Cours de mathématiques de MP (2015-2016)

Stéphane Flon

Table des matières

CHAPITRE I

Révisions

Sommaire

1. Logique, applications

J'appelle langage formel (par opposition au langage courant) le langage des assertions écrites avec les quantificateurs, les connecteurs logiques, etc. Je n'emploie pas de symbole « tel que ».

Rappel (Contraposée, ou contraposition)

Ne pas confondre contraire et contraposée.

Rappel (Raisonnement par l'absurde)

Cas particulier d'une implication :

Rappel (Négation formelle d'une assertion)

Exercice (Négation formelle)

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Écrire dans le langage formel, puis donner la négation (améliorée) de chacune des assertions suivantes

(1) f est croissante.

(2) f est strictement monotone.

(3) f s'annule au moins deux fois.

(4) f est constante.

(5) f tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

(6) f est uniformément continue.

1

Rappel (Raisonnement par analyse-synthèse)

Exercice (Raisonnement par analyse-synthèse)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = f^2 + f$. Montrer, en effectuant un raisonnement par analyse-synthèse, que $E = \ker(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$.

2

Rappel (Image directe, image réciproque (ou préimage))

Rappel (Application injective, surjective)

2. Classes d'équivalence

Rappel (Relation d'équivalence)

Définition et exemples.

Définition (Classe d'équivalence)

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E, et soit $x \in E$.
On appelle *classe d'équivalence* de x dans E pour $\mathcal{R}$, et on note $\overline{x}$, l'ensemble

$$\overline{x} \overset{def}{=} \{y \in E,\ y\mathcal{R}x\}.$$

On appelle *représentant* d'une classe d'équivalence Ω dans E tout $x \in E$ tel que $\Omega = \bar{x}$.
On note souvent $E/\mathcal{R}$ l'ensemble des classes d'équivalence des éléments de E.

2.a

Classes d'équivalence

Étant donnés $x, x' \in E$, on a :

(1) $x \in \overline{x}$.

(2) $x \in \overline{x'}$ si et seulement si $x' \in \overline{x}$.

(3) $\overline{x}$ et $\overline{x'}$ sont soit égales, soit disjointes.

E est donc réunion disjointe de ses différentes classes d'équivalence.

2.1

Exemple (Classes d'équivalences)

(1) Pour la relation de congruence modulo $n \in \mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{Z}$, la classe d'équivalence de $a \in \mathbb{Z}$ est

$$\bar{a} = \{b \in \mathbb{Z},\ b \equiv a[n]\}$$

Par exemple, $\overline{0} = \overline{n} = \overline{-5n} = n\mathbb{Z}$.

(2) On peut définir $\mathbb{K}(X)$ comme l'ensemble des classes d'équivalences sur $\mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})$ pour la relation d'équivalence donnée par

$$(A, B) \sim (P, Q) \Leftrightarrow AQ = BP.$$

i

Définir naturellement une fonction sur l'ensemble des classes d'équivalence

Étant donné une fonction $f\ : E \to F$, quand peut-elle définir naturellement une fonction $\overline{f}\ : E/\mathcal{R} \to F$?

Bien sûr, on souhaite poser, pour toute classe d'équivalence $\Omega = \overline{x}$

$$\overline{f}(\Omega) \overset{def}{=} f(x).$$

Pour que cela définisse une application (*i.e.* qu'à chaque élément de $E/\mathcal{R}$ corresponde une unique valeur), il faut et il suffit que cela ne dépende pas du choix du représentant x de la classe Ω, et ce pour toute classe d'équivalence.

Autrement dit, $\overline{f}$ est bien définie si et seulement si

$$\forall\, x, x' \in E, \quad x\mathcal{R}x' \Rightarrow f(x) = f(x')$$

Dans un tel cas, on dit que f *passe au quotient*, et qu'elle *induit* $\overline{f}$ sur $E/\mathcal{R}$.

2.2

Exemple (Définition sur un ensemble de classes d'équivalence)

(1) On définit une fonction degré sur $\mathbb{K}(X)$, en posant, pour tout $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$:

$$\deg(F) \overset{def}{=} \deg(A) - \deg(B)$$

(2) On définit la trace d'un endomorphisme (d'un espace vectoriel de dimension finie non nulle) comme la trace de n'importe laquelle des matrices le représentant dans une base donnée. C'est possible car deux matrices semblables ont même trace, *i.e.* la trace passe au quotient pour la relation de similitude matricielle.

(3) On définit le déterminant d'un endomorphisme f comme la quantité $\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}))$, pour n'importe quelle base $\mathcal{B}$, ce qui revient comme pour le cas de la trace à le définir comme le déterminant de n'importe laquelle des matrices le représentant dans une base donnée.

ii

Définir une loi de composition interne sur un ensemble de classes d'équivalence

Étant donné une loi de composition interne $\star$ sur un ensemble E, on souhaite en définir une sur $E/\mathcal{R}$. Comme pour la définition d'une fonction, cela sera possible si et seulement si 2.3

$$\forall\, x, x', y, y' \in E, \quad (x\mathcal{R}x' \wedge y\mathcal{R}y') \Rightarrow (x \star y)\mathcal{R}(x' \star y')$$

Dans un tel cas, on dira que $\star$ *induit* une loi de composition interne sur $E/\mathcal{R}$.

Exemple (Loi de composition interne sur un ensemble de classes d'équivalence)

On vérifie que les lois d'addition et de produit naturelles sur $\mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})$ induisent des lois d'addition et de produit sur $\mathbb{K}(X)$. iii

3. Relations d'ordre

Rappel (Relation d'ordre)

Définition et exemples.

Rappel (Ordre partiel, total)

Rappel (Plus grand élément)

Rappel (Monotonie, stricte monotonie)

Exercice (Sur la monotonie)

On considère l'application

$$\Delta : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{R}} & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \\ f & \mapsto & f \circ (-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}) \end{array}$$

1 Préciser la monotonie de Δ.

2 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante. Que dire de la monotonie de $\Delta(f)$?

3

Exercice (Stricte monotonie)

Soit $f : E \to F$ une application entre ensembles ordonnés.

1 On suppose f strictement monotone.

i Montrer que si E est totalement ordonné, alors f est injective.

ii Soit X un ensemble fini de cardinal $n \geqslant 2$. Que dire de l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(X) & \to & [\![0, n]\!] \\ Y & \mapsto & \mathrm{Card}(Y) \end{array}$$

2 Montrer qu'en prenant un ordre bien choisi au départ, toute fonction est strictement monotone.

3 On suppose f bijective et strictement monotone.

i Montrer que si E est totalement ordonné, alors f^{-1} est strictement monotone.

ii Donner un exemple où f^{-1} n'est pas strictement monotone (voir plus bas si vous ne trouvez vraiment pas d'exemple).

4

Exemple (Bijection strictement monotone de réciproque non strictement monotone)

On considère l'ensemble E des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et l'ensemble F des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, nulles en 0.
L'application
$$\begin{array}{rccl} \nabla : & E & \to & F \\ & u & \mapsto & \big(v : x \mapsto \int_0^x u(t)\mathrm{d}t\big) \end{array}$$
est une bijection strictement croissante, de bijection réciproque non strictement croissante.

i

4. Propriétés fondamentales des entiers et des réels

Rappel (Propriété fondamentale de $\mathbb{N}$)

Rappel (Principe de récurrence)

Exercice (Structure des endomorphismes du groupe additif des rationnels)

Montrer que tout endomorphisme du groupe $(\mathbb{Q}, +)$ est linéaire, *i.e.* de la forme $x \mapsto \alpha x$ pour un certain rationnel α.

5

Rappel (Borne supérieure)

Rappel (Propriété fondamentale de $\mathbb{R}$ (propriété de la borne supérieure))

Exercice (Structure des sous-groupes additifs réels)

Soit G un sous-groupe de $\mathbb{R}$ additif, non réduit à 0. Notons a la borne inférieure de $G \cap \mathbb{R}_+^*$. Montrer que si $a > 0$, alors $G = a\mathbb{Z}$ (on dit que G est *discret*). Montrer que si $a = 0$, alors G est dense dans $\mathbb{R}$ (*i.e.* rencontre tout intervalle $]\alpha, \beta[$, où $\alpha < \beta$).

6

5. Fonctions trigonométriques

5.1. Domaine de définition et régularité

Les fonctions cosinus, sinus sont définies, continues et indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$. Elles sont 2π-périodiques. Leur image commune est le segment $[-1;1]$. L'ensemble d'annulation de la fonction cosinus est $\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$, celui de sinus est $\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

La fonction tangente est définie sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. Elle est continue et indéfiniment dérivable sur son ensemble de définition, et π-périodique. Sa restriction à $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ réalise une bijection strictement croissante de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$.

La fonction cotangente, quotient de la fonction cosinus par la fonction sinus, est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Elle est continue et indéfiniment dérivable sur son ensemble de définition, et π-périodique. Sa restriction à $]0;\pi[$ réalise une bijection strictement décroissante de $]0;\pi[$ sur $\mathbb{R}$.

5.2. Équations simples

On considère deux réels x, y, et on donne les solutions d'équations simples sous forme de tableaux.

x vérifie	$\cos(x) = 1$	$\cos(x) = 0$	$\cos(x) = \cos(y)$
$\exists k \in \mathbb{Z}$,	$x = 2k\pi$	$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$	$x = \pm y + 2k\pi$

Par exemple, $\cos(x) = \frac{1}{2}$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

x vérifie	$\sin(x) = 1$	$\sin(x) = 0$	$\sin(x) = \sin(y)$
$\exists k \in \mathbb{Z}$,	$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$	$x = k\pi$	$x = y + 2k\pi$ ou $x = \pi - y + 2k\pi$

Par exemple, $\sin(x) = \frac{1}{2}$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$.

x vérifie	$\tan(x) = 1$	$\tan(x) = 0$	$\tan(x) = \tan(y)$
$\exists k \in \mathbb{Z}$,	$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$	$x = k\pi$	$x = y + k\pi$

5.3. Relations fonctionnelles

Les relations suivantes sont valables pour tous réels x et y, sauf mention expresse du contraire.

Les fonctions cosinus et sinus vérifient la relation fondamentale

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1,$$

dont découle la relation suivante :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}, 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

5.3.1. *Relations issues de transformations géométriques.* Les fonctions sinus et cosinus sont respectivement impaire et paire. Il en résulte que tangente et cotangente sont impaires.

Retenir que l'application $x \mapsto \frac{\pi}{2} - x$ intervertit fonctions sinus et cosinus :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x), \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$$

De ceci découlent les formules suivantes :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x), \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x),$$
$$\sin(\pi + x) = -\sin(x), \quad \cos(\pi + x) = -\cos(x),$$
$$\sin(\pi - x) = \sin(x), \quad \cos(\pi - x) = -\cos(x).$$

5.3.2. *Images trigonométriques d'une somme ou d'une différence.*

$$\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$
$$\cos(x - y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$$
$$\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$$
$$\sin(x - y) = \sin(x)\cos(y) - \sin(y)\cos(x)$$
$$\tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)} \text{ (lorsque tous ces termes ont un sens)}$$

En particulier,

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$$
$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$
$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)} \text{ (lorsque tous ces termes ont un sens)}$$

5.3.3. *Produit de fonctions sinus et cosinus.*

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x + y) + \cos(x - y))$$
$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y))$$
$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x + y) + \sin(x - y))$$

5.3.4. *Somme de fonctions sinus et cosinus.*

$$\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x + y}{2}\right)\cos\left(\frac{x - y}{2}\right)$$
$$\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x + y}{2}\right)\sin\left(\frac{x - y}{2}\right)$$
$$\sin(x) + \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x + y}{2}\right)\cos\left(\frac{x - y}{2}\right)$$
$$\sin(x) - \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x - y}{2}\right)\cos\left(\frac{x + y}{2}\right)$$

5.4. Représentation paramétrique rationnelle du cercle trigonométrique privé de -1

Soit $x \in]-\pi; \pi[$. On pose $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. On a alors :

$$\cos(x) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$
$$\sin(x) = \frac{2t}{1 + t^2}$$
$$\tan(x) = \frac{2t}{1 - t^2}$$

Ceci permet de donner une représentation paramétrique du cercle trigonométrique privé de -1, à l'aide des fonctions rationnelles $t \mapsto \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $t \mapsto \frac{2t}{1+t^2}$, où le paramètre t parcourt $\mathbb{R}$.

5.5. Dérivées successives des fonctions sinus et cosinus

Les formules

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos(x),\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin(x),$$

permettent d'écrire $\sin'=\sin\circ t$ et $\cos'=\cos\circ t$, où t est la translation dans $\mathbb{R}$ de $\frac{\pi}{2}$ (*i.e.* $\forall\, x\in\mathbb{R}$, $t(x)=x+\frac{\pi}{2}$). On en déduit par récurrence :

$$\forall\, n\in\mathbb{N}, \forall\, x\in\mathbb{R},\quad \sin^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right),$$
$$\forall\, n\in\mathbb{N}, \forall\, x\in\mathbb{R},\quad \cos^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right).$$

5.6. Dérivées de tangente et cotangente

$$\forall\, x\in\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\},\quad \tan'(x)=1+\tan^2(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}$$
$$\forall\, x\in\mathbb{R}\backslash\left\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\},\quad \mathrm{cotan}'(x)=-1-\mathrm{cotan}^2(x)=-\frac{1}{\sin^2(x)}$$

La notation exponentielle

Formules d'Euler. Pour tout réel θ :

$$\cos(\theta)=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\quad \text{et}\quad \sin(\theta)=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}.$$

Formule de Moivre. Pour tout réel θ, et tout entier relatif n :

$$\left(e^{i\theta}\right)^n=\left(e^{in\theta}\right),$$

soit encore :

$$\left(\cos(\theta)+i\sin(\theta)\right)^n=\left(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)\right).$$

Ces formules permettent de retrouver des relations trigonométriques. On retiendra notamment que
- La formule de Moivre permet d'écrire $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ comme polynômes en $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.
- Les formules d'Euler (et la formule de Moivre) permettent de « linéariser » les polynômes en $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

Illustration

6. Feuille de TD 1 : Révisions

6.1. Applications

Les lettres E, F, G désignent des ensembles.

Exercice 1 (Composition, injectivité, surjectivité) 0

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1 Montrer que si $g \circ f$ est injective et f surjective, alors g est injective.

2 Montrer que si $g \circ f$ est surjective et g injective, alors f est surjective.

Exercice 2 (Inverse à droite, inverse à gauche) 1

On dit qu'une application $f : E \to F$ est *inversible à gauche* (resp. *inversible à droite*) s'il existe une fonction $g : F \to E$ (resp. $h : F \to E$) telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ (resp. $f \circ h = \mathrm{Id}_F$). On dit que f est *inversible* si elle est inversible à gauche et à droite.

1 Montrer que si f est inversible à gauche d'inverse g et inversible à droite d'inverse h, alors $g = h$.

2 Montrer que f est bijective si et seulement si elle est inversible.

3 Montrer que si $f : E \to E$ est une involution (*i.e.* $f \circ f = \mathrm{Id}_E$), alors elle est bijective, et donner sa bijection réciproque.

4 Montrer plus généralement que si $f : E \to E$ vérifie $f^n = \mathrm{Id}_E$ (f composée n fois) pour un certain entier naturel $n \geqslant 2$, alors f est bijective, et donner sa bijection réciproque.

5 Donner un exemple d'application admettant un inverse à droite mais pas à gauche (resp. un inverse à gauche mais pas à droite).

