppose que X_1, \dots, X_n sont mutuellement indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$. Montrer que $X_1 + \dots + X_n$ suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$.

2

Proposition (Variables mutuellement indépendantes)

Si X_1, \dots, X_n sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, alors pour tout $(A_1, \dots, A_n) \in \prod_{i=1}^n \mathcal{P}(X_i(\Omega))$, les événements $(X_i \in A_i)$ sont mutuellement indépendants.

4.a

Démonstration

□

Proposition (Fonctions de variables indépendantes)

Si X et Y sont indépendantes, alors les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ le sont aussi.

4.b

Démonstration

□

Ce résultat s'applique notamment au cas classique où $X = (X_1, \dots, X_p)$ et $Y = (X_{p+1}, \dots, X_n)$, et lorsque X_1, \dots, X_n sont mutuellement indépendantes.

5. ESPÉRANCE

Sauf mention contraire, on suppose désormais que X et Y sont des variables aléatoires réelles, de supports respectifs $\{x_1, \dots, x_n\}$ et $\{y_1, \dots, y_m\}$.

Définition (Espérance)

On appelle *espérance* (ou *moyenne*) de X et on note $E(X)$ le réel

$$E(X) = \sum_{k=1}^n x_k P(X = x_k)$$

5.a

La variable aléatoire X est dite *centrée* si son espérance est nulle.

En fait, l'espérance de X ne dépend que de la loi que X suit : on aurait pu parler d'espérance d'une loi, mais ce n'est pas ce qu'a retenu l'usage.

Espérance, moyenne

$E(X)$ s'interprète comme la moyenne des valeurs prises par X , *pondérées* par leurs probabilités d'apparition. Dans le cas d'une variable aléatoire équirépartie sur $\{x_1, \dots, x_n\}$, son espérance est donc la moyenne usuelle

$$\frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n}.$$

5.1

On parle d'espérance en référence aux jeux d'argent : si X représente le gain du joueur, $E(X)$ est le gain moyen auquel il peut s'attendre, ou encore le gain que le joueur peut espérer.

Autres expressions de l'espérance

On a aussi

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x),$$

(simple reformulation), mais encore

$$E(X) = \sum_{x \in \mathbb{R}} xP(X = x),$$

puisque dans cette somme infinie (et même indexée par \mathbb{R} , ce qui est pire), seul un nombre fini de termes sont non nuls.

On peut également écrire

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\})X(\omega).$$

En effet :

5.2

Proposition (Propriétés de l'espérance)

On considère deux variables aléatoires réelles.

- (1) (linéarité) l'espérance est une forme linéaire, *i.e.*, pour tous réels λ et μ :

$$E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y).$$

- (2) (positivité) si $X \geq 0$, alors $E(X) \geq 0$.

- (3) (croissance) l'espérance est une fonction croissante, *i.e.* si $X \leq Y$, alors $E(X) \leq E(Y)$.

- (4) $|E(X)| \leq E(|X|)$.

5.a

Démonstration

□

Vous avez bien sûr vu des formules analogues dans le cours d'intégration : en fait, il existe une théorie unifiant ces domaines, appelée *théorie de la mesure*.

Exercice (Espérance)

Calculer l'espérance d'une variable aléatoire constante, de Bernoulli, binomiale (résultats à connaître).

3

Proposition (Formule de transfert)

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω , à valeurs dans E , et f une fonction définie sur $X(\Omega)$, à valeurs dans \mathbb{R} . On a alors

$$E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X = x)$$

5.b

On observe que l'espérance de $f(X)$ est déterminée par la loi de X .

Exercice (Formule de transfert)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[[1, n]]$. Calculer $E\left(\frac{1}{X(1+X)}\right)$.

4

Proposition (Inégalité de Markov)

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$P(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{E(|X|)}{\varepsilon}.$$

5.c

Démonstration

□

Proposition (Espérance d'un produit de v.a. indépendantes)

On suppose ici que X et Y sont indépendantes : on a alors

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

5.d

Démonstration

□

La réciproque est fautive en général :

6. VARIANCE, ÉCART TYPE ET COVARIANCE

Définition (Moments d'une v.a. réelle)

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on appelle *moment d'ordre k de X* le réel $E(X^k)$.

6.a

Définition (Variance, écart type)

On appelle *variance* de X et on note $V(X)$ le réel positif

$$E((X - E(X))^2)$$

On appelle *écart type* de X et on note $\sigma(X)$ (ou σ_X) le réel positif $\sqrt{V(X)}$.
On dit que X est *réduite* si elle est de variance 1 (*i.e.* d'écart type 1).

6.b

Bien sûr, la variable aléatoire $X - E(X)$ est centrée. Pour donner un indicateur numérique de l'écart entre X et son espérance, c'est-à-dire de la dispersion de X , on pourrait proposer $E(|X - E(X)|)$. Toutefois, cet indicateur est assez peu commode, et on lui préfère la variance, qui est également un indicateur de dispersion.

Cependant, espérance et variance ne sont pas homogènes : si X correspond à des longueurs, l'espérance est une longueur mais la variance une surface : l'écart type est donc lui aussi homogène à une longueur.

Notes aux concours

À un concours, on cherche à faire en sorte que les épreuves aient un poids conforme à leurs coefficients : contrairement à ce qu'on pourrait croire, ce n'est pas la moyenne mais l'écart type que le jury doit harmoniser : si l'écart type est nul, ou presque, cela signifie que tous les candidats ont eu la même note, proche de la moyenne. Cette épreuve n'est donc pas discriminante, elle n'a aucune influence sur le classement (quelle que soit la moyenne).

Par exemple, si en maths la moyenne est de 6, avec un écart type de 5, et si elle est de 18 en physique, avec un écart type de 1, ce sont les mathématiques qui permettront de faire la différence aux concours.

Cela dit, pour des raisons de lisibilité, les moyennes sont souvent proches de 10.

6.1

Proposition (Formules pour la variance)

On a :

- (1) (formule de Koenig) $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.
- (2) pour tous réels a et b : $V(aX + b) = a^2V(X)$.

6.a

Démonstration

□

La formule de Koenig donne une méthode pratique de calcul de la variance. Il est normal que l'ajout de b soit sans influence sur la dispersion, et donc sur la variance.

Définition (v.a. centrée réduite associée à une v.a.)

On suppose que $\sigma(X) > 0$. La variable aléatoire $\frac{X-E(X)}{\sigma(X)}$ est alors appelée *variable aléatoire centrée réduite associée à X*.

6.c

Exercice (Variance)

- 1 Montrer que si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, alors $V(X) = p(1-p)$.
- 2 Montrer que si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, alors $V(X) = np(1-p)$.

5

Proposition (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)

Soit $\varepsilon > 0$. On a :

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

6.b

Démonstration

□

Cette inégalité permet donc de quantifier le fait qu'une v.a. prenne des valeurs proches de son espérance.

Exercice (Inégalité de Bienaymé-Tchebichev)

On jette 3600 fois un dé. Minorer la probabilité que le nombre d'apparitions du 1 soit compris entre 480 et 720.

6

Définition (Covariance)

On appelle *covariance* de X et Y et on note $\text{Cov}(X, Y)$ le scalaire

$$E((X - E(X))(Y - E(Y))).$$

6.d

Bien sûr, $\text{Cov}(X, X) = V(X)$.

Proposition (Formule pour la covariance)

On a : $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.

6.c

Démonstration

□

Covariance de v.a. indépendantes

Si X et Y sont indépendantes, alors $\text{Cov}(X, Y) = 0$.
Attention cependant : la réciproque est fautive.

6.2

Proposition (Variance d'une somme)

- (1) $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2 \operatorname{Cov}(X, Y)$.
 (2) En particulier, si X et Y sont indépendantes, $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.

6.d

Plus généralement, si X_1, \dots, X_q sont des variables deux à deux indépendantes, alors

$$V(X_1 + \dots + X_q) = V(X_1) + \dots + V(X_q).$$

On observe que cette formule est vraie dès que les X_i sont indépendantes deux à deux : il n'est pas nécessaire de les supposer *mutuellement* indépendantes.

Exemple (Variance d'une variable aléatoire binomiale)

En appliquant cette formule à la somme de n v.a.i.i.d. de Bernoulli de paramètre p , on retrouve la variance d'une v.a. de loi $\mathcal{B}(n, p)$.

i

Exercice (Coefficient de corrélation)

On appelle *coefficient de corrélation* de X et Y (de variances non nulles) et on note $\rho(X, Y)$ le réel

$$\frac{\operatorname{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

- 1** Montrer que $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$.
2 Que vaut le coefficient de corrélation si X et Y sont indépendantes ? La réciproque est-elle vraie ?
3 Montrer que $\rho(X, Y) \in \{-1, +1\}$ si et seulement si X et Y sont des fonctions affines l'une de l'autre, *i.e.* il existe des réels non nuls a et b , et un réel c tq : $aX + bY + c = 0$.

7

7. FEUILLE DE TD 24 : VARIABLES ALÉATOIRES

7.1. LOI D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE

Exercice 1 (Détermination de lois)

0

Déterminer la loi de la variable aléatoire X , dans les situations suivantes.

- 1 On range au hasard 10 objets dans 3 tiroirs. X est le nombre d'objets dans le premier tiroir.
- 2 Un fermier a cinq poules, quatre lapins et trois moutons : X est le nombre de pattes de l'animal choisi (au hasard) pour le déjeuner.
- 3 Un dé cubique équilibré porte un nombre sur chacune de ses faces : -2 sur 3 faces, 1 sur 2 faces, et 4 sur une face. On lance le dé deux fois de suite. X est la somme des points obtenus.
- 4 Lors d'un vide-grenier, quinze ordinateurs sont mis en vente, dont six sont en panne. Une personne en achète trois au hasard. X est le nombre d'ordinateurs en état de marche achetés par cette personne.
- 5 Une cible circulaire est composée de 3 zones qui rapportent respectivement 1, 2 ou 3 points. Elles sont touchées respectivement avec les probabilités $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{6}$. Un joueur tire deux fois dans la cible, et l'on suppose que ses deux tirs sont indépendants. X est la somme des points obtenus.

Exercice 2 (Nul n'est censé ignorer la loi)

2

Dans chacune des situations ci-dessous reconnaître la loi de X parmi les lois usuelles et préciser son ou ses paramètres.

- 1 On lance un dé équilibré. On note X le nombre obtenu.
- 2 On lance un dé équilibré 10 fois de suite. On note X le nombre de 6 obtenus.
- 3 On dispose d'une urne contenant 6 boules blanches et 7 boules noires. On en pioche successivement 3 sans remise. On note X le nombre de boules blanches obtenues.
- 4 On dispose d'une urne contenant 6 boules blanches et 7 boules noires. On effectue des tirages successifs avec remise jusqu'à ce qu'on obtienne une boule blanche. On note X le nombre de tirages nécessaire.
- 5 On dispose d'une urne contenant 6 boules blanches et 7 boules noires. On effectue 9 tirages successifs avec remise. On note X le nombre de boules blanches obtenues.