6.2. Relations d'ordre

Exercice 3 (Structure de corps ordonné et nombres complexes) 1

1 Donner une relation d'ordre total sur $\mathbb{C}$.

2 Montrer que $\mathbb{C}$ n'admet pas de *structure de corps totalement ordonné*, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de relation d'ordre total sur $\mathbb{C}$ compatible avec les opérations du corps des nombres complexes.

3 Donner un ordre partiel sur $\mathbb{C}$ compatible avec les opérations sur $\mathbb{C}$.

Exercice 4 (Une relation d'ordre sur un ensemble de fonctions) 2

Soit E un ensemble, $F = \mathbb{R}^E$. On introduit une relation $\preccurlyeq$ sur F par

$$\forall (f, g) \in F^2, \quad (f \preccurlyeq g) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leqslant g(x)).$$

1 Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre.

2 L'ordre défini est-il total ?

3 Soit $f \in F$. Les assertions « f est majorée » et « $\{f\}$ est majorée » sont-elles équivalentes ?

4 Soit $f, g \in F$. L'ensemble $\{f, g\}$ admet-il un plus grand élément ? une borne supérieure ?

5 Montrer que toute partie non vide et majorée de F admet une borne supérieure.

6.3. Entiers naturels, symboles de somme et de produit

Exercice 5 (Suite récurrente bien définie) — 0

1 Montrer qu'il existe une unique suite (u_n) de nombres réels telle que $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{-1}{1+u_n}.$$

2 Même question pour les conditions $v_0 = 2$ et $v_{n+1} = 1 + \ln(v_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3 Même question pour les conditions $w_0 = 0$ et $w_{n+1} = \sqrt{2 - w_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6 (Inégalités entre sinus) — 3

Montrer, pour tout $(n,t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$: $|\sin(nt)| \leqslant n|\sin(t)|$.

Exercice 7 (Symboles de somme et de produit) — 0

1 Établir une formule pour $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1}$ valable pour chaque entier $n \geqslant 2$.
2 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $1\ 1! + 2\ 2! + \cdots + n\ n! = (n+1)! - 1$.
3 Évaluer, pour tout entier naturel n, la somme

$$S_n = \sum_{\{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}, p+q\leqslant n\}} (p+q).$$

4 Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Trouver une formule pour $\prod_{i=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{i}\right)$.
5 De même pour $\prod_{i=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{i^2}\right)$.
6 Soit n un entier naturel. Calculer $\displaystyle\sum_{i+j=n} \min(\{i,j\})$, $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \min(\{i,j\})$ et $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \min(\{i,j\})$.
7 Soit n un entier naturel. Calculer $\displaystyle\sum_{i+j=n} ij$.

Exercice 8 (Sommes de puissances) — 1

1 Montrer de deux manières que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
2 Montrer de deux manières que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3 Trouver une formule analogue pour $\sum_{k=0}^{n} k^3$. Quel est le lien entre cette somme et $\sum_{k=0}^{n} k$? Retrouver ce lien par un dessin.

Exercice 9 (Somme de carrés de nombres de même parité) — 3

Montrer de deux manières différentes que, pour tout entier pair $\geqslant 2$, on a :

$$2^2 + 4^2 + \cdots + n^2 = \binom{n+2}{3}$$

Montrer que pour tout entier naturel impair n, on a

$$1^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \binom{n+2}{3}.$$

6.4. Complexes

Exercice 10 (Ensemble d'entiers déterminé par une condition complexe) — 0

Déterminer l'ensemble $\left\{n \in \mathbb{N}, \left(\frac{(1-i\sqrt{3})^5}{(1-i)^3}\right)^n \in \mathbb{R}_+\right\}$.

Exercice 11 (Exemples de linéarisation) — 0

Linéariser les expressions suivantes, dépendant de la variable réelle x : $\cos(x)^4$, $\sin(x)^5$, $\cos(x)^3 \sin^2(x)$.

Exercice 12 (Polynôme de la fonction cosinus) — 0

Exprimer comme un polynôme de la fonction cosinus la fonction f définie par $f(2k\pi) = 6$ et $f((2k+1)\pi) = -6$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et, pour tout réel $x \notin \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, par

$$f(x) = \frac{\sin 6x}{\sin x}.$$

Exercice 13 (Changement d'écriture d'une combinaison de cosinus et sinus) — 1

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Déterminer un réel $A > 0$ et un réel θ_0 de sorte que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad a\cos\theta + b\sin\theta = A\cos(\theta - \theta_0).$$

Exercice 14 (Calculs de sommes trigonométrique) — 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout réel x, calculer :

$$C_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) \quad \text{et} \quad S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx).$$

Exercice 15 (Sommes trigonométriques à coefficients binomiaux) — 2

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer les sommes $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta)$ et $B_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta)$.

Exercice 16 (Calculs de racines cubiques) — 0

Déterminer les racines cubiques de $\sqrt{3} - i$ et de $\frac{i+\sqrt{3}}{i-\sqrt{3}}$.

Exercice 17 (Équations algébriques complexes) — 0

1 Résoudre l'équation $z^2-(4+2i)z+(11+10i)=0$.
2 Résoudre l'équation $(1+i)z^2-4iz+26-2i=0$.

Exercice 18 (Équations algébriques complexes plus compliquées) — 2

1 Résoudre l'équation
$$(1-i)z^3+(-4+8i)z^2+(3-25i)z+30i=0,$$
sachant qu'elle admet une solution réelle.
2 Résoudre l'équation
$$z^3-(5+3i)z^2+(7+16i)z+3-21i=0,$$
sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure.
3 Résoudre l'équation
$$z^6+(2i-1)z^3-1-i=0.$$

6.5. Calculs sur les fonctions numériques

Exercice 19 (Dérivées successives) — 0

Calculer, pour tout entier naturel n, la dérivée d'ordre n de
1 $x\mapsto(x^3+2x-7)e^x$.
2 $\cos^3$.
3 $x\mapsto 1/(x^2-1)$.

Exercice 20 (Changements de variables) — 2

Calculer
1 $\int_0^\pi \cos(x)^3\sin(x)\mathrm{d}x$.
2 $\int_0^1\sqrt{1-u^2}\mathrm{d}u$.
3 $\int_0^1\frac{2x+1}{x^2+x+2}\mathrm{d}x$.
4 $\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{\sin(x)}$. ($t=\tan(x/2)$)
5 $\int_0^{\pi/6}\frac{\mathrm{d}x}{\cos(x)}$.
6 $\int_{1/2}^{3/4}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)}}$. ($t=\sin(u)^2$)
7 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$. ($u=e^x$ puis $t=\sqrt{1+u^2}$)

Exercice 21 (Primitive du logarithme) — 0

À l'aide d'une intégration par parties, déterminer une primitive de la fonction logarithme (sur $\mathbb{R}_+^*$).

Exercice 22 (Fonctions trigonométriques circulaires) 0

Calculer

1 $\int_0^{2\pi} \sin px \sin qx \mathrm{d}x,\ \int_0^{2\pi} \sin px \cos qx \mathrm{d}x,\ \int_0^{2\pi} \cos px \cos qx \mathrm{d}x$, où $(p,q) \in \mathbb{N}^2$

2 $\int \cos^2 x \sin^2 x \mathrm{d}x$.

3 $\int \cos^2 x \sin^3 x \mathrm{d}x$.

4 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^3 x} \mathrm{d}x$.

5 $\int_{\sqrt{2}}^{\pi+\sqrt{2}} \frac{(\cos(2t))^3}{2+\sin^2 t \cos^2 t} \mathrm{d}t$.

6 $\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+3\sin^2 x}$.

7 $\int \frac{\sin(x)\mathrm{d}x}{\sin^3(x)+\cos^3(x)}$.

8 $\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x}$.

9 $\int \frac{\sin(2x)}{1+\cos^2(x)} \mathrm{d}x$.

Exercice 23 (Fonctions trigonométriques hyperboliques) 0

Calculer

1 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch} x(1+\operatorname{sh} x)}$.

2 $\int \frac{\mathrm{d}x}{5\operatorname{ch} x+3\operatorname{sh} x+4}$.

Exercice 24 (Primitives diverses) 0

Trouver les primitives de f, où f est successivement donnée par

1 $x \mapsto x \arctan(x)^2$.

2 $x \mapsto \frac{1}{x+x\ln(x)^2}$.

3 $x \mapsto \frac{1}{x}\ln(\ln(x))$.

4 $x \mapsto \arctan\sqrt{1-x^2}$.

Exercice 25 (Calculs de limites) 0

Vérifier :

1 $\lim\limits_{x \to \pi/4} \frac{\frac{1}{\cos^2(x)}-2\tan(x)}{1+\cos(4x)} = \frac{1}{2}$.

2 $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^x-x}{1-x+\ln(x)} = -2$.

3 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\arctan^3(x)}\left(\ln(\ln(e+x)) - \frac{x}{e+x}\right) = \frac{1}{6e^3}$.

4 $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\arctan x - \frac{\pi x+1}{2x+1}\right) = \frac{\pi-6}{4}$.

5 $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{x}\right)\right)^x = e^2$.

6 $\lim\limits_{x \to 1/2} (2x^2-3x+1)\tan(\pi x) = \frac{1}{\pi}$.

6.6. Divers

Exercice 26 (Parties paire et impaire d'une fonction) — 1

Soit I un intervalle centré en 0, f une application de I dans $\mathbb{R}$.

1 Montrer que f s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire f_p et d'une fonction impaire f_i, appelées respectivement *partie paire* et *partie impaire de* f.

2 Que dire des applications partie paire et partie impaire ainsi définies de $\mathbb{R}^I$ dans lui-même ?

Exercice 27 (Une suite bornée) — 0

On considère la suite de terme général

$$u_n = \int_1^n \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t.$$

Montrer que cette suite est bornée.

Exercice 28 (Décompositions élémentaires en éléments simples) — 0

Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ de la fraction rationnelle F donnée par :

1 $\frac{X^5}{(X-1)^4}$.

2 $\frac{X^3+X^2-X+1}{(X^2+1)(X^2+4)}$.

3 $\frac{X^2-4}{X^2-3}$.

4 $\frac{1}{X^3(X^2-1)}$.

5 $\frac{2X^4+X^3+3X^2-6X+1}{2X^3-X^2}$.

6 $\frac{2X^5-8X^3+8X^2-4X+1}{X^3(X-1)^2}$.

Exercice 29 (Puissances de matrices) — 1

1 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et soit $B = A - I_3$. Calculer B^n, puis A^n, pour tout entier naturel n.

2 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pour tout entier n, calculer A^n.

3 Soit $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $(A(\theta))^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

4 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

5 Calculer les puissances de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Faire le lien avec la suite de Fibonacci.

Exercice 30 (Développements asymptotiques de fonctions) 2

1 Donner un développement à la précision $\frac{1}{x^3}$ de la fonction arctangente en $+\infty$.
2 Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'équation $x + \ln(x) = a$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$ possède une unique solution, notée $f(a)$. Donner un développement asymptotique à deux termes de f en $+\infty$.
3 Montrer que pour tout $\alpha > e$, l'équation $e^x = \alpha x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$ admet exactement deux solutions, que nous noterons $f(\alpha)$ et $g(\alpha)$, avec $f(\alpha) < g(\alpha)$. Donner des développements asymptotiques à deux termes de f et g en $+\infty$.

Exercice 31 (Fractions rationnelles) 0

Calculer
1 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-4x+1}$.
2 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^4-1)}$.
3 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)^2}$.
4 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+ix}$.
5 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^2}$.
6 *(X MP 08)* $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-x^2}{1-x^2+x^4}\mathrm{d}x$.
7 *(X MP 08)* $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ $(a, b \in \mathbb{R}_+^*)$.

Exercice 32 (Racines) 0

Calculer
1 $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x+1}\mathrm{d}x$.
2 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{1-x^2}}$.
3 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$.
4 *(X MP 08)* $\int_a^b \sqrt{(b-x)(x-a)}\mathrm{d}x$.
5 *(X MP 08)* $\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\sin t}\mathrm{d}t$.
6 $\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x-1}}$.
7 $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[4]{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x+1}}\mathrm{d}x$.

Exercice 33 (Polynômes, fractions rationnelles) 2

1 *(X PC 08)* Soit $P = X^3 + 2X^2 + X + 1$. Déterminer le nombre de racines réelles de P. On note x_1, x_2, x_3 les racines de P. Déterminer : $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$, $\frac{1}{x_1-2} + \frac{1}{x_2-2} + \frac{1}{x_3-2}$
2 On note $w_1, \ldots, w_{n-1}$ les racines de $X^n - 1$ différentes de 1. Calculer : $\prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{1-w_i}$, $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{1-w_i}$.

CHAPITRE II

Algèbre linéaire

Sommaire

Ces révisions des points les plus délicats ou intéressants d'algèbre linéaire de Sup ne visent pas l'exhaustivité (référez vous à vos cours de Sup), et ne cherchent pas à présenter les notions de manière cohérente (on parlera par exemple d'applications linéaires avant de définir la notion si ça nous arrange).

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

Montrer qu'on a un espace vectoriel : en montrant qu'on a un sous-espace vectoriel. Définition d'un espace vectoriel : on n'y revient jamais, et si vraiment on nous la demande, on peut la retrouver avec un peu de bon sens.

Rappel (Définition d'un sous-espace vectoriel)

Rappel (Montrer qu'on a un sous-espace vectoriel)

Diverses techniques :

Montrer que l'on a un sous-espace vectoriel 1.1

Si on veut montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, doit-on préciser dans la rédaction que F est une partie de E ?
Tout dépend du contexte : si F est donnée comme une partie de E, alors, ce n'est pas nécessaire. Si l'inclusion de F dans E ne va pas de soi, on pourra la justifier.
Par exemple, si on pose $E = \mathbb{R}^{[0,1]}$, F l'ensemble des fonctions bornées de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ et $G = \mathcal{C}_{pm}([0, 1], \mathbb{R})$, alors il est clair que F et G sont des parties de E, mais, pour montrer que G est un sous-espace vectoriel de F, on pourra expliquer pourquoi une fonction continue par morceaux sur un segment est bornée.

Opérations pertinentes sur les sous-espaces vectoriels : intersection, somme, produit (cartésien), mais pas l'union, ni le passage au complémentaire. D'ailleurs, la somme remplace l'union, au sens où pour tous sous-espaces vectoriels F et G de E, $\mathrm{Vect}(F \cup G) = F + G$.

Définition (Sous-espaces supplémentaires) 1.a

Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont dits *supplémentaires* dans E si :

(1) $F + G = E$.

(2) $F \cap G = \{0_E\}$.

F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si pour tout vecteur x de E, il existe un unique couple $(x_F, x_G) \in F \times G$ tel que $x = x_F + x_G$.

Étant donné un sous-espace vectoriel F de E, ne pas confondre ses supplémentaires [1] et son complémentaire $E \setminus F$, qui n'est jamais un sous-espace vectoriel de E.

1. Quels sont les très rares cas où F n'a qu'un supplémentaire ?

Exemple (Sous-espaces supplémentaires)

(1) Si I est un intervalle centré en 0, les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^I$ respectivement constitués des fonctions paires et impaires sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^I$.

(2) Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ et $i\mathbb{R}$ sont supplémentaires.

(3) Si p est un projecteur (vectoriel) de E, $\ker(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont supplémentaires dans E.

(4) Si s est une symétrie (vectorielle) de E, alors $E = \ker(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(s + \mathrm{Id}_E)$

(5) Dans votre cours d'intégration, vous avez considéré le sous-espace $\mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathbb{R})$ de $\mathbb{R}^{[a,b]}$, constitué des fonctions continues par morceaux sur le segment $[a,b]$. En fait, cet espace est la somme de celui des fonctions en escalier et de celui des fonctions continues (sur $[a,b]$). Comment modifier l'un de ces sous-espaces afin d'avoir une somme directe (donnant encore $\mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathbb{R})$) ?

i

Exercice (Division euclidienne et supplémentaires)

Interpréter le théorème de division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$ en termes de supplémentarité de deux sous-espaces vectoriels.

1

Définition (Sous-espaces en somme directe)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $F_1, \dots, F_n$des sous-espaces de E. On dit que ces sous-espaces sont en *somme directe* si l'application

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_n & \to & E \\ & (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & x_1 + \cdots + x_n \end{array}$$

est injective [a]. Si tel est le cas, on note $F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$ cette somme.

[a]. *i.e.* son noyau est trivial, puisque φ est linéaire

1.b

En pratique, pour montrer que les sous-espaces $F_1, \dots, F_n$ sont en somme directe, on considère un n-uplet $(x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n$ tel que $x_1 + \cdots + x_n = 0$, et on montre que chaque x_i est nul.

Deux sous-espaces F et G de E sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0\}$, mais il ne faut pas généraliser hâtivement cette caractérisation à plusieurs sous-espaces. Donnez un exemple de trois sous-espaces vectoriels en somme directe deux à deux, mais pas en somme directe :

Illustration

En revanche, $F_1, \ldots, F_{n+1}$ sont en somme directe si et seulement si

(1) $F_1, \ldots, F_n$ sont en somme directe.

(2) $F_{n+1} \cap (F_1 + \cdots + F_n) = \{0_E\}$.

Exercice (Les sous-espaces propres sont en somme directe)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des scalaires distincts deux à deux (où $n \in \mathbb{N}^*$).
Montrer par récurrence sur n que $\ker(f - \lambda_1 \mathrm{Id}_E)$, ..., $\ker(f - \lambda_n \mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe.

2

2. Familles de vecteurs

Définition (Combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs)

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E, où I est fini. On appelle *combinaison linéaire* de cette famille toute expression de la forme

$$\sum_{i \in I} \lambda_i u_i,$$

où $(\lambda_i)_{i \in I}$ est une famille de scalaires.

2.a

Définition (Combinaison linéaire d'une famille infinie de vecteurs)

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E, où I est infini. On appelle *combinaison linéaire* de cette famille toute combinaison linéaire d'une de ses sous-familles finies.

2.b

Cela revient aussi à prendre une famille de scalaires $(\lambda_i)_{i \in I}$ à *support fini* (on dit aussi *presque nulle*), *i.e.* telle que l'ensemble

$$\{i \in I,\, \lambda_i \neq 0\}$$

soit fini, puis à considérer

$$\sum_{i \in I} \lambda_i u_i$$

auquel il est facile de donner un sens, puisque dans cette somme, seul un nombre fini de termes sont non nuls.

Rappel (Famille libre)

La plupart des démonstrations « abstraites » de liberté utilisent le lemme suivant :

Lemme pour une preuve de liberté

On considère une famille $(u_1, \dots, u_n)$ de vecteurs de E, et une famille $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de scalaires. On suppose que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0_E.$$

Soit $j \in [\![1, n]\!]$. Si $u_j \notin \operatorname{Vect}(u_1, \dots, u_{j-1}, u_{j+1}, \dots, u_n)$, alors $\lambda_j = 0$.

2.a

Autrement dit, si $\mathcal{F}$ est une famille de vecteurs, pour montrer qu'un scalaire λ devant un vecteur u de $\mathcal{F}$ dans une relation de liaison de $\mathcal{F}$ est nul, on trouve une propriété *stable par combinaison linéaire* que seul le vecteur u *ne vérifie pas* dans $\mathcal{F}$.

Démarches typiques de preuve de liberté

On utilise essentiellement ce lemme de deux manières :

(1) « en parallèle », lorsque les u_i jouent un rôle symétrique (utilisation d'évaluations, vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes, etc.)

(2) « en série », lorsqu'on peut hiérarchiser naturellement les vecteurs u_i (degrés échelonnés, ordres de multiplicité d'une racine échelonnés, comportement asymptotique, etc.)

2.1

Exercice (Liberté de familles)

Faire les questions 1, 3 et 5 de l'exercice 1 de TD en ayant ces techniques en perspective.

3

Rappel (Bases)

Définition, coordonnées d'un vecteur dans une base.

Exemple (Exemple de base infinie)

La famille $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$, appelée base canonique de $\mathbb{K}[X]$.

i

Exercice (Décomposition en éléments simples et bases)

Interpréter le théorème de décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ en termes de base. Faire de même pour $\mathbb{R}(X)$.

4

Définition (Base adaptée)

Une base est dite *adaptée* à un sous-espace vectoriel F de E si l'une de ses sous-familles est une base de F.
Une base de E est dite *adaptée* à une décomposition en somme directe $E = \oplus E_i$ si elle est adaptée à chacun des E_i.

2.c

Base adaptée

Il y a aussi, plus informellement, des bases que l'on pourrait dire adaptées à des situations données. Par exemple, pour étudier un problème linéaire sur les polynômes où des scalaires $a_1, \dots, a_n$ interviennent de manière équilibrée (resp. où un scalaire a intervient de manière prépondérante), on aura intérêt à utiliser une base d'interpolation de Lagrange (resp. la base des puissances de $(X - a)$).

2.2

3. Applications linéaires

Rappel (Montrer qu'une application est linéaire)

Rappel (Se donner une application linéaire)

Étant donnés un espace vectoriel E muni d'une base $(e_i)_{i \in I}$ et une famille $(f_i)_{i \in I}$ de vecteurs d'un espace vectoriel F, il existe une unique application linéaire u telle que pour tout $i \in I$, $u(e_i) = f_i$.

Lorsque $E = \oplus E_i$, alors pour toute famille u_i d'applications linéaires de E_i dans F, il existe une unique application linéaire u de E dans F telle que, pour tout i, u_i soit la restriction de u à E_i.

Rappel (L'injectivité d'un morphisme se teste sur le noyau)

Rappel (Montrer la surjectivité d'un morphisme en atteignant une famille génératrice)

Définition (Rang d'une application linéaire)

Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Si $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie (par exemple si E ou F est de dimension finie), on dit que f est de rang fini, et on appelle *rang* de f et note $\mathrm{rg}(f)$ la dimension de $\mathrm{Im}(f)$.

3.a

Rang et composition

Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont deux applications linéaires de rang fini, alors

$$\mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \min\{\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g)\}$$

De plus, si f (resp. g) est un isomorphisme, alors $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}\, g$ (resp. $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(f)$).
Pour résumer, composer un morphisme par un autre fait « chuter » (au sens large) le rang, et donc le conserve quand on compose par un isomorphisme.

3.1

Caractérisation du rang d'une matrice par les matrices extraites inversibles

Le rang d'une matrice est la plus grande taille de ses matrices extraites inversibles. C'est donc la plus grande taille de ses matrices extraites de déterminant non nul, mais vous connaissez un algorithme de calcul du rang de bien meilleure complexité !

3.2

4. Endomorphismes

4.1. Trace et déterminant

En dimension finie (non nulle), on peut définir la trace et le déterminant d'un endomorphisme.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle *trace* de A et on note $\mathrm{tr}(A)$ le scalaire

$$\sum_{i=1}^{n} [A]_{i,i}$$

L'application

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{tr} : & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ & A & \mapsto & \mathrm{tr}(A) \end{array}$$

est une forme linéaire non nulle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (son noyau est donc un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).

De plus, si $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, alors

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$$

En particulier, deux matrices semblables ont même trace, ce qui permet de définir la trace d'un endomorphisme f de E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ comme la trace de n'importe quelle matrice le représentant dans une base.

En général, $\mathrm{tr}(ABC) \neq \mathrm{tr}(CBA)$.

Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, f est un automorphisme si et seulement si $\det(f) \neq 0$.

On a, pour tous $f, g \in \mathcal{L}(E)$, tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(fg) = \det(f)\det(g)$ et $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$, mais, en général, $\det(f + g) \neq \det(f) + \det(g)$.

Rappel (Propriétés supplémentaires de la trace et du déterminant)

Rappel (Autres notions de déterminant)

Déterminant d'une matrice carrée, déterminant d'une famille de vecteurs dans une base.

4.2. Endomorphisme induit

Définition (Sous-espace stable, endomorphisme induit)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, et soit F un sous-espace vectoriel de E. On dit que F est *stable* par f si $f(F) \subset F$. Si tel est le cas, l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & F & \to & F \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

est linéaire et appelée *endomorphisme de F induit par f*.

4.a

Si $E = F \oplus G$, et si F est stable par $f \in \mathcal{L}(E)$, alors, dans une base adaptée à cette supplémentarité, la matrice de f est de la forme

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

(et si G est aussi stable par f, $B = 0$).

Il faut comprendre que la notion d'endomorphisme induit n'a de sens que pour un sous-espace *stable*.

Il sera donc intéressant d'écrire matriciellement un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ dans une base adaptée à des sous-espaces stables $F_1, \ldots, F_k$ (en somme directe et de somme E), la matrice obtenue étant alors diagonale par blocs. L'idéal étant que les F_i soient des droites vectorielles (auquel cas la matrice obtenue est diagonale).

Exercice (Stabilité du noyau et de l'image par un élément du commutant)

Soient f et g deux endomorphismes de E.

1 Montrer que si $f \circ g = g \circ f$, alors $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont stables par g. Montrer que l'implication réciproque peut être fausse.

2 Montrer que si $f \circ g = g \circ f$, alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\ker(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$ est stable par g.

5

5. Dimension finie

Pour savoir si deux espaces vectoriels sont isomorphes : comparer leurs dimensions.

Rappel (Diverses formules de dimension)

Proposition (Caractérisation des bases en dimension finie connue)

On suppose E de dimension finie n. Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E, de cardinal n. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) $\mathcal{F}$ est libre.

(2) $\mathcal{F}$ engendre E.

(3) $\mathcal{F}$ est une base de E.

5.a

Bien sûr, cette proposition n'a d'intérêt que la dimension de E est (finie et) connue. Le plus souvent, on montre la liberté.

Proposition (Caractérisation de la supplémentarité en dimension finie)

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E, où E est de dimension finie. Deux quelconques des assertions suivantes entrainent la troisième :

(1) $F + G = E$.

(2) $F \cap G = \{0_E\}$.

(3) $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

5.b

Démonstration

□

Lemme préparatoire au théorème du rang

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors φ induit un isomorphisme de tout supplémentaire de $\operatorname{Ker}\varphi$ dans E sur $\operatorname{Im}\varphi$.

5.c

Démonstration

Soit G un supplémentaire de $\operatorname{Ker}\varphi$ dans E. On restreint φ à G au départ, et à $\operatorname{Im}\varphi$ à l'arrivée, ce qui donne une application linéaire ψ de G dans $\operatorname{Im}\varphi$. On montre aisément que cette application est surjective et injective : elle réalise donc un isomorphisme de G sur $\operatorname{Im}\varphi$.

□

On utilise surtout ce lemme en dimension finie, mais il est valable en dimension quelconque. En corollaire immédiat, on a le fameux :

Théorème du rang

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, E étant de dimension finie. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$. On a alors :

$$\operatorname{rg}(\varphi) + \dim \operatorname{Ker}\varphi = \dim E$$

5.d

Démonstration

L'existence d'un supplémentaire G de $\operatorname{Ker}\varphi$ dans E et le lemme précédent donnent immédiatement le résultat.

□

En pratique, cette formule, la *formule du rang*, est très utile, plus que l'isomorphisme du lemme. C'est pour cette raison qu'on a qualifié de lemme la première assertion et de théorème la seconde.

La dimension de F n'intervient pas : il peut très bien ne pas être de dimension finie. En fait, il est facile de s'en rendre compte car en « grossissant » F, on ne change rien au rang de φ et à la dimension de $\operatorname{Ker}\varphi$ (alors qu'il serait compliqué de « grossir » E).

Même si $E = F$, $\operatorname{Im}\varphi$ et $\operatorname{Ker}\varphi$, sous-espaces vectoriels de E, ne sont pas nécessairement supplémentaires. En revanche, ils le sont si et seulement si ils sont en somme directe (d'après le corollaire 5.b ci-dessus).

En corollaire, on obtient une sorte d'analogue de la proposition sur les applications entre ensembles finis de même cardinal :

Proposition (Isomorphismes en même dimension finie)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de *même* dimension finie n, et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(1) f est injective ;

(2) f est surjective ;

(3) f est un isomorphisme.

5.e

Démonstration

f est injective (resp. surjective) si et seulement si $\dim \ker(f) = 0$ (resp. $\mathrm{rg}(f) = n$). La formule du rang ($\mathrm{rg}\, \varphi + \dim \mathrm{Ker}\, \varphi = n$) montre donc l'équivalence entre les deux premières assertions. Ces deux assertions sont donc équivalentes à leur conjonction, c'est-à-dire à la dernière.

$\square$

On peut retrouver la proposition 5.b, en utilisant la proposition 5.e et en considérant l'application linéaire

$$\varphi \ : \ \begin{array}{rcl} F \times G & \to & E \\ (x_F, x_G) & \mapsto & x_F + x_G \end{array}$$

Exercice (Caractérisation de somme directe par les dimensions)

Soit $F_1, \ldots, F_n$ des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que ces sous-espaces sont en somme directe si et seulement si

$$\dim(F_1 + \cdots + F_n) = \sum_{i=1}^{n} \dim(F_i)$$

Indication : on pourra considérer

$$\varphi \ : (x_1, \ldots, x_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n \mapsto x_1 + \cdots + x_n \in F_1 + \cdots + F_n$$

6

On applique très souvent la proposition 5.e dans le cas d'un *endomorphisme* en dimension finie.

Proposition (Inverse unilatéral d'un endomorphisme en dimension finie)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, où E est de dimension finie. S'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $w \in \mathcal{L}(E)$) tel que $v \circ u = \mathrm{Id}_E$ (resp. $u \circ w = \mathrm{Id}_E$), alors $u \in \mathrm{GL}(E)$, et v (resp. w) est la bijection réciproque de u.

5.f

Démonstration

$\square$

Attention, ce résultat ne subsiste pas en dimension infinie : penser au morphisme de dérivation dans $\mathbb{R}[X]$, où aux shifts dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

6. Matrices

6.1. Divers formats de matrices

Nous ne revenons pas sur les formats classiques de matrices : matrices carrées, diagonales, triangulaires (supérieure ou inférieure, éventuellement stricte), symétriques, antisymétriques.

On rappelle que $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de dimension np, et qu'on introduit, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, la matrice $E_{i,j}$, de taille $n \times p$, dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui en position (i,j), qui vaut 1. On obtient la *base canonique* $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ (ces matrices sont aussi dites *élémentaires*).

Exercice (Produit de matrices élémentaires)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(i,j,k,l) \in [\![1,n]\!]^4$. Calculer $E_{i,j}E_{k,l}$ (matrices de taille n). 7

On laisse en exercice des propriétés classiques sur les matrices triangulaires :

Exercice (Matrices triangulaires supérieures)

On note $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures.
1 Montrer que $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, *i.e.* un sous-espace vectoriel et un sous-anneau.
2 Montrer qu'un élément A de $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls, et que dans un tel cas, $A^{-1} \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$. 8
Remarque : on peut montrer plus généralement que tout inverse dans une algèbre d'un élément inversible d'une sous-algèbre de dimension finie est encore un élément de cette sous-algèbre.