Exercice 3 (Variables aléatoires et urnes)

0

On dispose de deux urnes U et V . L'urne U contient 3 boules noires et 2 boules blanches et l'urne V contient 4 boules noires et 1 boule blanche.

- 1 On choisit une urne au hasard et on extrait successivement 3 boules, avec remise à chaque fois de la boule tirée. On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules noires tirées. Déterminer $P(X = 0)$.
- 2 On choisit une urne au hasard et on extrait successivement 3 boules, sans remise de la boule tirée. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de boules noires tirées. Déterminer $P(Y = 3)$.

7.2. COUPLES DE VARIABLES ALÉATOIRES

Exercice 4 (Loi d'un couple)

2

1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. Déterminer la loi de $X - Y$.

2 Soit n et m deux entiers naturels non nuls, et $p \in]0, 1[$. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{B}(n, p)$ et $\mathcal{B}(m, p)$.

i Déterminer la loi conjointe de X et Y .

ii Déterminer la loi de $X + Y$.

3 La loi d'un couple de variables aléatoires (X, Y) est donnée par le tableau suivant que l'on complètera :

$X \backslash Y$	1	2	3
1	0	0,4	0
2	0,1	0,2	0,1
3	0	0	...

i Déterminer les lois marginales de (X, Y) .

ii Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

iii Calculer $E(X)$ et $E(Y)$. Soit $U = \min(X, Y)$ et $V = \max(X, Y)$.

iv Écrire la table de la loi conjointe de U et V , puis en déduire les lois de U et de V .

v Déterminer directement la loi de V .

4 Soit, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $p_{i,j} = \lambda ij$.

i Déterminer λ pour que ceci définisse une loi conjointe.

Pour cette valeur de λ , soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles admettant cette loi conjointe.

ii Déterminer les lois marginales de (X, Y) .

iii X et Y sont-elles indépendantes ?

iv Donner la valeur de $\text{Cov}(X, Y)$, et en déduire la valeur de $E(XY)$.

Exercice 5 (Indépendance dans un couple)

2

Soit $p \in]0, 1[$. On considère deux variables aléatoires X et Y dont la loi conjointe est donnée par le tableau suivant que l'on complètera :

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{2}{3} - p$	$p - \frac{1}{6}$
1	p	

1 Montrer que $\frac{1}{6} \leq p \leq \frac{1}{2}$.

2 Déterminer les lois marginales du couple, puis déterminer l'espérance et la variance de X et Y .

3 Pour quelle valeur de p les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 6 (Minimum, maximum)

3

1 On considère une urne contenant N jetons numérotés de 1 à N . On tire simultanément n jetons de l'urne et on note X le plus petit des numéros obtenus et Y le plus grand. Donner la loi marginale du couple.

2 On lance deux dés équilibrés, on note U_1 et U_2 les variables aléatoires correspondant aux résultats obtenus. On appelle $X = \min(U_1, U_2)$ et $Y = \max(U_1, U_2)$.

i Donner loi et espérance de X .

ii Exprimer $X + Y$ en fonction de U_1 et U_2 . En déduire $E(Y)$.

iii Exprimer XY en fonction de U_1 et U_2 . En déduire $\text{Cov}(X, Y)$.

7.3. ESPÉRANCE, VARIANCE, MOMENTS

Exercice 7 (Voulez-vous jouer ?)

0

On vous propose de jouer, autant de fois que vous le voulez, à un jeu. Selon la situation, acceptez-vous de jouer ?

- 1 Vous lancez un dé : si vous obtenez 6, vous gagnez 6 euros, et perdez 1 euro sinon.
- 2 Vous lancez deux dés, et vous gagnez 5 euros si vous sortez 7, et perdez 1 euro sinon.
- 3 Vous lancez deux dés : si vous obtenez un double i , vous gagnez i euros. Sinon, vous perdez 1 euro.

Exercice 8 (Un professeur sévère)

0

Un professeur a la réputation d'avoir un écart-type supérieur à sa moyenne. Cela est-il possible ? (le professeur ne donne pas de notes strictement négatives)

Exercice 9 (Comparatif de deux indicateurs de dispersion)

2

Soit σ_X l'écart type d'une variable aléatoire X , et l'écart moyen $\sigma = E(|X - E(X)|)$. Comparer σ et σ_X et traiter le cas d'égalité.

Exercice 10 (Calculs d'espérance et de variance)

0

1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Soit X une v.a. à valeurs dans $\{0, 1, \dots, n\}$ telle que :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad P(X = k) = \binom{n}{k} \frac{\beta}{k+1}.$$

Déterminer β , $E(X)$, et $V(X)$.

2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0, 1[$ et $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$. On définit la v.a. Y de la façon suivante :

- Si $X = k$ avec $k > 0$, alors $Y = k$.
- Si $X = 0$, alors Y prend une valeur quelconque avec équiprobabilité dans $\{1, \dots, n\}$.

Déterminer la loi et l'espérance de Y .

3 On tire n boules dans une urne de N boules, numérotées de 1 à N . X est le plus grand des numéros obtenus. Déterminer la loi et l'espérance de X .

Exercice 11 (Vaches laitières)

2

Les vaches laitières sont atteintes par une maladie M avec la probabilité $p = 0.15$. Pour dépister la maladie M dans une étable de n vaches, on fait procéder à une analyse de lait. Deux méthodes sont possibles :

- **Première méthode** On fait une analyse sur un échantillon de lait de chaque vache.
- **Seconde méthode** On effectue d'abord une analyse sur un échantillon de lait provenant du mélange des n vaches. Si le résultat est positif, on fait une nouvelle analyse, cette fois pour chaque vache.

On voudrait connaître la méthode la plus économique (*i.e.* celle qui nécessite en moyenne le moins d'analyses). Pour cela, on note X_n la variable aléatoire du nombre d'analyses réalisées dans la deuxième méthode. On pose $Y_n = \frac{X_n}{n}$.

- 1 Déterminer la loi et l'espérance de Y_n .
- 2 En déduire la réponse à la question posée (dépendant de n).

Exercice 12 (Une formule pour $E(X)$ dans un cas particulier)

3

1 Soit $N \in \mathbb{N}$ et X une variable aléatoire de support inclus dans $\llbracket 0, N \rrbracket$.

Montrer que : $E(X) = \sum_{k=0}^n P(X > k)$.

2 On considère une urne de N boules numérotées de 1 à N . On effectue un tirage simultané de n boules, et on note X le plus grand numéro obtenu. Déterminer $E(X)$.

Exercice 13 (Calculs d'espérance et variance)

3

1 Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(n, p)$. Calculer l'espérance de $Y = \frac{1}{X+1}$.

2 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$, telle qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$P(X = k) = a \binom{n}{k}$$

Calculer espérance et variance de X .

Exercice 14 (De jolies inégalités)

4

Soit X une variable aléatoire réelle.

1 Soit $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, strictement croissante, et $a \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer

$$P(|X| \geq a) \leq \frac{E(g(|X|))}{g(a)}$$

2 On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p, n)$. Montrer, pour tous $\varepsilon, \lambda > 0$:

i $P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sqrt{p(1-p)}}{a\sqrt{n}}$.

ii $P(X - np > n\varepsilon) \leq E(\exp(\lambda(X - np - \varepsilon)))$.

7.4. V.A.I.I.D.

Exercice 15 (Tirages dans une urne)

0

Dans la suite du problème n désigne un entier supérieur ou égal à 2. On considère une urne \mathcal{U} contenant n boules numérotées de 1 à n et indiscernables au toucher.

On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise de la boule dans l'urne \mathcal{U} .

Soit k un entier supérieur ou égal à 1. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note X_i la variable aléatoire égale au nombre d'obtentions de la boule numéro i au cours des k premiers tirages.

1 Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Donner la loi de X_i . Rappeler l'espérance et la variance de X_i .

2 Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$.

i Montrer que X_i et X_j ne sont pas indépendantes.

ii Déterminer la loi de la variable aléatoire $X_i + X_j$.

Exercice 16 (Cible)

3

Soit $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$. Soit n un entier naturel.

On considère n joueurs qui visent une cible. Chaque joueur effectue deux tirs. À chaque tir, chaque joueur a la probabilité p d'atteindre la cible. Les tirs sont indépendants les uns des autres.

On définit la variable aléatoire X égale au nombre de joueurs ayant atteint la cible au premier tir et la variable aléatoire Z égale au nombre de joueurs ayant atteint la cible au moins une fois à l'issue des deux tirs.

1 Déterminer la loi de X . Rappeler son espérance et sa variance.

2 Montrer que Z suit une loi binomiale, et donner ses paramètres. Donner son espérance et sa variance.

On note $Y = Z - X$.

3 Que représente la variable aléatoire Y ? Déterminer sa loi.

4 Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes?

Exercice 17 (Produit consécutif de Bernoulli)

3

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.i.i.d. de Bernoulli de paramètre p . On pose $Y_n = X_n X_{n+1}$.

1 Déterminer la loi de Y_n .

2 Discuter, selon les valeurs de i et j , l'indépendance de Y_i et Y_j .

3 Pour tout $n \geq 2$, donner la matrice des variances-covariances du vecteur $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$.

4 En déduire la variance de $\sum_{i=1}^n Y_i$.

5 Reprendre ces questions, en supposant que les (X_n) soient mutuellement indépendantes, et que X_n suive $\mathcal{B}(p^n)$ pour tout n .

Espaces euclidiens

Sommaire

1. Produit scalaire	559
1.1. Produit scalaire sur un \mathbb{R} -espace vectoriel	559
1.2. Norme et distance associées à un produit scalaire	561
2. Orthogonalité	562
2.1. Familles orthonormales et orthogonales	562
2.2. Orthogonal d'une partie de E	566
2.3. Formes linéaires sur un espace euclidien	568
2.4. Projecteurs orthogonaux dans un espace euclidien	569
3. Automorphismes orthogonaux	573
3.1. Groupe orthogonal	573
3.2. Matrices orthogonales	575
4. Automorphismes orthogonaux du plan	578
5. Notion d'espace affine : distinguer point et vecteur	581
6. Sous-espaces affines	583
7. Hyperplans affines d'un espace euclidien	585
8. Feuille de TD 25 : Espaces euclidiens	587
8.1. Produits scalaires	587
8.2. Endomorphismes d'espaces euclidiens	588
8.3. Matrices orthogonales	589
8.4. Espaces euclidiens de petite dimension	590

Dans ce chapitre, le corps de base des espaces vectoriels considérés est \mathbb{R} . Notre objectif est de donner un cadre formel à la géométrie euclidienne. Cette axiomatisation de la notion d'orthogonalité sera aussi de grande utilité en analyse, notamment dans le cadre des approximations de fonctions.

E désignera un \mathbb{R} -espace vectoriel, et n un entier naturel non nul.

1. PRODUIT SCALAIRE

1.1. PRODUIT SCALAIRE SUR UN \mathbb{R} -ESPACE VECTORIEL

Définition (Application (définie) positive)

Une application $f : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est dite *positive* si

$$\forall x \in E, \quad f(x, x) \geq 0$$

Dans ce dernier cas, f est dite *définie positive* si en outre

$$\forall x \in E, \quad f(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$$

1.a

Définition (Produit scalaire)

On dit qu'une application $f : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est un *produit scalaire* (sur E) si f est une forme bilinéaire symétrique, définie positive.

On appelle *espace préhilbertien (réel)* un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire.

1.b

On note souvent $\langle x, y \rangle$ ou $(x|y)$ ou $x \cdot y$ le produit scalaire de deux vecteurs x et y .

Exemple (Produits scalaires)

- (1) Soit $u = (u_1, \dots, u_n)$ et $v = (v_1, \dots, v_n)$ deux éléments quelconques de \mathbb{R}^n .
L'application

$$(u, v) \mapsto \sum_{i=1}^n u_i v_i$$

est un produit scalaire, appelé *produit scalaire canonique* de/sur \mathbb{R}^n .

- (2) Soit $P = \sum_{k \geq 0} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k \geq 0} b_k X^k$ des polynômes réels. On pose

$$(P|Q) = \sum_{k \geq 0} a_k b_k,$$

somme bien définie puisque $(a_n b_n)$ est presque nulle. On définit ainsi un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ sur $\mathbb{R}[X]$, dit *canonique*.

- (3) Produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([a, b])$ ($a, b \in \mathbb{R}, a < b$) : $(f, g) \mapsto \int_a^b fg$.
(4) Soit E le \mathbb{R} -espace vectoriel des applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continues et 2π -périodiques. L'application :

$$(f, g) \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$$

est un produit scalaire sur E .

- (5) Si F est un sous-espace vectoriel de E préhilbertien, alors le produit scalaire sur E induit une structure préhilbertienne sur F .

i

Définition (Espace euclidien)

Un *espace euclidien* est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, muni d'un produit scalaire.

1.c

Exemple (Espaces euclidiens)

- (1) Les espaces \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 , munis de leurs produits scalaires usuels sont des espaces euclidiens.
(2) L'espace $\mathcal{C}^0([0, 1])$, muni du produit scalaire ci-dessus, n'est pas euclidien, car il n'est pas de dimension finie. Cependant, ses sous-espaces vectoriels de dimension finie sont des espaces euclidiens pour la structure induite.

ii

Un même espace peut être muni de plusieurs produits scalaires. Pour \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 , le produit scalaire canonique est aussi dit *usuel*. On parle ainsi de \mathbb{R}^2 (ou de \mathbb{R}^3) euclidien usuel.

Proposition (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

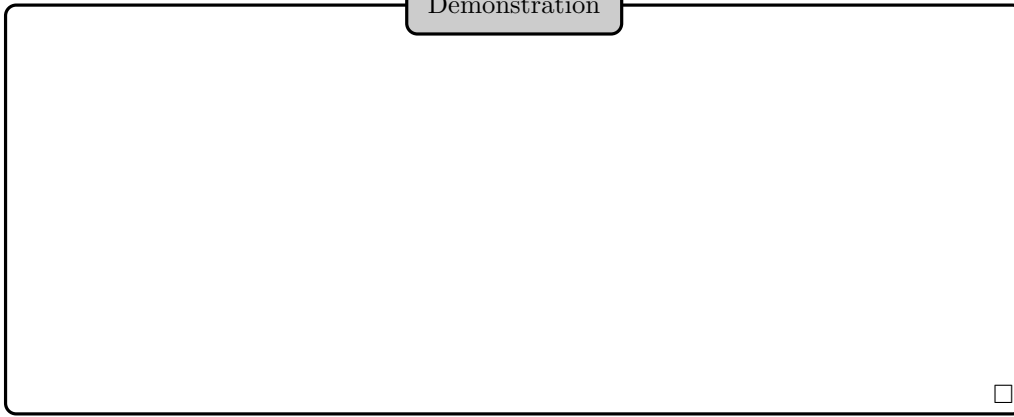
Soit $(\cdot|\cdot)$ un produit scalaire sur E . On a :

$$\forall (u, v) \in E^2, \quad (u|v)^2 \leq (u|u)(v|v).$$

De plus, il y a égalité si et seulement si (u, v) est liée.

1.a

Démonstration



Dans le cas de \mathbb{R}^n euclidien canonique, l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit :

$$\left(\sum_{i=1}^n u_i v_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n u_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n v_i^2\right).$$

Dans le cas intégral, on reconnaît l'inégalité de Cauchy-Schwarz déjà vue :

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(t)dt\right) \left(\int_a^b g^2(t)dt\right).$$

Exercice (Produit scalaire canonique matriciel)

Faire la première question de l'exercice 4 de TD.

1

1.2. NORME ET DISTANCE ASSOCIÉES À UN PRODUIT SCALAIRE

Soit $(\cdot|\cdot)$ un produit scalaire sur E . On définit, pour tout vecteur u de E , la norme de u (associée au produit scalaire $(\cdot|\cdot)$), par :

$$\|u\| = \sqrt{(u|u)}$$

Cette application vérifie les propriétés suivantes¹ :

- (1) $\forall u \in E, \|u\| \geq 0$ et $(\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0_E)$ (axiome de séparation).
- (2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in E, \|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$ (homogénéité).
- (3) $\forall (u, v) \in E^2, \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (inégalité triangulaire).

On dit que l'application $\|\cdot\|$ est une *norme*.

Dans le cas où l'espace est euclidien, l'application $\|\cdot\|$ définie ci-dessus est appelée *norme euclidienne* associée au (ou déduite du) produit scalaire $(\cdot|\cdot)$.

On peut reformuler l'inégalité de Cauchy-Schwarz d'une façon géométrique, facile à retenir :

$$\forall (u, v) \in E^2, |(u|v)| \leq \|u\| \|v\|.$$

On a la *seconde inégalité triangulaire* : $\forall (u, v) \in E^2, \left| \|u\| - \|v\| \right| \leq \|u + v\|$ (ou encore $\left| \|u\| - \|v\| \right| \leq \|u - v\|$, ce qui montre que la norme est une fonction 1-lipschitzienne).

Exemple (Norme euclidienne)

Dans \mathbb{R}^n euclidien canonique, la norme euclidienne est donc donnée par

$$\|u\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2}.$$

On reconnaît en particulier la norme usuelle dans le plan \mathbb{R}^2 et l'espace \mathbb{R}^3 .

iii

1. Ces propriétés constituent la définition générale d'une norme

Pour tous réels α et β , tous vecteurs u et v de E , on a :

$$\|\alpha u + \beta v\|^2 = \alpha^2 \|u\|^2 + 2\alpha\beta(u|v) + \beta^2 \|v\|^2$$

Proposition (Identité du parallélogramme)

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$. On a :

$$\forall (u, v) \in E^2, \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

1.b

Illustration

Proposition (Identités de polarisation)

Pour tout $(u, v) \in E^2$:

$$\begin{aligned} (u|v) &= \frac{1}{2} (\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2) \\ &= \frac{1}{4} (\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2) \\ &= \frac{1}{2} (\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u - v\|^2). \end{aligned}$$

1.c

Ainsi, grâce à ces identités de polarisation, il y a autant d'information dans la norme euclidienne que dans le produit scalaire : la connaissance de la norme nous permet de retrouver le produit scalaire dont elle est issue.

Cependant, toutes les normes ne sont pas issues d'un produit scalaire, une condition nécessaire étant qu'elle vérifie l'identité du parallélogramme :

Exercice (Norme non euclidienne)

(Facultatif, car un peu hors-sujet) Donner un exemple de norme sur un \mathbb{R} -espace vectoriel, non issue d'un produit scalaire.

2

Soit $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur E . L'application $d : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $d(u, v) = \|u - v\|$ (qui se lira : distance de u à v) vérifie les propriétés suivantes :

- (1) $\forall u, v \in E, d(u, v) \geq 0$ et $(d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v)$.
- (2) $\forall u, v \in E, d(u, v) = d(v, u)$.
- (3) $\forall u, v, w \in E, d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$ (inégalité triangulaire).

On dit que d est une *distance*, associée à la norme $\|\cdot\|$ (ou au produit scalaire $(\cdot|\cdot)$).

2. ORTHOGONALITÉ

2.1. FAMILLES ORTHONORMALES ET ORTHOGONALES

E est ici un espace préhilbertien (réel).

Définition (Vecteur unitaire)

Un vecteur u de E est dit *unitaire* (ou encore *normé*) si $\|u\| = 1$.
Si u est un vecteur non nul de E , on appelle *normalisé* de u le vecteur $\frac{u}{\|u\|}$.

2.a

Définition (Vecteurs orthogonaux)

Deux vecteurs u et v de E sont dits *orthogonaux* si $(u|v) = 0$. On note alors parfois $u \perp v$.

2.b

Exemple (Vecteurs orthogonaux)

- (1) Le seul vecteur orthogonal à lui-même est le vecteur nul (d'après l'axiome de séparation).
- (2) Le seul vecteur orthogonal à tous les vecteurs de E est donc *a fortiori* le vecteur nul.
- (3) Pour le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}[X]$, des polynômes respectivement pair et impair sont orthogonaux.
- (4) Pour le produit $(f, g) \mapsto \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$ sur $\mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$, des fonctions respectivement paire et impaire sont orthogonales.
- (5) Si on munit E de deux produits scalaires, deux vecteurs peuvent être orthogonaux pour l'un mais pas pour l'autre (donner un exemple).

i

Définition (Famille orthogonale, orthonormée)

On dit qu'une famille $(u_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est *orthogonale* si les u_i sont orthogonaux deux à deux. Si de plus ils sont unitaires, la famille est alors dite *orthonormale* (ou *orthonormée*).