Matrices par blocs.

Rappel (Produit par blocs)

6.2. Expression matricielle des morphismes, des endomorphismes

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, de dimensions respectives n et p (entiers non nuls), $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{C}$ des base respectives de E et F. Soit enfin $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

(1) On appelle matrice de f dans le couple de bases $(\mathcal{B},\mathcal{C})$, et on note $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$, la matrice de taille $p \times n$, dont la j-ème colonne est le p-uplet des coordonnées de $f(e_j)$ dans $\mathcal{C}$, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$.

(2) L'application

$$\begin{array}{rccl} \Delta \ : & \mathcal{L}(E,F) & \to & \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ & f & \mapsto & M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

(3) Le produit matriciel a été défini pour exprimer matriciellement la composition d'applications linéaires.

(4) Lorsque $E = F$ et $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, l'application Δ est aussi un isomorphisme d'anneaux.

Revoir les formules de changement de base.

6.3. Matrices équivalentes

Soit $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
On dit que B est équivalente à A s'il existe $(Q, P) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ tel que

$$B = Q^{-1}AP$$

Cela définit une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Deux matrices qui représentent un même morphisme dans des couples de bases sont équivalentes.

Proposition (Caractérisation géométrique de l'équivalence matricielle) 6.a

Les matrices A et B sont équivalentes si et seulement si il existe des espaces vectoriels E et F, des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E, des bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de F, et $f \in \mathcal{L}(E,F)$ tels que

$$A = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \quad \text{et} \quad B = M_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f)$$

Proposition (Caractérisation de l'équivalence par le rang) 6.b

A et B sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.

6.4. Matrices semblables

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On dit que B est *semblable* à A s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que

$$B = P^{-1}AP$$

Cela définit une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Deux matrices qui représentent un même endomorphisme, chacune dans une base, sont semblables.

Proposition (Caractérisation géométrique de la similitude matricielle) 6.c

Les matrices A et B sont semblables si et seulement si il existe un espace vectoriel E, des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E, et $f \in \mathcal{L}(E)$ tels que

$$A = M_{\mathcal{B}}(f) \quad \text{et} \quad B = M_{\mathcal{B}'}(f)$$

Contrairement à l'équivalence matricielle, il est délicat de déterminer si deux matrices sont semblables.
On peut toutefois remarquer que si A et B sont semblables, alors A et B ont

(1) Même rang.

(2) Même déterminant.

(3) Même trace.

On dit que le rang, le déterminant, et la trace, sont des *invariants de similitude* (nous en découvrirons d'autres en cours d'année).

La réciproque est fausse : des matrices A et B (de même taille n) peuvent avoir mêmes rang, déterminant et trace, sans être semblables.

On peut aussi remarquer que si $B = P^{-1}AP$, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $B^k = P^{-1}A^kP$ (et même, pour tout polynôme Q, $Q(B) = P^{-1}Q(A)P$), de sorte que si A et B sont semblables, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, A^k et B^k sont semblables.

7. Projecteurs

Rappel (Projecteurs)

Définition, caractérisation.

Dans la définition d'un projecteur, il est important de préciser le sous-espace sur lequel on projette, mais aussi le sous-espace (supplémentaire du premier) parallèlement auquel on projette.

Illustration

Supposons que $E = F \oplus G$, soit p (resp. q) le projecteur sur F parallèlement à G (resp. sur G parallèlement à F).

On a

$$F = \mathrm{Im}(p) = \ker(p - \mathrm{Id}_E), \quad G = \ker(p), \quad p + q = \mathrm{Id}_E$$

En particulier,

$$\ker(p) \oplus \mathrm{Im}(p) = E$$

Exercice (Sous-espaces supplémentaires à un même troisième)

Montrer que si F_1 et F_2 sont des supplémentaires d'un même sous-espace vectoriel G, alors F_1 et F_2 sont isomorphes.

9

Rappel (Incursion dans le monde euclidien : projecteurs orthogonaux)

Famille de projecteurs associée à une décomposition $E = \oplus_{i \in I} E_i$ (où I est fini) : pour tout $i \in I$, le projecteur d'indice i associé à cette décomposition est le projecteur p_i sur F_i parallèlement à la somme des autres F_j.

Exercice (Stabilité de sous-espaces par un projecteur)

Montrer qu'un sous-espace vectoriel F est stable par le projecteur p si et seulement si $F = (F \cap \mathrm{Im}(p) + (F \cap \ker(p))$.

10

Exercice (Trace d'un projecteur)

Montrer que la trace d'un projecteur (en dimension finie) est égale à son rang.

11

8. Interpolation de Lagrange

Le problème général est le suivant : on considère une fonction $f \ : I \to \mathbb{K}$, où I est un intervalle (d'au moins deux points), et $n+1$ points distincts $a_0, \dots, a_n$ de I. On cherche un polynôme P de degré au plus n, qui interpole f aux a_i, *i.e.* tel que $P(a_i) = f(a_i)$ pour tout $i \in [\![0, n]\!]$.

Illustration

Autrement dit, on cherche un antécédent du $(n+1)$-uplet $(f(a_0), \dots, f(a_n))$ par l'application

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{K}_n[X] & \to & \mathbb{K}^{n+1} \\ & P & \mapsto & (P(a_0), \dots, P(a_n)) \end{array}$$

Or φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels :

Par conséquent, le polynôme cherché P est unique, c'est $\varphi^{-1}(f(a_0),\dots,f(a_n))$.
Si on note $(e_0,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$, on peut écrire

$$P=\sum_{i=0}^{n} f(a_i)\varphi^{-1}(e_i)$$

Or, pour tout $i\in [\![0,n]\!]$:

$$P_i \overset{def}{=} \varphi^{-1}(e_i) =$$

de sorte que

$$P=\sum_{i=0}^{n} f(a_i)P_i =$$

La famille $(P_0,\dots,P_n)$ est appelée *base d'interpolation de Lagrange* associée au $(n+1)$-uplet $(a_0,\dots,a_n)$. C'est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice (Prolongement de l'interpolation de Lagrange) 12

Déterminer les polynômes P prenant des valeurs données $(b_0,\dots,b_n)$ sur une famille $(a_0,\dots,a_n)$ d'éléments de $\mathbb{K}$ distincts deux à deux.

Exercice (Une application de l'interpolation de Lagrange) 13

On reprend l'exercice 2 de cours page 28.

1 Soit $i\in[\![1,n]\!]$, et soit $x_i\in\ker(f-\lambda_i\mathrm{Id}_E)$. Montrer que pour tout polynôme $P\in\mathbb{K}[X]$,

$$P(f)(x_i)=P(\lambda_i)x_i.$$

2 En déduire une autre preuve du fait que les $\ker(f-\lambda_i\mathrm{Id}_E)$ soient en somme directe.

9. Endomorphismes nilpotents

Définition (Élément nilpotent d'un anneau) 9.a

Un élément a d'un anneau A est dit *nilpotent* s'il existe $k\in\mathbb{N}^*$ tel que $a^k=0$. Dans un tel cas, on appelle *indice de nilpotence* l'entier

$$\min\{k\in\mathbb{N}^*, a^k=0\}$$

Cela s'applique notamment au cas des anneaux $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, permettant de définir les notions d'endomorphisme nilpotent et de matrice nilpotente.

Exemple (Endomorphismes nilpotents et matrices nilpotentes) i

Exercice (Indice de nilpotence d'une matrice)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente, d'indice p. Montrer que $p \leqslant n$. Montrer qu'il existe une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente d'indice n.

14

Considérons deux matrices nilpotentes $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: pour tout scalaire λ, λA est nilpotent.
En revanche, AB et $A+B$ ne sont pas en général nilpotentes.
Pour que $A+B$ soit nilpotente, il suffit que A et B commutent :

Pour que AB soit nilpotent, il suffit que A et B commutent. Plus généralement, si $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commute avec A (sans être nécessairement nilpotente), alors AC est nilpotente. Par exemple, si P est un polynôme admettant 0 pour racine, alors $P(A)$ est nilpotente.

Toute matrice semblable à une matrice nilpotente est nilpotente.

On a $\det(A) = 0$ et $\operatorname{tr}(A) = 0$.

Exercice (Matrices de trace nulle)

Montrer que le sous-espace vectoriel Ω de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ engendré par les matrices nilpotentes est l'hyperplan $\mathcal{H}$ constitué des matrices de trace nulle.

15

10. Polynômes et commutant d'un endomorphisme

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Définition (Polynôme en f)

Soit $P = \sum a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. On note

$$P(f) \overset{def}{=} \sum a_k f^k$$

On appelle *polynôme* en f tout endomorphisme de E de cette forme, *i.e.* un élément de $\operatorname{Vect}(f^k, k \in \mathbb{N})$. On note $\mathbb{K}[f]$ leur ensemble.

10.a

L'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{K}[X] & \to & \mathcal{L}(E) \\ & P & \mapsto & P(f) \end{array}$$

est un morphisme d'algèbres, dont l'image $\mathbb{K}[f]$ est donc également une algèbre.

Définition (Commutant d'un endomorphisme)

On appelle *commutant* de f et on note $\mathcal{C}(f)$ l'ensemble des endomorphismes de E commutant avec E :

$$\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E),\ f \circ g = g \circ f\}.$$

10.b

Proposition (Commutant d'un endomorphisme)

$\mathcal{C}(f)$ est à la fois un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $\mathcal{L}(E)$, contenant l'ensemble $\mathbb{K}[f]$ des polynômes en f.

10.a

En général, $\mathcal{C}(f)$ n'est pas commutatif, et contient strictement $\mathbb{K}[f]$.

Exercice (Commutant d'un projecteur)

Décrire $\mathcal{C}(f)$ lorsque f est un projecteur.

16

Exercice (Endomorphismes cycliques)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. On dit qu'un endomorphisme f de E est *cyclique* s'il existe $x_0 \in E$ tel que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.

1 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$ (*i.e.* f est nilpotent d'indice n). Montrer que f est cyclique

2 Montrer que le commutant d'un endomorphisme cyclique est constitué de ses polynômes.

17

Exercice (Commutant d'une matrice)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On nomme *commutant* de A et on note $C(A)$ l'ensemble des $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$.

1 Montrer que $C(A)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, contenant l'ensemble $\mathbb{K}[A]$ des polynômes en A.

2 Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des scalaires distincts deux à deux. Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutant avec $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Que dire d'un endomorphisme représenté dans une certaine base par une telle matrice ?

18

11. Dualité (pas explicitement au programme)

Voici quelques compléments culturels de difficulté raisonnable sur une notion classique en algèbre linéaire (qui était au programme avant la réforme).

Définition (Formes linéaires, dual)

On appelle *forme linéaire* sur E toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$. Leur ensemble $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est appelé *dual* de E, et noté E' ou E^*.

11.a

Lorsque E est de dimension finie, E est isomorphe à son dual.

Définition (Codimension)

La *codimension* d'un sous-espace vectoriel F dans un espace vectoriel E est la dimension de n'importe lequel de ses supplémentaires (lorsque cette dimension commune est finie).

11.b

Lemme pour la définition d'un hyperplan 11.a

Soit H un sous-espace vectoriel de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) H est de codimension 1.

(2) H est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

Démonstration

$\square$

Définition (Hyperplan) 11.c

On dit que H est un *hyperplan* de E lorsque l'une de ces deux conditions équivalentes est vérifiée.

Exercice (Forme linéaire sur le noyau d'une autre) 19

1 Soit φ une forme linéaire non nulle sur E, et $H = \ker \varphi$ l'hyperplan de E qu'elle définit. Montrer que toute forme linéaire ψ nulle sur H est colinéaire à φ.
2 Soit $u \in E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ telle que

$$\forall\, f \in R, \quad \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 0 \Rightarrow \int_0^1 u(t)f(t)\mathrm{d}t = 0$$

Montrer que u est constante.

Dans la suite du cours, E est supposé de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, et $B = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E.

Définition (Base duale) 11.d

On appelle *formes linéaires coordonnées* $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ associées à B les formes linéaires sur E données par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad \varphi_i(e_j) = \delta_{i,j}$$

Les formes linéaires coordonnées constituent une base B^* de E^*, appelée *base duale* de E.
On utilise souvent la notation $e_i^* \overset{def}{=} \varphi_i$, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.

Démonstration

Justification du fait que $(\varphi_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ soit une base :

$\square$

Formes linéaires coordonnées

Dans ce contexte, on a, pour tout $x \in E$:

$$x = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(x) e_i$$

(le vérifier sur la base B, puis étendre par linéarité).
Autrement dit, pour tout $x \in E$ et tout $i \in [\![1, n]\!]$, $e_i^*(x)$ n'est que la i-ème coordonnée x_i de x dans la base B, d'où le terme de formes linéaires coordonnées.
Parler de la forme linéaire coordonnée f_1^* selon un vecteur non nul f_1 n'a pas de sens, car il dépend des autres vecteurs de la base $(f_1, \dots, f_n)$.

11.1

Exercice (Formes linéaires coordonnées)

Donner la base duale de $((1, 1), (2, -1))$ de $\mathbb{R}^2$.

20

Équations d'hyperplan

Soit φ une forme linéaire non nulle sur E, et soit H son noyau. Puisque $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une base de E^*, il existe un unique n-uplet $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de scalaires tel que

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^*.$$

On a donc

$$H = \{x \in E, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0\}$$

et on dit que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$$

est une *équation* de H.

11.2

Exercice (Équations d'hyperplans)

Soit $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(\mu_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ des familles de scalaires non tous nuls. Montrer que les deux équations

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n}\mu_i x_i = 0$$

définissent un même hyperplan si et seulement si les vecteurs $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(\mu_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de $\mathbb{K}^n$ sont colinéaires. 21

Système d'équations d'un sous-espace vectoriel

Comme tout sous-espace vectoriel strict F de E est une intersection d'hyperplans, il admet un système d'équations linéaires. Par exemple, la droite $\mathbb{R}(1,1,1)$ de $\mathbb{R}^3$ admet le système d'équations : 11.3

$$\begin{cases} y - x = 0 \\ z - x = 0 \end{cases}$$

12. Feuille de TD 2 : Algèbre linéaire

12.1. Révisions d'algèbre linéaire

Exercice 1 (Liberté de familles) — 1

1 Montrer que si (u_1, u_2, u_3) est un triplet de vecteurs tous non nuls de $\mathbb{R}^3$, orthogonaux deux à deux, alors (u_1, u_2, u_3) est libre.
2 La famille $(f_a\ : x \mapsto \cos(x+a))_{a\in\mathbb{R}}$ est-elle libre ? Quelles sont ses sous-familles libres ?
3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $a_1, \dots, a_n$ des réels distincts deux à deux. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on introduit $P_i\ : x \mapsto \prod_{j=1, j\neq i}^{n} (x - a_j)$. Montrer que $(P_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est libre.
4 *(Mines MP 08, Mines MP 09)* Montrer que la famille des fonctions réelles de la variable réelle $t \mapsto |t-a|$, lorsque a décrit $\mathbb{R}$, est libre.
5 Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on définit $g_a\ : x \mapsto e^{ax} \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Montrer que $(g_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre.
6 Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E. On suppose que $f^p(x) = 0$ et $f^{p-1}(x) \neq 0$ pour un certain vecteur x de E et où $p \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que $(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est libre.
7 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $h_n\ : x \mapsto x^n \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Montrer que $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre.
8 Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on pose $u^m = (\sin(1/n^m))_{n\in\mathbb{N}^*}$. Montrer que $(u^m)_{m\in\mathbb{N}}$ est libre.
9 *(X MP 08)* Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n\ : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(x^n)$. Montrer que la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre.
10 *(X MP 08)* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La famille de fonctions

$$(x \mapsto \sin(nx), x \mapsto \sin((n-1)x)\cos(x), \dots, x \mapsto \sin(x)\cos((n-1)x))$$

est-elle libre ?
11 *(X MP 08)* Soit $f\ : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \ln(1+x)$. Montrer que $(f, f\circ f, f\circ f\circ f)$ est un système libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

Exercice 2 (Propagation des propriétés par linéarité) — 0 à 1

Soit E et F deux espaces vectoriels, E étant de dimension finie. Soit $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$.
1 Montrer que si f est nulle sur une famille génératrice de E, alors f est identiquement nulle.
2 Montrer que si f, g coïncident sur une famille génératrice de E, alors $f = g$.
3 Montrer que si (dans le cas où $E = F$), pour tout $x \in E$, $(x, f(x))$ est liée, alors f est une homothétie.