2.c

Exemple (Familles orthonormées)

Dans tous les exemples de produits scalaires canoniques (*i.e.* dans \mathbb{R}^n et $\mathbb{R}[X]$), la base canonique de l'espace sous-jacent est une base orthonormée, d'où leur nom.

ii

Proposition (Expression d'un produit scalaire en base orthonormée)

On suppose que E est un espace euclidien de dimension n , et que $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E . Soit $u = \sum_{i=1}^n u_i e_i$ et $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$ des vecteurs de E donnés avec leurs décompositions respectives dans \mathcal{B} . On a :

$$(u|v) = \sum_{i=1}^n u_i v_i.$$

En particulier,

$$\|u\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2}.$$

2.a

Attention ! L'expression du produit scalaire *dans une base orthonormée* est très agréable, mais cette formule n'est *pas valable* pour une base quelconque.

Exercice (Produit scalaire orthonormalisant une base)

Montrer, réciproquement, que si E est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, de base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, et si on pose

$$(u|v) = \sum_{i=1}^n u_i v_i$$

pour tous vecteurs $u = \sum_{i=1}^n u_i e_i$ et $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$ de E , alors on obtient un produit scalaire sur E , pour lequel \mathcal{B} est orthonormale.

3

Ainsi, pour toute base d'un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie non nulle, il existe un unique produit scalaire rendant cette base orthonormée.

La famille $(u_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est orthonormale si et seulement si pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on a $(u_i|u_j) = \delta_{i,j}$.

Proposition (Liberté d'une famille orthogonale de vecteurs non nuls)

Une famille orthogonale constituée de vecteurs tous non nuls est libre. En particulier, toute famille orthonormée de E est libre.

2.b

Démonstration

□

Ainsi, une base orthonormée de E euclidien de dimension n n'est rien d'autre qu'une famille orthonormée, de cardinal n .

Proposition (Relation de Pythagore)

Soit $(u_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille orthogonale. On a :

$$\left\| \sum_{i=1}^p u_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^p \|u_i\|^2$$

2.c

Démonstration

□

La réciproque est vraie pour $p = 2$ (si $\|u_1 + u_2\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2$, alors (u_1, u_2) est orthogonale), mais pas pour $p \geq 3$.

La question de l'existence d'une base orthonormale se pose naturellement, ainsi que celle de l'obtention d'une telle base.

Proposition (Existence d'une base orthonormale)

Tout espace euclidien de dimension non nulle admet une base orthonormée.

2.d

Démonstration

□

Proposition (Ajout orthonormé à un hyperplan)

Soit E euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose disposer d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_{n-1})$ d'un hyperplan \mathcal{H} de E . Il existe alors exactement deux vecteurs permettant de compléter \mathcal{B} en une base orthonormée de E , et ces deux vecteurs sont opposés.

2.e

Démonstration

□

Illustration

Corollaire (Théorème de la base orthonormée incomplète)

Soit E euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Toute famille orthonormée de E se complète en une base orthonormée de E .

2.f

Démonstration

□

Proposition (Décomposition d'un vecteur dans une base orthonormée)

Soit E un espace euclidien, de base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Pour tout vecteur u de E , on a :

$$u = \sum_{i=1}^n (u|e_i)e_i.$$

2.g

Démonstration

□

Attention ! Cette formule n'est *a priori* valable que si la base est *orthonormée*.

2.2. ORTHOGONAL D'UNE PARTIE DE E

E désigne un espace préhilbertien réel, et F un sous-espace vectoriel de E .

Définition (Orthogonal d'une partie)

Soit A une partie de E . On appelle *orthogonal* de A (dans E), et on note A^\perp ou A° , l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à tous les vecteurs de A .

Deux parties non vides A et B de E sont dites *orthogonales* si

$$\forall (a, b) \in A \times B, \quad (a|b) = 0$$

2.d

Illustration

Exemple (Orthogonal d'une partie)

- (1) $\{0_E\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0_E\}$.
- (2) Les sous-espaces de $\mathcal{C}^0([-1,1])$ constitués respectivement des fonctions paires et impaires sont orthogonaux pour le produit scalaire $(f, g) \mapsto \int_{[-1,1]} fg$.
- (3) Si deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont supplémentaires orthogonaux, alors on obtient une base orthonormée de E en concaténant des base orthonormées de F et de G .

iii

Proposition (Propriétés de l'orthogonal)

Soit A et B deux parties de E .

- (1) A et B sont orthogonales si et seulement si $A \subset B^\perp$ (si et seulement si $B \subset A^\perp$).
- (2) Si $A \subset B$, alors $B^\perp \subset A^\perp$.
- (3) $A \subset A^{\perp\perp}$.
- (4) A^\perp est un sous-espace vectoriel de E (même si A n'en est pas un).
- (5) $A^\perp = (\text{Vect}(A))^\perp$. En particulier, si F est engendré par (f_1, \dots, f_k) , alors $u \in F^\perp$ si et seulement si u est orthogonal à tous les vecteurs f_1, \dots, f_k .
- (6) F et F^\perp sont en somme directe.

2.h

Démonstration

□

Proposition (Supplémentaire orthogonal)

On suppose ici E euclidien. On a $E = F \oplus F^\perp$ et $F^{\perp\perp} = F$.

2.i

Démonstration

□

Ces formules sont généralement fausses dans un espace préhilbertien réel :

Définition (Supplémentaire orthogonal)

On suppose E euclidien. Le sous-espace vectoriel F^\perp de E est appelé le *supplémentaire orthogonal* de F (dans E).

2.e

Dans ce cadre, il y a bien unicité du supplémentaire *orthogonal* de F , qui est souvent à privilégier par rapport aux autres supplémentaires si la structure euclidienne de E intervient.

2.3. FORMES LINÉAIRES SUR UN ESPACE EUCLIDIEN

E est un espace euclidien.

Soit $a \in E$. L'application $\varphi_a : x \mapsto (a|x)$ est une forme linéaire sur E . Son noyau est E si $a = 0_E$, et l'hyperplan $(\mathbb{R}a)^\perp$ sinon.

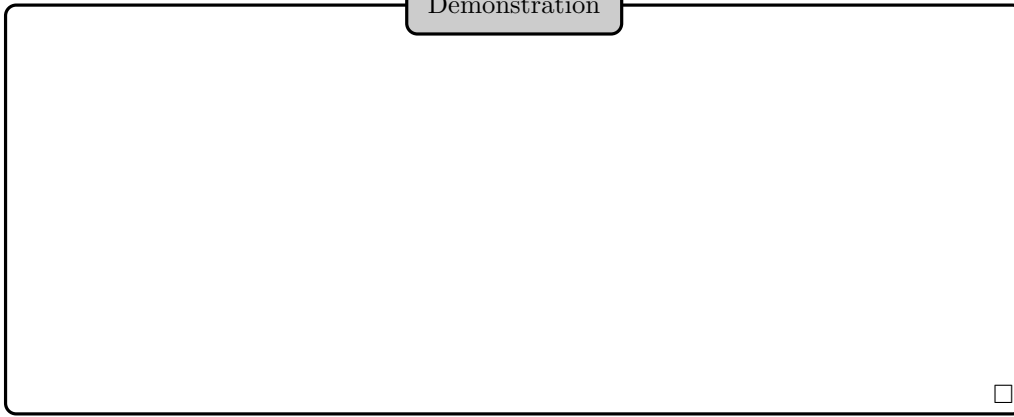
Proposition (Isomorphisme explicite entre E et son dual)

L'application $a \mapsto \varphi_a$ est un isomorphisme de E sur son dual $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.
En particulier, pour toute forme linéaire f sur E , il existe un unique vecteur a de E tel que $f = \varphi_a$, *i.e.*

$$\forall x \in E, \quad f(x) = (a|x).$$

2.j

Démonstration



Exemple (Produit vectoriel)

Dans \mathbb{R}^3 euclidien canonique, fixons deux vecteurs u et v . L'application $x \mapsto \det(u, v, x)$ (\det désigne le déterminant dans la base canonique) est une forme linéaire sur \mathbb{R}^3 , ce qui conduit à la définition du produit vectoriel $u \wedge v$.

iv

En dimension infinie, toute forme linéaire n'est pas nécessairement le produit scalaire par un vecteur donné, donner un exemple :

2.4. PROJECTEURS ORTHOGONAUX DANS UN ESPACE EUCLIDIEN

E désigne un espace euclidien, F un sous-espace vectoriel de E .

Définition (Projecteur orthogonal)

Le projecteur p_F sur F parallèlement à F^\perp est appelée *projecteur orthogonal* sur F . La symétrie s_F par rapport à F parallèlement à F^\perp est appelée *symétrie orthogonale* par rapport à F .

On appelle *réflexion* de E toute symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan de E .

2.f

Ces définitions sont licites car F et F^\perp sont supplémentaires dans E .

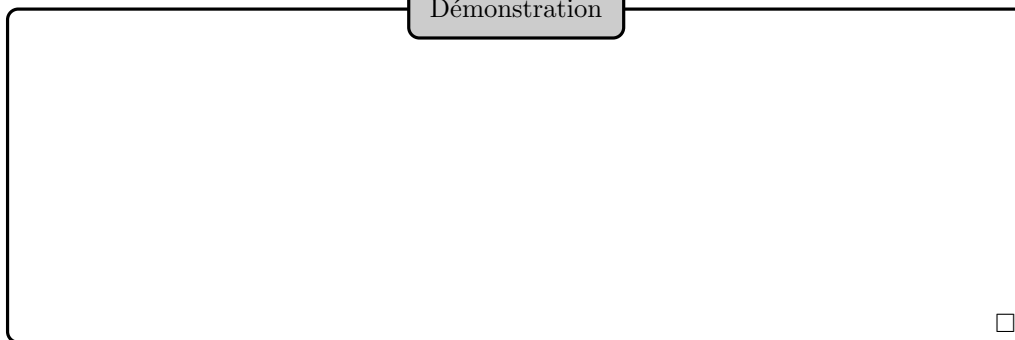
Proposition (Expression d'une projection orthogonale en base orthonormée)

Si (e_1, \dots, e_p) est une base orthonormée de F , alors, pour tout vecteur u de E , on a

$$p_F(u) = \sum_{k=1}^p (e_k | u) e_k.$$

2.k

Démonstration



On a $p_{F^\perp} = \text{Id}_E - p_F$, $s_F = 2p_F - \text{Id}_E$, et $s_{F^\perp} = -s_F$. Cela permet par exemple d'exprimer simplement une réflexion :

Exercice (Expression d'une réflexion)

Soit H un hyperplan de E , d'orthogonal dirigé par un vecteur a .