Exercice 3 (Polynôme annulateur) — 1

1 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, vérifiant $f^3 + 2f + 5\mathrm{Id}_E = 0$. Montrer que f est un automorphisme de E.
2 Soit f un endomorphisme de E, vérifiant l'identité $f^2 + f - 2\mathrm{Id}_E = 0$. Établir $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f + 2\mathrm{Id}_E)$, $\mathrm{Im}(f + 2\mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$, $E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f + 2\mathrm{Id}_E)$.
3 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^3 = f^2 + f$. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$. Généraliser cet exemple

Exercice 4 (La nilpotence passe au crochet de Lie) — 1

Soit u un endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel E. Montrer que $\varphi\ : v \mapsto uv - vu$ est un endomorphisme nilpotent de $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 5 (Projecteurs et puissances d'un endomorphisme) — 1

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^2 + f - 2\mathrm{Id}_E = 0$. On a vu $E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f + 2\mathrm{Id}_E)$. Montrer que le projecteur p sur $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f + 2\mathrm{Id}_E)$ appartient à $\mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, f)$. On pose $q = \mathrm{Id}_E - p$. Expliquer en quoi p et q permettent de calculer les puissances de f.

Exercice 6 (Inégalités et rang) — 1

1 Soit $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$ deux morphismes entre espaces vectoriels de dimensions finies. Montrer :

$$|\operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(v)| \leqslant \operatorname{rg}(u+v) \leqslant \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v).$$

2 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, et u, v deux éléments de $\mathcal{L}(E)$. Montrer :

$$\operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v) - n \leqslant \operatorname{rg}(u \circ v) \leqslant \min(\operatorname{rg}(u), \operatorname{rg}(v))$$

Exercice 7 (Matrices de rang 1) — 1

1 Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de rang 1 si et seulement si il existe deux vecteurs colonne $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nuls tels que $A = X^tY$.

2 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1. Montrer que $A^2 = \operatorname{tr}(A)A$.

Exercice 8 (Égalité de rangs) — 3

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, E)$ telles que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$. Montrer que $\mathrm{Im}(g)$ et $\ker(f)$ sont supplémentaires dans E, puis que $f, g, g \circ f, f \circ g$ ont le même rang.

Exercice 9 (Matrices commutant avec un ensemble de matrices) — 2

1 Trouver les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutant avec toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2 Trouver les matrices $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ commutant avec toute matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 10 (Déterminant de Vandermonde) — 1

On considère un entier $n \geqslant 1$ et $n+1$ scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$. Calculer :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n & \dots & \alpha_{n+1}^n \end{vmatrix}.$$

Exercice 11 (Déterminant par blocs) 2

Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ $(p,q \geqslant 1)$.
1 Calculer
$$\begin{vmatrix} A & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & B \end{vmatrix}.$$
2 Étendre ce résultat à $\begin{vmatrix} A & C \\ 0_{q,p} & B \end{vmatrix}$, où $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

Exercice 12 (Un déterminant tridiagonal) 3

Soit a,b,c trois réels, et Δ_n le déterminant de taille n $(n \geqslant 2)$ suivant :
$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & & 0 \\ c & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ 0 & & c & a \end{vmatrix}$$
On pose $\Delta_0 = 1$, $\Delta_1 = a$.
1 Montrer que pour tout entier naturel n :
$$\Delta_{n+2} = a\Delta_{n+1} - bc\Delta_n.$$

2 En déduire une méthode de calcul de Δ_n pour tout entier naturel n.
3 Donner une formule explicite pour Δ_n dans le cas où $a^2 = 4bc$.

Exercice 13 (Calcul astucieux de déterminant) 3

(Centrale PC 09) Soit a,b,c trois réels, $b \neq c$. Calculer :
$$\begin{vmatrix} a & b & \dots & \dots & b \\ c & a & \ddots & \mathbf{b} & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \mathbf{c} & \ddots & \ddots & b \\ c & \dots & \dots & c & a \end{vmatrix}.$$

12.2. Hyperplans, dualité

Exercice 14 (Tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ rencontre $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$) 1

Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $(n \geqslant 2)$.
1 Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $H = \{M, \mathrm{tr}(AM) = 0\}$.
2 En déduire que H contient une matrice inversible.

Exercice 15 (Sur le dual) — 2

Soit E un espace vectoriel. On note E^* son dual.

1 Montrer que si f et g sont deux formes linéaires sur E de même noyau, alors f et g sont colinéaires.

2 On suppose ici que $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\begin{array}{rccl} \Phi_n : & E & \to & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & f^{(n)}(0) \end{array}.$$

Montrer que $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre.

3 Ici, E est de dimension 3, et u est un endomorphisme de E tel que $u^2 = 0$. Montrer l'existence de $(a, f) \in E \times E^*$ tel que, pour tout $x \in E$:

$$u(x) = f(x)a.$$

Exercice 16 (Liberté d'une famille de formes linéaires) — 4

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, et $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ des formes linéaires sur E ($k \in \mathbb{N}^*$). Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

(1) $(\varphi_1, \dots, \varphi_k)$ est libre dans $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

(2) Pour tous scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, il existe un vecteur x de E tel que, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, on ait : $\varphi_i(x) = \lambda_i$.

Exercice 17 (Base antéduale et bidual) — 4 et 5

E est supposé de dimension finie non nulle n.

1 Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccl} \nabla : & E & \to & E^{**} \\ & x & \mapsto & (f \mapsto f(x)) \end{array}$$

est un isomorphisme de E sur son *bidual* E^{**}. On l'appelle *isomorphisme canonique* entre E et son bidual.

2 Soit L une base de E^*. Montrer qu'il existe une unique base B de E telle que $L = B^*$: c'est la *base antéduale* de L.

3 Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$. Montrer que la famille $\mathcal{F} = (f_0, \dots, f_n)$ est une base de E^* et donner la base anteduale lorsque :

i $f_i(P) = P(x_i)$ où $x_0, \dots, x_n$ sont des scalaires distincts.

ii $f_i(P) = P^{(i)}(a)$, où $a \in \mathbb{K}$.

4 Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension p, l'ensemble des formes linéaires s'annulant sur F est un sous-espace vectoriel de E^* de dimension $n - p$.

5 Soit $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_q)$ une famille libre de formes linéaires sur E. Soit F l'intersection des noyaux respectifs H_i des formes linéaires φ_i.

i Montrer que toute forme linéaire ψ s'annulant sur F est combinaison linéaire de $\varphi_1, \dots, \varphi_q$.

Indication : on pourra introduire l'application

$$\begin{array}{rccl} \Delta : & E & \to & \mathbb{K}^{q+1} \\ & x & \mapsto & (\psi, \varphi_1, \dots, \varphi_q) \end{array}$$

et considérer une équation d'un l'hyperplan contenant son image.

ii Montrer que F est de dimension $n - q$.

13. Oraux

Exercice 18 (Détermination d'une base antéduale (CCP 12)) 0

Soit $f_1 : (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mapsto 2x_1 - x_2 + x_3$, $f_2 : (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x_2 - x_3$, $f_3 : (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mapsto -x_1 + 4x_2 + 2x_3$. Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ et déterminer la base antéduale.

Exercice 19 (Étude algébrique d'une partie de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (CCP)) 0

Soit $E = \left\{ \begin{pmatrix} a+c & -b & c \\ b & a-2c & -b \\ c & b & a+b \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ; préciser sa dimension. L'ensemble E est-il un sous-anneau de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

Exercice 20 (Applications linéaires dont la composée est un projecteur de rang 2 (CCP)) 0

Soient $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ et $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ tels que $u \circ v$ soit un projecteur de rang 2 de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $\operatorname{Im}(u \circ v) = \operatorname{Im} u$ puis que $v \circ u = \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^2}$.

Exercice 21 (Rang d'une matrice par blocs (Centrale)) 0

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$. Exprimer le rang de B en fonction de celui de A.

Exercice 22 (Puissances d'une matrice) 0

1 (TPE) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Trouver un polynôme annulateur de A de degré 2. En déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

2 (Centrale) Soient $a \in \mathbb{C}^*$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer M^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 23 (Dimension d'un sous-espace matriciel (CCP 12)) 0

Soient $n \geqslant 2$ et $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ M + {}^tM = 2\operatorname{tr}(M) I_n\}$. Montrer que E est un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer sa dimension.

Exercice 24 (Caractérisation de la supplémentarité du noyau et de l'image (INT 08)) 1

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) $\ker u = \ker u^2$;

(2) $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} u^2$;

(3) $E = \ker u \oplus \operatorname{Im} u$.

Que subsiste-t-il en dimension infinie ?

Exercice 25 (Matrice à diagonale dominante (X MP 09, X PSI 09)) 1

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall\, i \in [\![1, n]\!], |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$$

(on dit que A est à *diagonale dominante*).
Montrer que A est inversible.

Exercice 26 (Matrices de rang 1) 2

1 (CCP MP) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{rg} A = 1$ et $\operatorname{tr} A = 1$. Montrer que $A^2 = A$.

2 (ENSAM) Soient $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \in K^{2n}$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ où $a_{i,j} = x_i y_j$. à quelle condition la matrice A est-elle diagonalisable ? Exprimer le déterminant de $I_n + A$ en fonction de la trace de A.

3 (X MP) Soient A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1, λ dans $\mathbb{R}$. La matrice $B \overset{def}{=} I_n + \lambda A$ est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.

4 (Mines MP) Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1. Montrer que f est nilpotent ou diagonalisable (*i.e.* il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale).

Exercice 27 (Inverse d'une matrice (X MP 09)) 2

Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose $I_n - AB$ inversible. Montrer que $I_n - BA$ est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 28 (Formes linéaires sur des espaces de polynômes) 2

1 *(Mines MP 09)* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un unique $(c_1, \dots, c_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que, pour tout P de $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$:

$$\int_{-1}^{1} P(t)\mathrm{d}t = 2P(0) + \sum_{k=1}^{n} c_k(P(k) + P(-k) - 2P(0)).$$

2 *(Centrale MP 07)* Soit $A = \{P \in \mathbb{R}_n[X], \sum_{k=1}^{n} P^{(k)}(1) = 0\}$. Quelle est la dimension de A ? Donner une base de A.

3 *(X MP 09)* Déterminer les $a \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ tels qu'il existe $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$\forall\, P \in \mathbb{R}_4[X], \quad P'(a) = \alpha P(-2) + \beta P'(-2) + \gamma P(-1) + \delta P(1/2).$$

Exercice 29 (Si A est une involution, sa comatrice aussi) 3

(CCP) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^2 = I_n$. Montrer que $(\text{com}(A))^2 = I_n$.

Exercice 30 (Combinaison de projecteurs avec des coefficients irrationnels donnés (CCP)) 3

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
1 Soit p un projecteur de E. Prouver que $\text{tr}(p) = \text{rg}(p)$.
2 On rappelle que $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$ pour $n \in \{2, 3, 6\}$. Soient p, q et r trois projecteurs de E. À quelle condition $p + \frac{1}{\sqrt{2}}q + \frac{1}{\sqrt{3}}r$ est-il un projecteur ?

Exercice 31 (Polynôme complexe laissant stable l'ensemble des rationnels *(Mines PSI 08)*) 3

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On suppose que $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$. Montrer que $P \in \mathbb{Q}[X]$.

Exercice 32 (Sous-espaces d'intersection non triviale (CCP)) 3

Soient E un espace vectoriel de dimension n, $F_1, \ldots, F_p$ des sous-espaces de E tels que : $\dim F_1 + \dim F_2 + \cdots + \dim F_p > n(p-1)$. Montrer : $F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_p \neq \{0\}$.

Exercice 33 (Perturbation matricielle sans effet sur le déterminant) 3

1 *(X MP 09)* Soit n un entier pair, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique, J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Montrer que, pour tout réel t, $\det(A + tJ) = \det(A)$.
2 *(X PC 09, Petites Mines 12)* Déterminer les $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que : $\forall\, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \det(A + M) = \det(A) + \det(M)$.

Exercice 34 (Une inégalité avec du déterminant *X 07, Mines MP 08*) 4

Soit A et H dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $\text{rg}(H) = 1$. Montrer : $\det(A + H)\det(A - H) \leqslant \det A^2$.

Exercice 35 (Noyaux des itérés de dimension finie (X MP 10)) 4

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose $\ker(f)$ de dimension finie. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ker(f^n)$ est de dimension finie.

Exercice 36 (Endomorphismes conservant la trace d'un produit (ENS MP)) 4

On note G l'ensemble des endomorphismes u de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tels que $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2, \operatorname{tr}(u(A)\,u(B)) = \operatorname{tr}(AB)$.

1 Montrer que tout élément de G est un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2 Montrer que G est un sous-groupe de $\operatorname{GL}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$.

3 Expliciter les éléments u de G vérifiant $u(I_2) = I_2$.

CHAPITRE III

Fonctions, convexité

Sommaire

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, les intervalles considérés sont d'intérieur non vide, et I est un tel intervalle.

1. Rappels d'analyse

1.1. Généralités

La propriété de croissance d'une fonction est stable par somme, par produit par un scalaire positif, par composition.

Exercice (Croissance d'un produit de fonctions croissantes positives) 1

On considère deux fonctions f et g de I dans $\mathbb{R}$.
1 On suppose f et g croissantes et positives. Montrer que fg est croissante.
2 Montrer que si on suppose seulement f et g croissantes, fg n'est pas nécessairement croissante.

Définition (Fonction périodique, groupe des périodes) 1.a

Soit f une fonction de Ω dans $\mathbb{K}$, où Ω est une partie de $\mathbb{R}$. Soit $T \in \mathbb{R}$. On dit que f est *T-périodique* si, pour tout $x \in \Omega$, $x+T$ et $x-T$ appartiennent à Ω, et $f(x+T) = f(x)$.
On appelle *groupe des périodes* d'une fonction numérique f l'ensemble de ses périodes. C'est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$.
On dit que f est *périodique* si elle admet une période non nulle.

Démonstration

$\square$

Soit f une fonction périodique, et $T \in \mathbb{R}_+^*$. On dit que T est *la période* de f si T est la plus petite période strictement positive de f (lorsqu'elle existe). Autrement dit, son groupe des périodes G est égal à $T\mathbb{Z}$.

Il n'est pas toujours possible de définir *la* période d'une fonction périodique (si son groupe des périodes est dense dans $\mathbb{R}$).

Exemple (Fonctions périodiques)

La période des fonctions cosinus et sinus est 2π. La période de la fonction tangente est π.

i

1.2. Limite, continuité ponctuelle

Définition (Voisinage d'un point de la droite numérique achevée)

Soit A une partie de $\mathbb{R}$, et $a \in \mathbb{R}$.
On dit que A est un *voisinage*
– de a (ou que a est *intérieur* à A) si

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, [a-\varepsilon, a+\varepsilon] \subset A$$

– de $+\infty$ si

$$existsM \in \mathbb{R}, [M, +\infty[\subset A$$

– de $-\infty$ si

$$\exists M \in \mathbb{R},]-\infty, M] \subset A$$

1.b

Voisinage d'un point

Soit $c \in \overline{\mathbb{R}}$.

(1) Si A est un voisinage de c, et si B contient A, alors B est un voisinage de c.

(2) L'intersection d'un nombre fini de voisinages de c en est encore un.

1.1

Deux éléments distincts quelconques de $\overline{\mathbb{R}}$ admettent des voisinages disjoints.

Nous noterons $\mathcal{V}_a$ l'ensemble des voisinages de a.

Un point c de $\overline{\mathbb{R}}$ est dit *adhérent* à une partie A de $\mathbb{R}$ si tout voisinage de c rencontre A. Cela revient à dire que c est limite d'une suite de points de A.

Rappel (Limite d'une fonction en un point adhérent à son domaine)

Vous avez vu neuf cas possibles exprimant que f admette $b \in \overline{\mathbb{R}}$ pour limite en a adhérent à I.
Détaillez-en quelques-uns :

En fait, on peut unifier ces neuf cas en utilisant la notion de voisinage : f admet b pour limite en a si et seulement si pour tout voisinage V_b de b, il existe un voisinage W_a de a tel que $f(W_a \cap I) \subset V_b$, *i.e.*

$$\forall V_b \in \mathcal{V}_b, \exists W_a \in \mathcal{V}_a, f(W_a \cap I) \subset V_b$$

Le fait d'unifier ainsi les différents cas permet par exemple d'étudier la limite d'une composée en toute généralité.

Attention : l'existence d'une limite ne va pas de soi. Dans certaines situations, c'est une des conclusions, dans d'autres, c'est une hypothèse.

Rappel (Continuité ponctuelle. Caractérisation séquentielle)

1.3. Continuité globale

Définition de la continuité globale.

Rappel (Théorème des valeurs intermédiaires)

Donner plusieurs formulations de ce théorème.

Rappel (Image continue d'un segment)

D'une manière générale, la plupart des propriétés d'un intervalle (majoré, minoré, borné, fermé, ouvert, ni l'un ni l'autre) ne sont pas conservées par une fonction continue.

Rappel (Bijection réciproque d'une fonction continue)

Rappel (Une fonction continue et injective est strictement monotone)

Énoncé et démonstration.

Rappel (Définition de l'uniforme continuité)

Négation de l'uniforme continuité :

Voir aussi l'exercice 7 de TD pour une méthode de démonstration de non uniforme continuité.

Rappel (Théorème de Heine)

Rappel (Liens entre continuité, uniforme continuité, caractère lipschitzien)

1.4. Dérivation

Rappel (Dérivabilité et DL_1)

Définition de la dérivabilité ponctuelle, équivalence en termes de DL_1. Non extension de cette équivalence aux fonctions plusieurs fois dérivables.

Rappel (Dérivabilité de la bijection réciproque)

Rappel (Dérivée et extremum local)

Rappel (Théorème de Rolle)

Ne s'étend pas aux fonctions à valeurs complexes.

Rappel (Égalité des accroissements finis)

Fonction K-lipschitziennes et dérivation.

Rappel (Théorème du prolongement $\mathcal{C}^1$)

Rappel (Dérivabilité et (stricte) monotonie)

1.5. Compléments

Il ne faut pas perdre de vue qu'en analyse, le plus souvent, on travaille sur un intervalle : la plupart des grands résultats globaux d'analyse ne sont plus valables si on change de domaine.

Exemple (Théorèmes sur les fonctions nécessitant que l'on travaille sur un intervalle)

La fonction tangente est dérivable sur son domaine de définition, et sa dérivée est strictement positive en tout point de ce domaine. Pourtant, la fonction tangente n'est pas croissante.

ii

Rappel (Technique du rétrécissement)

Quand on travaille avec un intervalle non borné, on peut pour certaines questions se ramener à un intervalle borné, en utilisant une fonction comme arctan, définie sur $\mathbb{R}$ et d'image $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Exercice (Rolle généralisé)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivable, ayant la même limite finie en $+\infty$ et $-\infty$. Montrer qu'il existe un réel c en lequel f' s'annule :

1 En utilisant la technique du rétrécissement.

2 En montrant par l'absurde que f n'est pas injective.

2

2. Barycentres. Parties convexes d'un espace vectoriel réel

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, que l'on munit de sa structure affine (ses éléments sont vus comme des points, via le choix d'une origine).

Définition (barycentre)

Soit $((A_i, \lambda_i))_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de n éléments de $E \times \mathbb{R}$, telle que $\mu \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \neq 0$.
Le point B défini par

$$\overrightarrow{OB} = \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{OA_i}$$

est appelé *barycentre* de $((A_i, \lambda_i))_{i \in [\![1,n]\!]}$.
Chaque couple (A_i, λ_i) est appelé *point pondéré* A_i de poids λ_i, μ est appelé *poids total* de la famille $((A_i, \lambda_i))_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de points pondérés.
Dans le cas où chaque λ_i vaut 1, le barycentre de la famille des points pondérés est appelé *isobarycentre* de la famille de points $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

2.a

Toujours par définition, le poids total est *non nul*. Il faut vérifier que $\mu \neq 0$ avant d'utiliser le (et même de parler du) barycentre d'une famille de points pondérés [1].

Si l'on change l'ordre d'apparition des points pondérés (A_i, λ_i) dans la famille $((A_i, \lambda_i))_{1 \leqslant i \leqslant n}$, le barycentre reste inchangé : on peut dire qu'il y a « commutativité » du barycentre.

Par abus de langage, on parle d'isobarycentre d'un ensemble de points, pour désigner l'isobarycentre de la famille constituée, dans l'ordre de son choix, de la famille de ces points, affectés du poids 1.

En PC et SI, vous utilisez la notion de centre de masse (ou de gravité).

Illustration

Par définition du barycentre, on connaît très facilement ses coordonnées lorsqu'on connaît celles des points le définissant. Cela se traduit aussi en termes complexes : si A_i est d'affixe a_i, alors B est d'affixe $b = \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$.

1. On pourra omettre de le signaler dans les cas les plus évidents, comme pour le barycentre d'un couple de points pondérés $((A, \lambda), (B, 1-\lambda))$, où $\lambda \in \mathbb{R}$

Proposition (Barycentre)

(1) *(Le barycentre est indépendant de l'origine)* Pour tout point M du plan, on a :

$$\overrightarrow{MB} = \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{MA_i}$$

(2) *(Caractérisation du barycentre)* Le barycentre de la famille des points pondérés (A_i, λ_i) est l'unique point solution de l'équation suivante (d'inconnue M) :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{MA_i} = \overrightarrow{0}$$

(3) *(Homogénéité du barycentre)* Si l'on multiplie tous les poids par un même réel non nul, le barycentre est inchangé ;

(4) *(Associativité du barycentre)* Soit $m \in [\![2, n]\!]$ tel que $\mu_m \overset{def}{=} \sum_{k=m}^{n} \lambda_k \neq 0$, et soit B_m le barycentre de $((A_i, \lambda_i))_{m \leqslant i \leqslant n}$ d'au moins deux éléments. B est alors le barycentre de

$$((A_1, \lambda_1), \ldots, (A_{m-1}, \lambda_{m-1}), (B_m, \mu_m)).$$

2.a

Démonstration

□

Exercice (Les médianes sont concourantes)

Montrer que les médianes d'un (vrai) triangle sont concourantes.

3

Définition (segment)

Soit A et B deux points de E. Le *segment* $[AB]$ est l'ensemble des barycentres de $((A, \lambda), (B, 1 - \lambda))$, où λ décrit $[0, 1]$.

2.b

Définition (Partie convexe)

Une partie $\mathcal{A}$ de E est dite *convexe* si elle contient le segment joignant deux quelconques de ses points.

2.c

Illustration

Exemple (Parties convexes)

(1) Une partie de $\mathbb{R}$ est convexe si et seulement si c'est un intervalle.
(2) Une intersection quelconque de convexes est convexe.
(3) Les disques (fermés ou ouverts) du plan sont convexes.

i

Proposition (Caractérisation des parties convexes)

Une partie $\mathcal{A}$ de E est convexe si et seulement si tout barycentre à poids positifs de points de $\mathcal{A}$ est encore dans $\mathcal{A}$.

2.b

Démonstration

Le sens indirect est clair, puisque tout point d'un segment $[AB]$ est barycentre de A et de B affectés de certains poids positifs.
Réciproquement, si $\mathcal{A}$ est convexe, alors on montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que tout barycentre de n points de $\mathcal{A}$ affectés de poids positifs est encore dans $\mathcal{A}$, l'hérédité se montrant avec l'associativité du barycentre.

$\square$

Proposition (Enveloppe Convexe)

Soit Ω une partie de E. Il existe une plus petite partie convexe $\mathcal{C}$ de E contenant Ω, pour la relation d'ordre d'inclusion, *i.e.* :

(1) $\Omega \subset \mathcal{C}$;

(2) $\mathcal{C}$ est convexe ;

(3) Si $\mathcal{C}'$ est un convexe contenant Ω, alors $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}'$.

2.c

Démonstration

L'unicité se prouve en remarquant que deux ensembles vérifiant les conditions de l'énoncé doivent se contenir l'un l'autre, et donc être égaux.
Existence : on pose

$$\mathcal{C} \stackrel{def}{=} \bigcap_{\substack{\mathcal{C}' \text{ convexe} \\ \Omega \subset \mathcal{C}'}} \mathcal{C}',$$

et on vérifie aisément que c'est une partie de E, contenant Ω (car intersection de telles parties), convexe (comme intersection de telles parties), et contenue dans tout convexe contenant Ω (par construction).

□

Définition (Enveloppe Convexe)

Dans le contexte de la proposition précédente, $\mathcal{C}$ est appelée *enveloppe convexe* de Ω.

2.d

Bien entendu, tout ensemble convexe est sa propre enveloppe convexe. L'enveloppe convexe de Ω est l'intersection de tous les convexes contenant Ω.

L'enveloppe convexe d'un cercle dans le plan est le disque fermé qu'il délimite.

Illustration

Proposition (Enveloppe convexe d'un nombre fini de points)

L'enveloppe convexe $\mathcal{C}$ de p points coplanaires $A_1, \ldots, A_p$ est la plaque délimitée par le plus petit polygone convexe contenant ces p points.
C'est l'ensemble Ω des barycentres de $A_1, \ldots, A_p$ affectés de poids positifs.

2.d

Démonstration

On montre que Ω
(1) contient $\{A_1, \ldots, A_p\}$ (en choisissant les bons poids) ;
(2) est convexe (par associativité du barycentre) ;
(3) est contenu dans tout convexe contenant $\{A_1, \ldots, A_p\}$ (par la proposition précédente).
Ainsi, Ω est donc bien l'enveloppe convexe de $\{A_1, \ldots, A_p\}$.

□

Enveloppe convexe d'une partie non vide

Plus généralement, l'enveloppe convexe d'une partie non vide Ω de E est l'ensemble des barycentres de familles finies de points de Ω, pondérés par des poids positifs.

2.1

Voici un exercice extrêmement classique utilisant la notion d'enveloppe convexe :

Exercice (Utilisation de la dérivée logarithmique (Centrale MP 06))

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg(P) \geqslant 2$.
1 *(Théorème de Gauss-Lucas)* Montrer que les zéros de P' sont dans l'enveloppe convexe des zéros de P.
2 On suppose que toute racine de P est de partie réelle positive. Montrer qu'il en va de même des racines de P'.
3 On suppose de plus que P possède des racines non imaginaires pures. Montrer que toute racine imaginaire pure de P' est racine de P.

4

3. Fonctions convexes

3.1. Définition, premières propriétés, lemme des trois pentes

On observe (par un simple calcul) que si $x, y, z \in \mathbb{R}$, où $x < z$ et $y \in [x, z]$, alors $y = \lambda x + (1-\lambda)z$, avec $\lambda = \frac{z-y}{z-x}$ et $(1-\lambda) = \frac{y-x}{z-x}$.

Définition (Fonction convexe)

Une application $f : I \to \mathbb{R}$ est dite *convexe* si
$$\forall (a,b) \in I^2, \forall \lambda \in [0,1], \quad f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$$
Une application f est dite *concave* si $-f$ est convexe, *i.e.* pour tous points a et b de I, tout scalaire $\lambda \in [0,1]$:
$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \geqslant \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$$

3.a

Pour toute fonction f, on a égalité ci-dessus en prenant $\lambda \in \{0,1\}$: une fonction est donc convexe si et seulement si les inégalités ci-dessus ont lieu pour tout $\lambda \in]0,1[$.

Interprétation géométrique : la convexité signifie que « tout sous-arc est sous sa corde ». Plus précisément, soit A (resp. B) le point du graphe Γ de f, d'abscisse a (resp. b).

Fixons $\lambda \in [0,1]$:

(1) $f(\lambda a + (1-\lambda)b)$ est l'ordonnée du point de Γ d'abscisse $\lambda a + (1-\lambda)b$.

(2) $\lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$ est l'ordonnée du point $((A,\lambda),(B,(1-\lambda))$

Lorsque λ parcourt $[0,1]$, $((A,\lambda),(B,(1-\lambda)))$ décrit la corde $[AB]$.

Illustration

Bien entendu, la concavité signifie que tout sous-arc est au-dessus de sa corde.

Exemple (Fonctions convexes)

(1) Les applications affines sont à la fois convexes et concaves. Ce sont les seules.

(2) Si $f_1,\dots,f_n$ sont convexes, alors pour tous réels *positifs ou nuls* α_i ($i \in [\![1,n]\!]$), l'application $\sum_{k=1}^{n} \alpha_i f_i$ est convexe.

i

Proposition (Épigraphe et convexité)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On considère l'ensemble :

$$\Omega = \{(x,y) \in I \times \mathbb{R}, \quad y \geqslant f(x)\}$$

(on l'appelle *épigraphe* de f sur I). L'application f est convexe si et seulement si son épigraphe est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.

3.a

Illustration

Démonstration

$\square$

f est concave si et seulement si la partie de $\mathbb{R}^2$ située sous la courbe de f est convexe.

Proposition (Inégalité de convexité généralisée (ou inégalité de Jensen discrète))

Soit f une fonction convexe sur I. Alors pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, pour tous points $x_1, \ldots, x_n$ de I, tous réels positifs ou nuls $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, de somme 1, on a :

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n)$$

3.b

Démonstration

On peut utiliser la convexité de l'épigraphe Ω de f pour montrer ce résultat :

$\square$

Exercice (Sup de fonctions convexes)

Soit $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions convexes. Montrer que $\sup\{f_1, \ldots, f_n\}$ est une fonction convexe.

5

Lemme des trois pentes

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. L'application f est convexe si et seulement si pour tous points x, y, z de I, tels que $x < y < z$:

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

3.c

Démonstration

Soit $x < y < z$ trois éléments de I. L'inégalité
$$f(y) \leqslant \frac{z-y}{z-x} f(x) + \frac{y-x}{z-x} f(z)$$
est équivalente à chacune des deux inégalités suivantes :
$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \quad \text{et} \quad \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$
La fonction f est convexe si et seulement si la première inégalité a lieu pour tous éléments x, y, z de I, $x < y < z$. On a donc prouvé un peu mieux que prévu.