1 On suppose a unitaire. Exprimer $r(u)$ en fonction de u et de a , où $u \in E$ et r est la réflexion par rapport à H .

2 Donner une formule lorsque a n'est plus supposé unitaire.

4

Proposition (Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt)

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Il existe alors une unique base orthonormale $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ de E vérifiant :

$$(1) \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \text{Vect}(f_1, \dots, f_k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k).$$

$$(2) \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad (f_k | e_k) > 0.$$

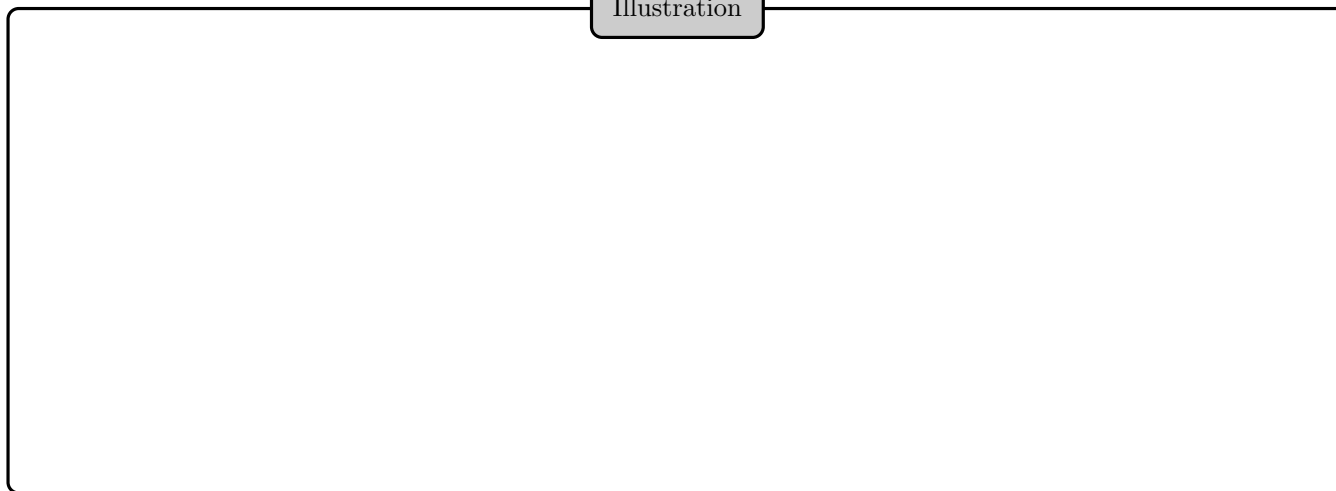
2.1

Définition (Orthonormalisation de Gram-Schmidt)

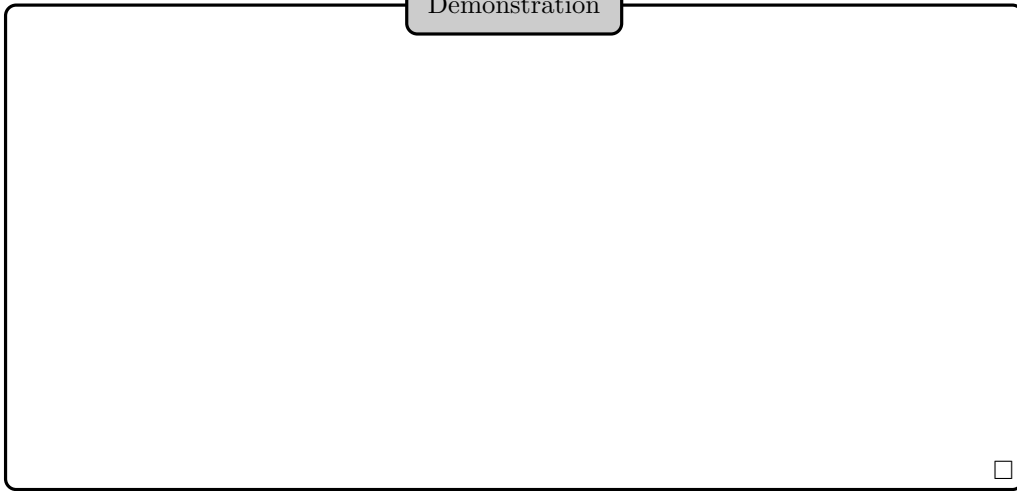
Dans ce contexte, on dit que \mathcal{C} est l'*orthonormalisée de (Gram-)Schmidt* de \mathcal{B} .

2.g

Illustration



Démonstration



Orthonormalisation de Gram-Schmidt

On peut interpréter ce procédé de manière géométrique : f_1 est le normalisé de e_1 , et pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, f_k est le normalisé de $e_k - p_{F_{k-1}}(e_k)$, où $p_{F_{k-1}}$ désigne le projecteur orthogonal sur $F_{k-1} = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{k-1})$. Puisque (f_1, \dots, f_{k-1}) est une base orthonormée de F_{k-1} , on a

$$p_{F_{k-1}}(e_k) = \sum_{i=1}^{k-1} (e_k | f_i) f_i,$$

2.1

de sorte que

$$f_k = \frac{e_k - \sum_{i=1}^{k-1} (e_k | f_i) f_i}{\left\| e_k - \sum_{i=1}^{k-1} (e_k | f_i) f_i \right\|}.$$

Le procédé d'orthonormalisation de Schmidt est coûteux, c'est pourquoi il constitue un dernier recours : il vaut mieux trouver des informations pertinentes sur la structure euclidienne avant d'y faire appel.

Exercice (Matrice de passage à l'orthonormalisée de Schmidt)

Dans le contexte de la proposition précédente, que dire de la matrice $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}}$?

5

Exercice (Une symétrie orthogonale est auto-adjointe)

Soit s une symétrie orthogonale de E .

1 Montrer que pour tout $(u, v) \in E^2$, $(s(u)|v) = (u|s(v))$.

2 En déduire que pour tout $(u, v) \in E^2$, $(s(u)|s(v)) = (u|v)$.

6

Exercice (Réflexion échangeant deux vecteurs distincts de même norme)

Soit $a, b \in E$, $a \neq b$, $\|a\| = \|b\|$. Montrer qu'il existe une unique réflexion échangeant a et b .

7

Définition (Distance d'un vecteur à un sous-espace)

Soit $u \in E$. Soit p le projecteur orthogonal sur F . La quantité

$$d(u, F) = \inf\{\|u - x\|, x \in F\}$$

est appelée *distance* du vecteur u au sous-espace vectoriel F .

2.h

Proposition (Interprétation de la distance d'un vecteur à un sous-espace)

Le projeté orthogonal de u sur F est l'unique élément de F qui minimise la distance de x à F .

2.m

Illustration

Démonstration

□

Calcul pratique de distance

Comment, en pratique, calculer la distance d'un vecteur u à un sous-espace F ? Déjà, si on travaille en dimension finie, on a $d(u, F) = \|p_{F^\perp}(u)\|$, et il est donc parfois avantageux de s'intéresser à F^\perp (si par exemple F est un hyperplan et qu'il est facile de trouver un vecteur non nul de F^\perp).

Ensuite, on peut tenter de trouver une base orthonormée (e_1, \dots, e_p) de F , afin d'exprimer $p_F(u)$. On a même un raccourci dans ce cas, car le théorème de Pythagore permet de donner la formule :

$$d(u, F)^2 = \|u\|^2 - \sum_{i=1}^p (u|e_i)^2.$$

Une autre approche consiste à déterminer $p_F(u)$ sans chercher une base orthonormée de F , mais en le caractérisant comme unique vecteur v de F tel que $u - v$ soit orthogonal à tout vecteur de F : on prend alors une base (non orthonormée) $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ de F , on décompose v dans \mathcal{B} : $v = \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i$, et on résout le système d'inconnues $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, d'équations $(v|e_j) = (u|e_j)$ (j parcourant $\llbracket 1, p \rrbracket$). Une fois v déterminé, on calcule $d(u, F) = \|u - v\|$.

2.2

Exercice (Un calcul de distance)

1 Pour le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, calculer la distance de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

à $F = \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, puis à $G = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$.

2 Pour le produit scalaire $(f, g) \mapsto \int_{[-1, 1]} fg$ sur $\mathcal{C}^0([-1, 1])$, calculer la distance de \cos à $\text{Vect}(f_0, f_1, f_2)$, où $f_k(t) = t^k$ pour tout $(k, t) \in \llbracket 0, 2 \rrbracket \times [-1, 1]$.

8

3. AUTOMORPHISMES ORTHOGONAUX

3.1. GROUPE ORTHOGONAL

Soit E un espace vectoriel euclidien non nul.

Définition (Endomorphisme orthogonal)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que l'endomorphisme f de E est *orthogonal* (ou que c'est une *isométrie vectorielle*) s'il conserve la norme, i.e. :

$$\forall u \in E, \quad \|f(u)\| = \|u\|$$

3.a

Tout endomorphisme orthogonal est en fait un automorphisme :

Exemple (Endomorphismes orthogonaux)

- (1) Les applications Id_E et $-\text{Id}_E$ sont des automorphismes orthogonaux de E .
- (2) Plus généralement, toute symétrie orthogonale est un automorphisme orthogonal.
- (3) Le seul projecteur orthogonal qui soit un endomorphisme orthogonal de E est Id_E .

i

Proposition (Groupe orthogonal d'un espace euclidien)

L'ensemble des automorphismes orthogonaux de E est un sous-groupe de $\text{GL}(E)$.

3.a

Démonstration

□

Définition (Groupe orthogonal d'un espace euclidien)

L'ensemble des automorphismes orthogonaux de E est appelé *groupe orthogonal* de E et noté $O(E)$.

3.b

Proposition (Caractérisation des automorphismes orthogonaux)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) f conserve le produit scalaire ($\forall u, v \in E, (f(u)|f(v)) = (u|v)$).
- (2) f est orthogonal.
- (3) f transforme toute base orthonormale de E en une base orthonormale.
- (4) f transforme une base orthonormale de E en une base orthonormale.

3.b

Démonstration

□

Exercice (Orthogonal d'un sous-espace invariant par un automorphisme orthogonal)

Soit $\varphi \in O(E)$, et F un sous-espace vectoriel de E stable par φ . Montrer qu'alors F est globalement invariant par φ , i.e. $\varphi(F) = F$, et que F^\perp est également globalement invariant par φ .

9

Définition (Automorphismes orthogonaux positifs ou négatifs)

Soit E un espace euclidien, $f \in O(E)$. On dit que f est un *automorphisme orthogonal positif*, ou une *rotation (vectorielle)* (resp. un *automorphisme orthogonal négatif*), si $\det(f) > 0$ (resp. $\det(f) < 0$).

On note $SO(E)$ ou $O^+(E)$, et appelle *groupe spécial orthogonal de E* , l'ensemble des automorphismes orthogonaux positifs de E , $O^-(E)$ l'ensemble des automorphismes orthogonaux *négatifs* de E .

3.c

Démonstration

Justification du fait que $SO(E)$ soit bien un groupe (pour la composition) :

□

Évidemment, $O^-(E)$ n'est pas un groupe pour la composition :

3.2. MATRICES ORTHOGONALES

n désigne un entier naturel non nul.

Proposition (Matrices orthogonales)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) $M^t M = I_n$.
- (2) ${}^t M M = I_n$.
- (3) M est inversible, et $M^{-1} = ({}^t M)$.
- (4) Les vecteurs colonnes de M forment une base orthonormale de \mathbb{R}^n (euclidien canonique).
- (5) Les vecteurs lignes de M forment une base orthonormale de \mathbb{R}^n (euclidien canonique).

3.c

Définition (Matrice orthogonale)

Lorsqu'une des (donc toutes les) conditions ci-dessus est réalisée, on dit que la matrice M est *orthogonale*.

3.d

Démonstration

□

Proposition (Groupe orthogonal d'indice n)

L'ensemble $O(n)$ des matrices orthogonales de taille n est un sous-groupe de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$.

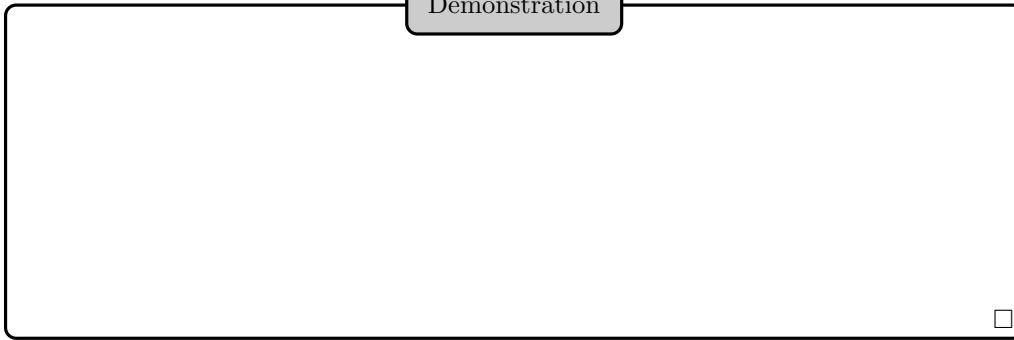
3.d

Définition (Groupe orthogonal d'indice n)

Le groupe $O(n)$ est appelé *groupe orthogonal* d'indice n .

3.e

Démonstration



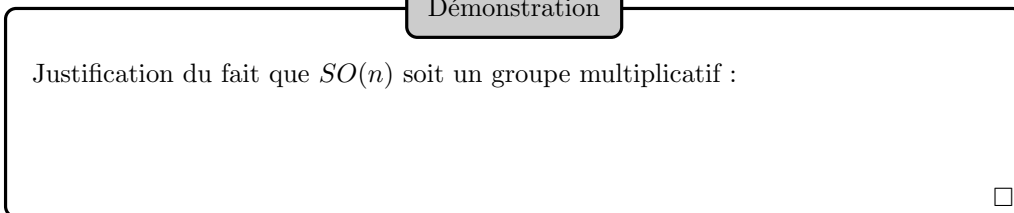
Une matrice de $O(n)$ est nécessairement de déterminant 1 ou -1 , mais la réciproque est fautive (si $n \geq 2$) :

Définition (Groupe spécial orthogonal)

Le *groupe spécial orthogonal d'indice n* , noté $SO(n)$ ou $O^+(n)$, est l'ensemble des matrices orthogonales de taille n de déterminant 1.
 On pose également $O^-(n) = \{M \in O(n), \det M = -1\}$.
 Les matrices de $SO(n)$ sont dites orthogonales *positives*, Les matrices de $O^-(n)$ sont dites orthogonales *négatives*

3.f

Démonstration



Bien sûr, $O^-(n)$ n'est pas un groupe multiplicatif :

Changer deux colonnes (ou deux lignes) d'une matrice orthogonale positive (resp. négative) la change en une matrice orthogonale négative (resp. positive). De même si on change une colonne (ou une ligne) en son opposée.

Exemple (Matrices orthogonales)

(1) La matrice

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

est orthogonale.

(2) Les matrices

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix},$$

où α décrit \mathbb{R} , sont orthogonales. Nous verrons plus tard qu'il s'agit des seules de taille 2.

ii

Exercice (Coefficients manquants d'une matrice orthogonale positive)

Compléter la matrice $A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & 3 & \cdot \\ -2 & 6 & \cdot \\ 3 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ en une matrice orthogonale positive.

10

Proposition (Lien entre automorphismes orthogonaux et matrices orthogonales)

Soit f un endomorphisme de E , et M la matrice de f dans une base *orthonormale*. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) f est un automorphisme orthogonal de E .
- (2) M est une matrice orthogonale.

3.e

Démonstration

□

Attention ! Le lien entre automorphismes orthogonaux et matrices orthogonales s'effectue en *base orthonormée*.

Les groupes $O(E)$ et $O(n)$ donc sont isomorphes par choix d'une base orthonormale \mathcal{B} de E via $f \mapsto M_{\mathcal{B}}(f)$. De même pour $SO(E)$ et $SO(n)$.

Les matrices orthogonales sont les matrices de passage entre bases orthonormales.

Si $f \in O(E)$, alors $\det f = \pm 1$ (la réciproque est fautive), de sorte que $SO(E) = \{f \in O(E), \det(f) = 1\}$ et $O^-(E) = \{f \in O(E), \det(f) = -1\}$.

$\text{Id}_E \in SO(E)$, mais $-\text{Id}_E$ appartient à $SO(E)$ ou $O^-(E)$ selon la parité de $\dim E$

Exercice (Négativité des réflexions)

Montrer qu'une réflexion est toujours un automorphisme orthogonal négatif.

11

4. AUTOMORPHISMES ORTHOGONAUX DU PLAN

On s'intéresse dans cette sous-section au cas où E est euclidien de dimension 2. On suppose notre espace orienté, *i.e.* muni d'une base que l'on qualifie de directe. L'application \det désignera le déterminant dans n'importe quelle base orthonormée directe.

La matrice de passage d'une base orthonormée à une autre est donc orthogonale positive si l'orientation est inchangée, orthogonale négative sinon.

Pour tout réel α , on note

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Proposition (Groupe (spécial) orthogonal d'indice 2)

On a

$$O(2) = \{R(\alpha), \alpha \in \mathbb{R}\} \cup \{S(\alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$$

et

$$SO(2) = \{R(\alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$$

4.a

Démonstration

□

Les rotations non triviales (*i.e.* distinctes de l'identité) n'admettent aucun vecteur non nul invariant. Tout autre automorphisme orthogonal de E admet un vecteur non nul invariant.

L'application $R : \alpha \mapsto R(\alpha)$ est un morphisme surjectif du groupe commutatif $(\mathbb{R}, +)$ sur $SO(2)$, donc $SO(2)$ est commutatif. Le noyau de R est $2\pi\mathbb{Z}$.

Les automorphismes orthogonaux négatifs du plan euclidien sont donc les réflexions (ici, les hyperplans sont des droites). Plus précisément, si $S(\alpha)$ est la matrice dans (e_1, e_2) de $s \in O(E)$, alors s est la symétrie orthogonale par rapport à $\mathbb{R}(\cos \frac{\alpha}{2} e_1 + \sin \frac{\alpha}{2} e_2)$.

Illustration

Exercice ($O(2)$ est engendré par les réflexions)

Montrer que tout produit de deux réflexions est une rotation, que, réciproquement, toute rotation s'écrit comme produit de deux réflexions.
En particulier, le groupe $O(2)$ est engendré par ses réflexions.

12

Proposition (Mesure d'angle d'une rotation)

Pour toute rotation vectorielle r de E (espace euclidien de dimension 2), il existe un réel α , unique modulo 2π , tel que dans toute base orthonormée directe de E , la matrice de r soit égale à $R(\alpha)$.

4.b

Définition (Mesure d'angle d'une rotation)

On dit que α est une *mesure de l'angle* de la rotation r .

4.a

Démonstration

□

Si \vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs de même norme non nulle, il existe une unique rotation vectorielle r telle que $r(\vec{u}) = \vec{v}$. Si cette rotation est $r(\alpha)$, alors :

$$\vec{v} = \cos(\alpha)\vec{u} + \sin(\alpha)\vec{u}',$$

où \vec{u}' est choisi afin que (\vec{u}, \vec{u}') soit une base orthonormée directe de E .

Définition (Mesure d'angle entre deux vecteurs non nuls)

Si \vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs non nuls, on appelle *mesure* de l'angle (orienté) des vecteurs \vec{u} , \vec{v} , noté (\vec{u}, \vec{v}) , une mesure α de l'unique rotation transformant $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ en $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$, et l'on note alors

$$(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \alpha [2\pi]$$

4.b

La relation de Chasles angulaire se déduit de la relation $R(\alpha + \alpha') = R(\alpha)R(\alpha')$. On retrouve bien entendu les autres propriétés vues en début d'année.

Proposition (Détermination de l'angle d'une rotation)

On se donne deux vecteurs unitaires \vec{u} et \vec{v} , et soit α une mesure de l'angle $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$: on a

$$\cos \alpha = \vec{u} \cdot \vec{v} \quad \text{et} \quad \sin \alpha = \det(\vec{u}, \vec{v})$$

En particulier, si r est une rotation d'angle de mesure α , alors pour tout vecteur unitaire a , on a

$$\cos \alpha = (a|r(a)) \quad \text{et} \quad \sin \alpha = \det(a, r(a))$$

4.c

Démonstration

□

Que faire si u et v ne sont pas unitaires ?

Proposition (Effet d'un automorphisme orthogonal sur les angles orientés)

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls du plan, et f un automorphisme orthogonal de E .

(1) Si f est une rotation, on a

$$\widehat{(f(\vec{u}), f(\vec{v}))} \equiv \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} [2\pi]$$

(2) Si f est une réflexion, on a

$$\widehat{(f(\vec{u}), f(\vec{v}))} \equiv -\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} [2\pi]$$

4.d

Démonstration

On se ramène au cas où \vec{u} et \vec{v} sont unitaires. Soit α (resp. β) une mesure de l'angle orienté $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ (resp. $\widehat{(f(\vec{u}), f(\vec{v}))}$). Comme f conserve le produit scalaire, $\cos(\alpha) = \cos(\beta)$. Par définition du déterminant, $\det(f(\vec{u}), f(\vec{v})) = \det(f) \det(\vec{u}, \vec{v})$. Ainsi, $\sin(\beta) = \det(f) \sin(\alpha)$, d'où le résultat.