□

Illustration

Cette interprétation graphique permet de retrouver ce résultat très rapidement.

Interprétation fonctionnelle : f est convexe si et seulement si, pour tout point a de I, l'application $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$. Ce résultat, important pour les démonstrations à venir, peut s'interpréter comme la croissance des pentes dont on a fixé une extrémité.

Illustration

3.2. Convexité et régularité

L'étude de la régularité des applications convexes n'est pas explicitement au programme. Voici en exercice les propriétés qu'on peut montrer :

Exercice (Convexité et régularité) 6

Une fonction convexe sur I est continue sur $\mathring{I}$ (l'intérieur de I, *i.e.* l'ensemble des points dont I est un voisinage), dérivable à gauche et à droite en tout point a de $\mathring{I}$, et $f'_g(a) \leqslant f'_d(a)$.
Montrer qu'elle n'est pas nécessairement continue en les extrémités de I, et que si elle l'est, elle n'y est pas forcément dérivable.

Proposition (Caractérisations de la convexité d'une fonction dérivable) 3.d

Soit f une application dérivable sur I. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) L'application f est convexe.

(2) f' est croissante.

(3) La courbe est située au-dessus de chacune de ses tangentes, *i.e.* :

$$\forall a \in I, \forall x \in I, \quad f(x) \geqslant f(a) + (x-a)f'(a).$$

Illustration

Démonstration

Procéder par implications cycliques (pour (1) $\Rightarrow$(2), utiliser le lemme des trois pentes, pour (2) $\Rightarrow$(3), utiliser l'égalité des accroissements finis, et pour (3) $\Rightarrow$(1), fixer $x, y, z \in I$ tels que $x < y < z$ et appliquer (3) pour $a = y$) :

□

Corollaire (Caractérisation pratique de la convexité)

Soit f une fonction deux fois dérivable sur I. La fonction f est convexe (resp. concave) si et seulement si $f'' \geqslant 0$ (resp. $f'' \leqslant 0$).

3.e

Dans la pratique, c'est souvent ce résultat que l'on utilise pour prouver la convexité d'une fonction.

Interprétation graphique d'un *point d'inflexion* a ($f''(a) = 0$, et f'' change de signe au point a) : exemples de sin, sh, th.

Illustration

Exemple (Encore des fonctions convexes)

(1) L'application exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$ (ainsi que ch), l'application ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit notamment

$$\forall x > -1, \ln(1+x) \leqslant x$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geqslant 1 + x$$

(2) L'application sinus est concave sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ (et même sur $[0, \pi]$). Il en résulte l'encadrement très utile :

$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad \frac{2}{\pi}x \leqslant \sin x \leqslant x$$

(3) Les applications $x \mapsto a^x$ sont convexes sur $\mathbb{R}$.

(4) L'application $x \mapsto x^\alpha$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ est concave si $\alpha \in [0, 1]$ et convexe si $\alpha \in \mathbb{R}_- \cup [1, +\infty[$. On a donc, lorsque $\alpha \geqslant 1$, pour tout $x \in]-1, +\infty[$:

$$(1+x)^\alpha \geqslant 1 + \alpha x$$

ii

4. Feuille de TD 3 : Fonctions, convexité

4.1. Révisions et compléments sur les fonctions numériques

Exercice 1 (Fonctions périodiques et limite en l'infini) 0

Caractériser les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodiques admettant une limite en $+\infty$.

Exercice 2 (Continuité du max et du min) 1

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I. Montrer que $\sup(f, g)$ et $\inf(f, g)$ sont continues.

Exercice 3 (Points fixes) 1

1 Montrer que si $f : [0, 1] \to [0, 1]$ est continue, alors f admet un point fixe.
2 Montrer que si $f : [0, 1] \to [0, 1]$ est croissante, alors f admet un point fixe.
3 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue décroissante. Montrer que f admet un unique point fixe.
4 Soit I un segment et f une application continue telle que $f(I) \subset I$. Montrer que f admet au moins un point fixe.
5 Même question, en supposant cette fois $I \subset f(I)$.

Exercice 4 (Équations fonctionnelles) 1 à 4

1 Trouver toutes les fonctions $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall\, x \in [0, 1], \quad f(x^2) = f(x).$$

2 Déterminer les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x + y) = f(x) + f(y).$$

3 Déterminer les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

4 Trouver toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ admettant pour périodes 1 et $\sqrt{2}$.
5 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante et involutive (*i.e.* $\forall\, x \in \mathbb{R}, f \circ f(x) = x$). Montrer que f est l'application identique sur $\mathbb{R}$.
6 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(ax + b) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, où a est fixé différent de 1 et -1, et $b \in \mathbb{R}$. Montrer que f est constante.
7 Déterminer les applications $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ telles que $\lim\limits_{0} f = +\infty$, $\lim\limits_{+\infty} f = 0$ et : $\forall\, x, y > 0, \quad f(xf(y)) = yf(x)$.
Indication : étudier les points fixes de f.

Exercice 5 (Groupe des périodes de la dérivée) 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable périodique. Montrer que f' est périodique, de même groupe des périodes que f.

Exercice 6 (Fonction continue périodique) 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, périodique, continue et non constante.
1 Montrer que f admet une plus petite période T (strictement positive).
2 Montrer que ce résultat tombe en défaut si on ne suppose plus f continue.
3 Montrer que f est bornée, et qu'il existe $u \in \mathbb{R}$ tel que $f(\mathbb{R}) = f([u, u + T/2])$.

Exercice 7 (Caractérisation séquentielle de l'uniforme continuité) 2

1 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application uniformément continue. Montrer que si (x_n) et (y_n) sont des suites d'éléments de I telles que $\lim_n (y_n - x_n) = 0$, alors $\lim_n (f(y_n) - f(x_n)) = 0$.
2 Réciproquement, cette propriété séquentielle entraîne-t-elle l'uniforme continuité de f ?
3 Montrer que $t \mapsto \sin(t^2)$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8 (Uniforme continuité et limite finie en un point adhérent) 3

1 Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ continue, $b \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que f admet une limite finie en b. Montrer que f est uniformément continue sur $[a, b[$.
2 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue admettant des limites finies en $+\infty$ et $-\infty$. Montrer que f est uniformément continue.

Exercice 9 (Dérivation, dérivabilité) 0

1 Dériver, en tout point où cela est possible, $x \mapsto \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{x}}}$.
2 La fonction $x \mapsto \cos \sqrt{x}$ est-elle dérivable en 0 ?
3 Montrer que

$$\begin{array}{rccc} g : & \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 \sin \frac{1}{x} \end{array}$$

est prolongeable par continuité en 0, et que ce prolongement $\tilde{g}$ est dérivable en 0, mais non de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 10 (Applications directes du théorème de Rolle) 0

1 Soit f continue sur $[a, +\infty[$ (pour un certain $a \in \mathbb{R}$), et dérivable sur $]a, +\infty[$. On suppose que $f(a) = \lim_{x \to +\infty} f(x)$. Montrer qu'il existe $c \in]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.
2 Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$, admettant une même limite finie en $+\infty$ et $-\infty$. Montrer que f' s'annule.
3 Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dérivable, telle que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que pour tout $d \in \mathbb{R} \setminus [a, b]$, il existe une tangente au graphe Γ de f passant par le point $(d, 0)$.

Exercice 11 (Rolle itéré) 1

n désigne un entier naturel non nul.

1 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que si f s'annule en $n+1$ points distincts, alors f' s'annule en n points distincts sur $[a,b]$

2 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable. Montrer que si f s'annule en $n+1$ points distincts, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

3 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable. Si $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n)}(a) = f(b) = 0$, montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$

4 Montrer que si un polynôme réel P possède (au moins) n racines réelles distinctes ($n \geqslant 2$), alors son polynôme dérivé P' possède (au moins) $n-1$ racines réelles distinctes.

5 Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, tous réels a et b, le polynôme $X^n + aX + b$ admet au plus trois racines réelles distinctes.

6 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$, T-périodique ($T > 0$), s'annulant au moins n fois sur $[0,T[$. Montrer que f' s'annule au moins n fois sur $[0,T[$.

7 Que dire d'une fonction polynomiale coïncidant avec la fonction sinus en une infinité de points ?

Exercice 12 (Théorème de Darboux) 1 et 4

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable. Montrer que $f'(I)$ est un intervalle.

Exercice 13 (Prolongement dérivable) 2

Montrer que la fonction

$$f : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\ln(1+x)}{x} \end{array}$$

est prolongeable par continuité en 0. Soit F ce prolongement. Montrer que F est dérivable en 0.

Exercice 14 (Dérivées successives en 0) 2

Soit $f : x \mapsto \frac{x^3}{1+x^6}$. Calculer $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 15 (Un produit infini) 2

1 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $x - \frac{x^2}{2} < \ln(x+1) < x$.

2 En déduire que

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right) = \sqrt{e}.$$

4.2. Convexité

Exercice 16 (Fonction convexe périodique) 0

Que dire d'une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et périodique ?

Exercice 17 (Fonction convexe bornée) 0

1 Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ convexe et bornée. Montrer que f est décroissante.
2 Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et bornée. Montrer que g est constante.

Exercice 18 (Comparaison des moyennes harmonique, géométrique, arithmétique) 1

1 On se donne $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs.
– La *moyenne arithmétique* de ces réels est $a = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$
– La *moyenne géométrique* de ces réels est $g = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}}$
– La *moyenne harmonique* de ces réels est $h = n\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right)^{-1}$
Montrer que $h \leqslant g \leqslant a$.
Indication : on pourra utiliser la concavité du logarithme pour prouver $g \leqslant a$, et utiliser ce résultat pour prouver $h \leqslant g$.
2 Soit $x_1, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs ($n \geqslant 2$). Montrer que : $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_n}{x_1} \geqslant n$.
3 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

Exercice 19 (Fonctions convexes dont la somme est affine) 0

Soit f, g convexes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que $f + g$ soit affine. Montrer que f et g sont affines.

Exercice 20 (Caractérisation de convexité par une autre fonction) 2

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, $g\ : x \mapsto xf(1/x)$. Montrer que f est convexe si et seulement si g est convexe.

Exercice 21 (Étude asymptotique générale d'une fonction convexe en $+\infty$) 2

Soit f convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
1 Montrer que $g\ : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ admet une limite, finie ou égale à $+\infty$, en $+\infty$.
2 Montrer que si cette limite α est réelle, alors $h\ : x \mapsto f(x) - \alpha x$ admet une limite, finie ou égale à $-\infty$, en $+\infty$.

Exercice 22 (D'un polynôme positif à un autre) 3

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) \geqslant 0$. Démontrer que pour tout réel x, on a $(P + P' + P'' + \ldots)(x) \geqslant 0$.

Exercice 23 (Polynômes scindés) 2

1 *(Mines MP 09)* Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que P' est scindé sur $\mathbb{R}$.
2 *(X MP 09)* Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $Q + aQ'$ est scindé sur $\mathbb{R}$.
3 *(X MP 09)* Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$ des polynômes scindés sur $\mathbb{R}$. On pose $R = \sum_{k=0}^{n} a_k Q^{(k)}$. Montrer que R est scindé sur $\mathbb{R}$.

Exercice 24 (Multiplicité de racines) 2

1 *(Mines MP 07, X MP 09)* Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que les racines complexes du polynôme $\prod_{k=0}^{n}(X-k) + a$ sont de multiplicité au plus 2.
2 *(X MP 09)* Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que toute racine multiple de P' est racine de P.

Exercice 25 (Centrale PSI 09) 3

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, dérivable en $a \in \mathbb{R}$. Soit (x_n) et (y_n) deux suites réelles de limite a. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $x_n \neq y_n$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n}.$$

1 On suppose : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n < a$ et $y_n > a$. Quelle est la limite de (u_n) ?
2 On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de a. Que dire de (u_n) ?
3 Que se passe-t-il dans le cas général ?

Exercice 26 (Convexité et bijection réciproque (Centrale PC 09)) 2

Soit $f \in \mathcal{C}^2(I)$ convexe et injective. On pose $J = f(I)$.
1 Montrer que f est strictement monotone sur I.
2 Montrer que la réciproque de f est convexe ou concave. Donner deux exemples.

Exercice 27 (Condition suffisante de changement de concavité (X MP 09)) 2

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = f(0)$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f''(c) = 0$. Que dire si f est seulement supposée deux fois dérivable ?

CHAPITRE IV

Suites et séries numériques

Sommaire

Informellement, une série est une suite (S_n), étudiée non plus selon son terme général S_n, mais selon l'écart entre deux termes consécutifs $u_n = S_n - S_{n-1}$. S_0 est la position initiale, et u_n est la vitesse, ou l'accroissement, entre les instants $n-1$ et n.

Si on considère qu'une suite modélise un système discret (le temps ne prend que des valeurs entières), le passage aux séries fait étudier l'évolution du processus d'un instant au suivant, par l'écart entre ces deux données.

Nous verrons que le cadre permettant une étude efficace des séries est celui des *séries à terme général positif* : la plupart des résultats portent sur ces séries particulières. La notion de série absolument convergente permet, d'une certaine façon, de se ramener à cette situation.

De nombreuses propriétés des suites se traduisent en des propriétés des séries : la croissance d'une suite se traduit par la positivité du terme général (à partir du rang 1), le théorème des suites adjacentes deviendra le critère spécial des séries alternées, etc.

De plus, de nombreuses suites sont en fait données par des sommes du type $\sum_{k=0}^{n} u_k$, donc par des séries :

– la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$;

– la série $\sum \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ des (évaluations des parties régulières des) développements de Taylor d'une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ en un point.

– la suite des développements décimaux par défaut d'un réel s'écrit aussi naturellement sous forme d'une série $\sum \frac{a_n}{10^n}$, où $a_0 \in \mathbb{Z}$ et les a_n appartiennent à $[\![0,9]\!]$ pour tout $n \geqslant 1$.

Enfin, l'analyse asymptotique de u_n nous donnera des renseignements fins sur la série $\sum u_n$. Par exemple, le théorème de Cesàro sera vu comme une conséquence immédiate d'un résultat sur la sommation des relations de comparaison.

Dans le cas où $\sum_{n=0}^{N} u_n$ admet une limite $l \in \mathbb{K}$ lorsque N tend vers l'infini, nous noterons le nombre l sous la forme $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$. Nous donnons donc ici un sens à une « somme infinie », comme valeur d'une certaine limite (lorsqu'elle existe).

Nous verrons cependant que non seulement cette notation n'a pas toujours un sens, mais surtout qu'*a priori*, son statut (existence ou non) et son éventuelle valeur dépendent de l'ordre dans lequel on effectue la somme : réindexer les termes de (u_n) peut changer la valeur de la somme.

Dans la suite $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites d'éléments de $\mathbb{K}$.

Pour clarifier l'exposition, les séries seront indexées par $\mathbb{N}$ dans les résultats du cours, mais ils s'étendent sans problème à des séries indexées par $\mathbb{N}^*$, ou même $[\![N, \infty[\![$, où $N \in \mathbb{N}$ est fixé. C'est par exemple le cas de la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$, implicitement indexée par $\mathbb{N}^*$.

1. Rappels et compléments sur les suites numériques

L'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est à la fois un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et un anneau. Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il est en outre muni d'un ordre naturel partiel compatible avec l'addition et le produit.