□

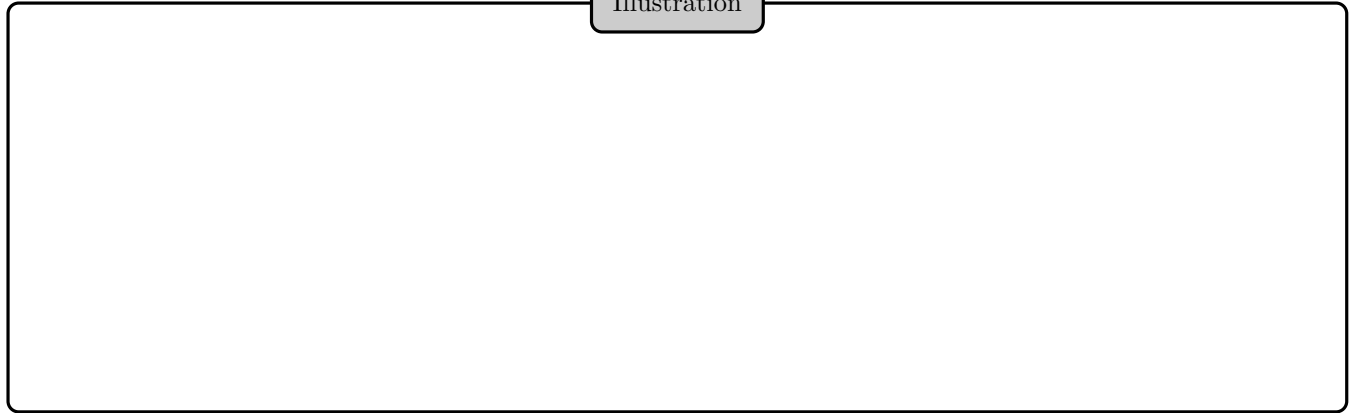
5. NOTION D'ESPACE AFFINE : DISTINGUER POINT ET VECTEUR

Nous avons déjà un cadre algébrique pour parler de géométrie : celui des \mathbb{R} -espaces vectoriels. Pourtant, comme son nom l'indique, ce cadre est surtout satisfaisant pour parler ... de vecteurs. Nous aimerions également pouvoir parler de points d'un espace. Cela nous conduit à nous pencher sur ce qui distingue vecteurs (formant l'ensemble structuré E) et points (formant un ensemble structuré noté \mathcal{E}). En réalité, la différence ne tiendra pas tant à la nature de ces objets qu'aux opérations permises sur lesdits objets.

Nous aimerions entre autres pouvoir parler de droites et de plans qui ne passent pas par l'origine. En fait, la notion de point doit être indépendante de l'origine. Quelles opérations peut-on définir si on supprime l'origine ?

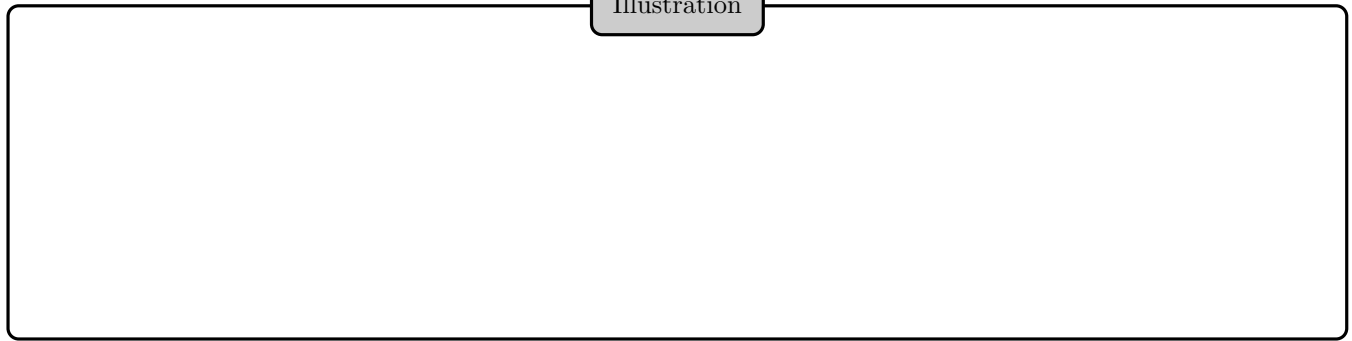
Déjà, il nous sera interdit de parler de la somme de deux points, ou de la multiplication d'un point par un scalaire :

Illustration



En revanche, nous pourrions ajouter un vecteur u à un point M , obtenant le *translaté* $M + u$ du point M par le vecteur u :

Illustration



Partant, nous pourrions définir la différence $B - A$ de deux points, dont le résultat sera un vecteur \overrightarrow{AB} .

Étant donné l'espace vectoriel E , on appelle *espace affine* associé à E et on note \mathcal{E} l'ensemble E , muni de l'opération

$$\begin{aligned} S : \mathcal{E} \times E &\rightarrow \mathcal{E} \\ (M, u) &\mapsto M + u \end{aligned}$$

On a donc, pour tout $(M, u, v) \in \mathcal{E} \times E \times E$:

$$M + (u + v) = (M + u) + v.$$

De plus, $M \mapsto M + u$ est une permutation de \mathcal{E} , appelée *translation selon le vecteur u* , notée t_u , de bijection réciproque t_{-u} .

Ainsi,

$$\begin{aligned} T : E &\rightarrow \mathcal{S}_{\mathcal{E}} \\ u &\mapsto t_u \end{aligned}$$

est un morphisme² de $(E, +)$ sur $(\mathcal{S}_{\mathcal{E}}, \circ)$, tel que pour tout $(M, N) \in \mathcal{E}^2$, il existe un unique $u \in E$ tel que $N = M + u$. Ce vecteur u est noté $N - M$, ou \overrightarrow{MN} .

Pour tout $M_0 \in \mathcal{E}$, l'application

$$\begin{aligned} I_{M_0} : \mathcal{E} &\rightarrow E \\ M &\mapsto M - M_0 \end{aligned}$$

est une bijection, qui permet d'identifier \mathcal{E} et E par le choix de l'origine M_0 .

En pratique, nous identifierons \mathcal{E} et E par choix de l'origine 0_E (sauf mention contraire).

Pour toute partie Ω de \mathcal{E} , et $u \in E$, on note $\Omega + u$ l'image de Ω par t_u , *i.e.*

$$\Omega + u = \{\omega + u, \omega \in \Omega\}$$

2. En particulier, l'ensemble des translations selon un vecteur de E est un sous-groupe de $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}$.

Pour toute partie G de E , et tout $M \in \mathcal{E}$, on note $M + G$ l'ensemble

$$M + G = \{M + g, g \in G\}.$$

Nous pouvons également définir le barycentre d'une famille pondérée (finie) de points de \mathcal{E} , de poids total non nul (ce qui a été fait dans chapitre de géométrie plane se généralise aisément). On définit donc également les notions de segment, de convexité, d'enveloppe convexe, etc.

6. SOUS-ESPACES AFFINES

Définition (Sous-espace affine)

On appelle *sous-espace affine* de \mathcal{E} toute partie de \mathcal{E} de la forme $M_0 + F$, où F est un sous-espace vectoriel de E , et $M_0 \in \mathcal{E}$.
 $M_0 + F$ est appelé *sous-espace affine de passant par M_0 et dirigé par F* .

6.a

Exemple (Sous-espace affine)

- (1) L'ensemble vide n'est pas un sous-espace affine.
- (2) Tout singleton est un sous-espace affine, dirigé par $\{0_E\}$.
- (3) \mathcal{E} est un sous-espace affine de lui-même.
- (4) En prenant $M_0 = 0_E$, tout sous-espace vectoriel de E peut être vu comme un sous-espace affine de \mathcal{E} (ses éléments sont des vecteurs ou des points, selon le point de vue).
- (5) Les sous-espaces affines du plan sont les singletons, les droites, le plan.
- (6) L'ensemble des solutions de $y' - y = x - 1$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

i

Proposition (Description d'un sous-espace affine)

Pour tout point M du sous-espace affine \mathcal{F} dirigé par F , on a

$$\mathcal{F} = M + F$$

et

$$F = \{N - M, N \in \mathcal{F}\} = \{\overrightarrow{MN}, N \in \mathcal{F}\}$$

6.a

Démonstration

□

Définition (Direction d'un sous-espace affine)

La *direction* de l'espace affine $\mathcal{F} = M_0 + F$ est le sous-espace vectoriel F de E .

6.b

Cette définition est licite (*i.e.* existe, est unique, et ne dépend pas de $M_0 \in \mathcal{F}$) d'après la proposition précédente.

Le choix d'une origine $M_0 \in \mathcal{F}$ fournit une bijection entre \mathcal{F} et F , ce qui permet d'identifier points et vecteurs. Cependant, cette identification n'est pas systématique.

Définition (Droites et plans affines)

La *dimension* d'un sous-espace affine est la dimension de sa direction. On appelle *droite affine* (resp. *plan affine*, resp. *hyperplan affine*) de \mathcal{E} tout sous-espace affine de \mathcal{E} dont la direction est une droite vectorielle (resp. un plan, resp. un hyperplan). Tout vecteur engendrant la direction d'une droite affine \mathcal{D} est appelé *vecteur directeur* de \mathcal{D} .

6.c

Définition (Parallélisme de sous-espaces affines)

Soit \mathcal{W} et \mathcal{W}' deux sous-espaces affines d'un espace affine \mathcal{E} , de directions respectives W et W' . On dit que \mathcal{W} est *parallèle* à \mathcal{W}' si $W \subset W'$. On dit que \mathcal{W} et \mathcal{W}' sont *parallèles* si $W = W'$.

6.d

Illustration

Deux sous-espaces affines sont donc parallèles si et seulement si chacun est parallèle à l'autre. Cela définit une relation d'équivalence.

En revanche, la relation « être parallèle à » est réflexive et transitive, mais non symétrique : ce n'est pas une relation d'équivalence.

Exemple (Parallélisme)

- (1) Un sous-espace affine réduit à un point est parallèle à tout autre sous-espace affine.
- (2) Deux droites affines sont parallèles si et seulement si elles admettent un vecteur directeur commun.
- (3) Un plan n'est jamais parallèle à une droite.
- (4) Deux sous-espaces parallèles sont soit disjoints, soit égaux.
- (5) L'intersection de deux sous-espaces affines non parallèles l'un à l'autre peut être vide.

ii

Proposition (Intersection de sous-espaces affines)

L'intersection de deux sous-espaces affines \mathcal{W} et \mathcal{W}' de \mathcal{E} de directions respectives W et W' , si elle n'est pas vide, est un sous-espace affine de \mathcal{E} , de direction $W \cap W'$.

6.b

Démonstration

□

Proposition (Structure de l'ensemble des solutions d'une équation linéaire)

Soit u une application linéaire de E dans F , et $b \in F$. L'ensemble Ω des solutions de l'équation linéaire $u(x) = b$, s'il n'est pas vide, est un sous-espace affine de E , dirigé par $\ker(u)$.

6.c

Démonstration

□

En particulier, si cette équation admet au moins deux solutions, alors elle en admet une infinité.

Si $b \neq 0_F$, Ω n'est en aucun cas un sous-espace vectoriel de E .

La solution générale de l'équation $u(x) = b$, s'écrit donc : solution particulière + solution générale de l'équation homogène associée.

On retrouve dans un cadre plus général la démarche de résolution des équations différentielles linéaires vues en début d'année.

7. HYPERPLANS AFFINES D'UN ESPACE EUCLIDIEN

On peut voir les éléments d'un espace euclidien E comme des points. On obtient ce qu'on appelle un *espace affine euclidien* \mathcal{E} .

La *distance* d'un point M à un sous-espace affine \mathcal{F} est la plus petite des distances entre M et un point de \mathcal{F} .

Illustration

Lorsque l'espace est orienté, un vecteur normal (non nul) \vec{n} de \mathcal{H} (i.e. un élément non nul de H^\perp) définit une *orientation* de \mathcal{H} . Les bases orthonormées de H telles que la concaténée avec \vec{n} soit directe seront dites directes.

Si A est un point de \mathcal{H} , alors $\mathcal{H} = \{M \in \mathcal{E}, \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0\}$, et les lignes de niveau de $M \mapsto \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}$ sont les hyperplans parallèles à \mathcal{H} .

On obtient aisément des équations d'un hyperplan affine dans un repère orthonormal. Donner des exemples, notamment dans \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 .

Proposition (Distance à un hyperplan affine)

Soit \mathcal{H} un hyperplan affine passant par A , et admettant \vec{n} pour vecteur normal unitaire. Soit $M \in \mathcal{E}$. La distance de M à \mathcal{H} vaut

$$|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}|$$

7.a

Démonstration

□

8. FEUILLE DE TD 25 : ESPACES EUCLIDIENS

On se placera parfois implicitement dans \mathbb{R}^p euclidien canonique (pour un certain entier naturel non nul p).
Sauf mention contraire, E désigne un espace euclidien.

On vérifiera que les applications qualifiées de produits scalaires en sont vraiment.

8.1. PRODUITS SCALAIRES

Exercice 1 (Exemples de produits scalaires)

0

1 Montrer que l'on définit un produit scalaire sur $\mathcal{C}^1([0, 1])$ en posant :

$$\forall (f, g) \in \mathcal{C}^1([0, 1])^2, \langle f, g \rangle = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt.$$

2 Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'application $(P, Q) \mapsto \sum_{k=0}^n P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 2 (Relations entre orthogonaux)

0

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Montrer que :

- 1 Si $F \subset G$ alors $G^\perp \subset F^\perp$.
- 2 $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
- 3 $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.
- 4 $(F^\perp)^\perp = F$.

Exercice 3 (Recherche de base orthonormée)

0

1 Trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}_3[X]$ pour le produit scalaire donné par

$$(P|Q) = \int_0^2 P(t)Q(t)dt.$$

2 Soit $E = \mathbb{R}_4[X]$ muni du produit scalaire :

$$(P|Q) = \sum_{i=0}^4 P(i)Q(i)$$

Chercher une base orthonormée de E .

Exercice 4 (Produit scalaire canonique matriciel)

1

Pour tous éléments A, B de $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit $(A | B) = \text{tr}({}^t AB)$.

1 Vérifier que c'est un produit scalaire. Pourquoi l'appelle-t-on produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Remarque : la même formule définit plus généralement un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, dit canonique.

2 Déterminer l'orthogonal de l'espace des matrices scalaires, des matrices symétriques.

3 Soit $P \in O(n)$. Montrer que les applications

$$\phi_P : A \mapsto AP \text{ et } \psi_P : A \mapsto P^{-1}AP$$

sont orthogonales.

4 Réciproquement, si ϕ_P ou $\psi_P \in O(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, est-ce que $P \in O(n)$? (réponses différentes pour ϕ et ψ).

Exercice 5 (Encore les fonctions paires et impaires)

1

Soit $[-a, a]$ un segment centré en 0, et $\mathcal{C}([-a, a])$ le \mathbb{R} -espace vectoriel des fonctions continues sur $[-a, a]$, à valeurs réelles. On munit $\mathcal{C}([-a, a])$ du produit scalaire classique $(f, g) \mapsto \int_{[-a, a]} fg$. Soit \mathcal{P} (resp. \mathcal{I}) l'ensemble des fonctions paires (resp. impaires) de $\mathcal{C}([-a, a])$.

1 Montrer que \mathcal{I} et \mathcal{P} sont orthogonaux et supplémentaires dans $\mathcal{C}([-a, a])$.

2 Expression de la symétrie orthogonale par rapport à \mathcal{P} .

Exercice 6 (Étude d'orthogonal en dimension infinie)

2

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1])$ muni du produit scalaire : $(f|g) = \int_{t=0}^1 f(t)g(t)dt$, et $F = \{f \in E, f(0) = 0\}$. Montrer que $F^\perp = \{0\}$. En déduire que E est de dimension infinie.

Exercice 7 (Calculs de distances)

0

1 (*X PC 09*) On munit $E = \mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire : Pour $P = \sum_i a_i X^i$ et $Q = \sum_i b_i X^i$, $(P|Q) = \sum_i a_i b_i$.

Soit $H = \{P \in E, P(1) = 0\}$.

i Trouver une base orthonormale de H .

ii Calculer $d(X, H)$.

2 Soit $\alpha = \inf \left\{ \int_{-1}^1 (ax^2 + bx + c - |x|)^2 dx : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$.

i Déterminer un espace vectoriel euclidien $(E, (\cdot, \cdot))$, un sous-espace vectoriel F de E et $v \in E$ tel que $\alpha = d(v, F)^2$.

ii Déterminer $p \in F$ tel que $\alpha = d(v, p)^2$ et calculer α .

Réponse : $\alpha = \frac{1}{96}$.

3 (*Mines MP 09*) Déterminer $\min \left\{ \int_{-1}^1 (t^4 - at^2 - bt - c)^2 dt, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

Réponse : $\frac{128}{11025}$.

4 (*Mines MP 09*) Soit $f : t \in]0, 1] \mapsto t \ln(t)$, prolongée par continuité en 0. Calculer $\min_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (f(t) - at - b)^2 dt$ et déterminer les couples (a, b) qui réalisent ce minimum.

Réponse : le minimum cherché vaut $\frac{1}{108}$.

Exercice 8 (Vecteurs de la sphère unité et produit scalaire contraint (*X MP 09*))

4

Soit $\lambda < 1$ et A une partie de la sphère unité de E telle que pour tout couple (a, a') d'éléments distincts de A , on ait : $\langle a, a' \rangle \leq \lambda$. Montrer que A est finie.

8.2. ENDOMORPHISMES D'ESPACES EUCLIDIENS

Exercice 9 (Endomorphisme conservant l'orthogonalité (*TPE MP 08, Mines MP 09*))

0

Soit f un endomorphisme de E tel que : $\forall (x, y) \in E^2, \langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow \langle f(x), f(y) \rangle = 0$. Montrer que f est composée d'une homothétie et d'une isométrie vectorielle.

Exercice 10 (Expression du rang d'un projecteur orthogonal (CCP PSI 08))

2

Soit p un projecteur orthogonal de E .

1 Montrer que $\|p(x)\|^2 = \langle p(x), x \rangle$ pour tout $x \in E$.

2 Montrer que, pour toute base orthonormée $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E , $\sum_{i=1}^n \|p(e_i)\|^2 = \text{rg}(p)$.

Exercice 11 (Composées de symétries orthogonales)

2

1 Soit F, G deux sous-espaces de E tels que $F \perp G$. On note s_F et s_G les symétries orthogonales respectives par rapport à F et G . Montrer que $s_F \circ s_G = s_G \circ s_F = s_{(F \oplus G)^\perp}$.

2 Soit F, G deux sous-espaces de E tels que $F \subset G$. On note s_F et s_G les symétries orthogonales respectives par rapport à F et G . Montrer que $s_F \circ s_G = s_G \circ s_F = s_{F \oplus G^\perp}$.

Exercice 12 (Équivalences de propriétés d'un automorphisme orthogonal)

2

Soit $f \in O(E)$. Montrer que les énoncés suivants sont équivalents :

1 $f \circ f = -\text{Id}_E$.

2 $\forall x \in E, (f(x)|x) = 0$.

3 $\forall x, y \in E, (f(x)|y) = -(x|f(y))$.

Exercice 13 (Caractérisations d'un projecteur orthogonal)

2

Soit E un espace vectoriel euclidien et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Montrer l'équivalence des assertions suivantes :

1 p est un projecteur orthogonal.

2 $\forall x, y \in E, (x|p(y)) = (p(x)|y)$.

3 $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$.

Exercice 14 (Une somme inversible d'endomorphismes (X PC 09))

3

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{Im}(u) = \text{Ker}(u)$. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), y \rangle = \langle x, v(y) \rangle$. Montrer que $u + v$ est inversible.

8.3. MATRICES ORTHOGONALES

Exercice 15 (Fonction à valeurs dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ (X MP 08))

3

Soit $n \in \mathbb{N}$ impair et $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ une fonction dérivable. Montrer que pour tout réel t , $\Phi'(t) \notin \text{GL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 16 (Matrice égale à sa comatrice)

3

Quelles sont les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ égales à leur comatrice ?

8.4. ESPACES EUCLIDIENS DE PETITE DIMENSION

Exercice 17 (Orthonormalisée de Gram-Schmidt)

0

\mathbb{R}^3 est muni de sa structure canonique d'espace vectoriel euclidien. Vérifier que les vecteurs $e_1 = (1, 0, 1)$, $e_2 = (1, 0, 2)$ et $e_3 = (1, 1, 1)$ forment une base de \mathbb{R}^3 et en déterminer l'orthonormalisée (f_1, f_2, f_3) de Gram-Schmidt.

Exercice 18 (Matrice d'une symétrie orthogonale)

0

Donner la matrice canoniquement associée à la symétrie orthogonale par rapport à la droite \mathcal{D} donnée par le système :

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

Exercice 19 (Expressions analytiques d'endomorphismes de l'espace)

0

Donner l'expression analytique de

- 1 La projection orthogonale par rapport au plan d'équation $x + 2y + z = 0$.
- 2 La réflexion par rapport au plan d'équation $2x + 2y + z = 0$.