Rappel (Convergence ou divergence d'une suite)

Il y a unicité de la limite d'une suite, mais pas toujours existence.

Le sous-ensemble de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ constitué des suites bornées (resp. convergentes) en est à la fois un sous-espace vectoriel et un sous-anneau.

Utilisation d'epsilon

On peut distinguer trois types d'utilisation de ε dans l'assertion formelle de convergence d'une suite.

(1) Utilisation d'une unique valeur de ε, arbitrairement fixée : détériore considérablement l'information, donne un résultat grossier. Par exemple, toute suite convergente est bornée.

(2) Utilisation d'une unique valeur de ε, bien choisie : résultat intermédiaire. Par exemple, toute suite convergeant vers un réel strictement positif est minorée, à partir d'un certain rang, par un réel strictement positif.

(3) Utilisation de toutes les valeurs de ε (ou au moins d'une suite de valeurs de ε de limite nulle) : résultat fin, comme le théorème de Cesàro.

1.1

Exercice (Théorème de Cesàro)

On considère une suite $u = (u_n)_{n \geqslant 1}$ et la suite des *moyennes* $v = (v_n)_{n \geqslant 1}$, de terme général

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$$

1 Montrer que si la suite u croît, il en est de même de v.

2 Montrer que si u tend vers une limite finie ou infinie $l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors v tend vers l (c'est le *théorème de Cesàro*).

3 Montrer, en donnant un contre-exemple, que la réciproque est fausse.

4 Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs, telle que la suite de terme général $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tende vers un réel λ. Montrer que la suite de terme général $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers λ.

1

Rappel (Suites extraites (ou sous-suites), propriétés, théorème de Bolzano-Weierstrass)

La donnée d'une *extractrice* φ (*i.e.* une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$) revient à se donner une image. En fait, l'application qui à une extractrice φ associe son image est une bijection de l'ensemble des extractrices sur l'ensemble des parties infinies de $\mathbb{N}$. Il pourra être pratique de se donner ainsi une extractrice.

Exercice (De la convergence de sous-suites à la convergence)

Soit (u_n) une suite réelle. Montrer que si les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, alors u converge.

2

Définition (Valeur d'adhérence)

On dit qu'un scalaire α est *valeur d'adhérence* d'une suite (u_n) s'il existe une sous-suite de (u_n) convergeant vers α.

1.a

On peut dès lors reformuler le théorème de Bolzano-Weierstrass :

Bien entendu, une suite convergente est bornée et n'a qu'une valeur d'adhérence. La réciproque est vraie :

Théorème (Suite bornée avec une seule valeur d'adhérence)

Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathbb{K}$, bornée, et n'admettant qu'une valeur d'adhérence. Cette suite est alors convergente (vers son unique valeur d'adhérence).

1.a

Démonstration

$\square$

Exercice (Vers la compacité)

On dit qu'une partie Ω de $\mathbb{R}$ vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass si toute suite d'éléments de Ω admet une valeur d'adhérence dans Ω.
Pour les 3/2 : montrer que les intervalles I non vides vérifiant la propriété de Bolzano-Weierstrass sont (exactement) les segments.
Pour les 5/2 : montrer que les compacts de $\mathbb{R}$ (*i.e.* les parties vérifiant la propriété de Bolzano-Weierstrass) sont les parties fermées bornées de $\mathbb{R}$.

3

Revoir son cours de Sup sur les relations de comparaison.

2. Généralités sur les séries numériques

Définition (Série)

On appelle *série* de terme général u_n et on note $\sum u_n$ ou $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ le couple $((u_n),(S_n))$, où

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.
La suite (S_n) est appelée *suite des sommes partielles* associée à la série $\sum u_n$. Plus précisément, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ est appelée *somme partielle d'ordre n* de $\sum u_n$.

2.a

En fait, on reviendra rarement à cette définition formelle d'une série comme couple de suites (liées par une formule), on parlera simplement de la série $\sum u_n$, de son terme général u_n et de sa somme partielle S_n d'ordre n.

Bien sûr, on a $u_n = S_n - S_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et $u_0 = S_0$.

Définition (Convergence d'une série)

La série $\sum u_n$ est dite *convergente* (resp. *divergente*) si la suite des sommes partielles associée (S_n) converge (resp. diverge).

En cas de convergence, on appelle *somme* de la série $\sum u_n$ et on note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ la limite de (S_n).
Toujours en cas de convergence, on appelle *reste* d'ordre n de la série $\sum u_n$ et on note R_n le scalaire

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

La *nature* d'une série est sa convergence ou sa divergence (selon le cas).

2.b

On parle donc de somme d'une série, pas de limite d'une série.
Dans le cas d'une série convergente, on a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n + R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

La nature d'une série est inchangée si on change la valeur de son terme général en un nombre fini d'indices. En particulier, pour tout $N \in \mathbb{N}$, les séries $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n \geqslant N} u_n$ ont même nature.

Condition nécessaire non suffisante de convergence

Bien sûr, pour que $\sum u_n$ converge, il faut que son terme général u_n tende vers 0. Cette condition nécessaire de convergence nous donne donc une condition suffisante de divergence : lorsque u_n ne tend pas vers 0, la série $\sum u_n$ est divergente (on dit que la divergence est *grossière*).
Par exemple, la série $\sum \cos(n)$ est grossièrement divergente (une fois acquise la divergence de $(\cos(n))$, ou même seulement sa non convergence vers 0).

2.1

Exercice (Divergence de la série harmonique par les sommes partielles)

Montrer que la *série harmonique* $\sum \frac{1}{n}$ est divergente. Cet exemple montre lui aussi qu'une série peut être divergente sans être grossièrement divergente.
Indication : en notant H_n la somme partielle d'indice n de cette série, minorer $H_{2n} - H_n$.

4

Exemple (Séries géométriques)

Une série $\sum u_n$ est dite *géométrique* si la suite (u_n) est géométrique. Supposons-la de terme initial non nul, et de raison q. On vérifie que $\sum u_n$ converge si et seulement si $|q| < 1$:

En cas de convergence, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{u_0}{1-q}.$$

Par exemple, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{9}{10^n} = 1$, ou, de façon plus imagée, $0,999999... = 1$.

Pour le cas **très restreint** des séries géométriques, la divergence équivaut donc à la divergence grossière.

i

Exemple (Lien entre suite et série)

Soit (α_n) une suite de scalaires. La série $\sum(\alpha_{n+1} - \alpha_n)$ et la suite (α_n) ont même nature. Une série de cette forme est dite *télescopique*.
En cas de convergence, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\alpha_{n+1} - \alpha_n) = \lim_{n\infty} \alpha_n - \alpha_0$$

Par exemple, la série télescopique $\sum \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ illustre qu'une série peut être divergente sans l'être grossièrement.

ii

Exercice (Exemples de séries convergentes ou pas)

Montrer que la série $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ converge (en la voyant comme une série télescopique).

5

On définit aisément l'addition (ou la somme [1]) de deux séries, et le produit d'une série par un scalaire, conférant à l'ensemble des séries d'éléments de $\mathbb{K}$ une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

En revanche, nous ne définirons pas ici de produit de deux séries.

Proposition (Linéarité de la somme)

L'ensemble Ω des séries convergentes est un espace vectoriel, et l'application

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{K} \\ \sum u_n & \mapsto & \sum_{n=0}^{\infty} u_n \end{array}$$

est une forme linéaire.

2.a

1. Qui n'a bien sûr rien à voir avec la somme d'*une* série

Démonstration

□

3. Séries à termes positifs

On se restreint ici au cas de séries à termes positifs : l'équivalent pour les suites serait de se restreindre aux suites croissantes [2]. Comme pour les suites, cette hypothèse supplémentaire simplifie considérablement l'étude. Pour les suites par exemple, on sait que toute suite convergente est bornée, que la réciproque est fausse, mais qu'elle devient vraie si on se limite aux suites monotones. Il n'est donc pas étonnant que les résultats à suivre tombent en défaut lorsqu'on ne suppose plus la série à terme général positif.

Ici, $\sum u_n$ sera donc à termes positifs, *i.e.* la suite (u_n) sera positive.

Voici la version « séries » du théorème de la limite monotone (pour les suites) :

Proposition (Condition nécessaire et suffisante de convergence pour une série à termes positifs) 3.a

Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.

Démonstration

□

L'hypothèse de positivité est essentielle :

Proposition (Ordre et séries à termes positifs) 3.b

On suppose $0 \leqslant u \leqslant v$.

(1) si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

(2) si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

2. Et de termes initiaux positifs, mais cette précision est moins cruciale.

Démonstration

□

Il faut bien noter que ce sont les termes généraux des séries que l'on compare dans cette proposition, et non les sommes partielles [3].

Là encore, l'hypothèse de positivité est essentielle :

Exercice (Ordre et séries à termes positifs)

En utilisant l'exercice de cours précédent, montrer que la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

6

Proposition (Équivalence et séries à termes positifs)

Si u et v sont positives, et si $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.

3.c

Démonstration

□

Exercice (Divergence de la série harmonique par les équivalents)

En observant que $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$, montrer que la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

7

Comme précédemment, l'hypothèse de positivité est essentielle :

3. L'objectif de ce cours est précisément d'obtenir des renseignement sur $\sum u_n$ sans avoir à revenir aux sommes partielles, et donc à la notion de suite.

4. Comparaison série-intégrale dans le cas monotone

On considère une fonction monotone $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, continue (ou même seulement continue par morceaux), ainsi que la série $\sum f(n)$.

La monotonie de f permet d'encadrer les sommes partielles S_N de cette série (où $N \in \mathbb{N}^*$) :

Si f est croissante, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f(n) \leqslant \int_n^{n+1} f \leqslant f(n+1),$$

et donc, en sommant de 0 à $N-1$:

$$S_N - f(N) \leqslant \int_0^N f \leqslant S_N - f(0),$$

soit encore

$$f(0) + \int_0^N f \leqslant S_N \leqslant f(N) + \int_0^N f$$

Si f est décroissante, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f(N) + \int_0^N f \leqslant S_N \leqslant f(0) + \int_0^N f$$

Cette technique s'appelle *comparaison série-intégrale*, ou *méthode des rectangles.*

Exemple (Série harmonique par les intégrales)

On a $H_n \sim \ln(n)$, et même plus précisément

$$H_n = \ln(n) + \mathrm{O}(1).$$

Ceci montre à nouveau la divergence de la série harmonique, et donne même un premier développement asymptotique de H_n.

i

Exercice (Un équivalent par comparaison série-intégrale)

Montrer par comparaison série-intégrale que

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \sim \frac{2}{3} n\sqrt{n}.$$

Retrouver ce résultat par une autre technique.

8

Illustration

Définition (Séries de Riemann) 4.a

On appelle *série de Riemann* toute série de la forme $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Proposition (Séries de Riemann) 4.a

La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration

$\square$

Cette méthode des rectangles peut permettre d'estimer les sommes partielles de certaines séries divergentes et les restes de certaines séries convergentes :

Exercice (Application à l'étude de sommes partielles et de restes) 9

On considère la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$. Donner un équivalent des sommes partielles en cas de divergence, et un équivalent des restes en cas de convergence.

On dispose en fait d'un résultat plus fin sur la comparaison série-intégrale :

Proposition (Comparaison série-intégrale) 4.b

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue par morceaux et décroissante.
La série de terme général

$$u_n \overset{def}{=} \int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t - f(n)$$

converge.

Démonstration

□

Exercice (Comparaison série-intégrale)

1 Que donne ce résultat pour $f(t) = \frac{1}{t+1}$? La limite de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ lorsque n tend vers l'infini est appelée *constante d'Euler*, et notée γ. On a

$$\gamma \simeq 0.5772156649...$$

En fait, on connaît des milliards de décimales de γ, mais on ne sait toujours pas si γ est rationnel.

2 Montrer que $\sum f(n)$ est convergente si et seulement si $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ a une limite finie lorsque x tend vers l'infini.

10

L'outil intégral permet aussi d'établir certaines convergences, sans que la technique employée soit celle des rectangles :

Exercice (Série harmonique alternée)

Montrer que la série $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ (appelée *série harmonique alternée*) est convergente, et calculer sa somme en observant que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \int_0^1 (-x)^{n-1}\mathrm{d}x.$$

Remarque : l'inégalité de Taylor-Lagrange (appliquée à la bonne fonction) fournit également ce résultat.

11

5. Séries absolument convergentes

Définition (Convergence absolue)

On dit que la série $\sum u_n$ est *absolument convergente* si la série $\sum |u_n|$ converge.

5.a

Proposition (La convergence absolue implique la convergence)

Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente. La série $\sum u_n$ est alors convergente.

5.a

Démonstration

Séparer les cas réel (pour lequel on utilisera $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$) et complexe.

$\square$

Séries semi-convergentes (cadre hors-programme que vous pouvez sauter)

La convergence n'entraîne pas l'absolue convergence, comme le montre l'exemple de la série harmonique alternée. Une telle série (convergente non absolument convergente) est *dite semi-convergente.*
Cela dépasse de loin le programme officiel, mais dans le cas de la semi-convergence, une permutation des termes de la série peut bouleverser son comportement asymptotique (attendre le débriefing au tableau pour comprendre cette remarque).
On revient donc à l'aspect asymptotique de la notation $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$, qu'il ne faut pas perdre de vue.

5.1

Proposition (Relation de domination et absolue convergence)

Si (u_n) est une suite complexe, si (v_n) est une suite d'éléments de $\mathbb{R}_+$, si $u_n = \mathrm{O}(v_n)$, et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ est absolument convergente et donc convergente.

5.b

Démonstration

$\square$

On peut remplacer l'hypothèse de positivité de (v_n) et la convergence de $\sum v_n$ par l'absolue convergence de $\sum v_n$.

La proposition admet des analogues dans les cas où $u_n \sim v_n$, ou $u_n = \mathrm{o}(v_n)$, puisqu'alors $u_n = \mathrm{O}(v_n)$.

En exemple, un cas particulier important : la comparaison à une série géométrique (*i.e.* le critère de d'Alembert) :

Exercice (Critère de d'Alembert)

Soit (z_n) une suite de complexes tous non nuls. On suppose que la suite de terme général $\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|}$ admet une limite $l \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

1 Montrer que si $l < 1$, alors $\sum z_n$ est absolument convergente.

2 Montrer que si $l > 1$, alors $\sum z_n$ est divergente.

3 Montrer, en donnant des contre-exemples, qu'on ne peut pas conclure lorsque $l = 1$.

Ces résultats constituent le *critère* (ou la *règle*) *de d'Alembert*. Le cas où $l = 1$ est appelé *cas limite*, ou *cas douteux*.

12

Exemple (Série exponentielle complexe)

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente (d'après le critère de D'Alembert pour $z \neq 0$), donc convergente. On aurait pu prouver l'absolue convergence à partir de l'inégalité de Taylor-Lagrange.

Ceci permet de définir la *fonction exponentielle complexe* :

$$\begin{array}{rccl} \exp : & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \end{array}$$

i

6. Le critère spécial des séries alternées

Théorème (Critère spécial des séries alternées)

Soit (a_n) une suite réelle positive, décroissante, et de limite nulle.
La série $\sum (-1)^n a_n$ est alors convergente, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|R_n| \leqslant a_{n+1}$$

6.a

Démonstration

□

Une suite réelle décroissante et de limite nulle étant nécessairement positive, cette hypothèse est contenue dans les deux autres.

On notera CSSA pour « critère spécial des séries alternées » dans ce cours.

Ce critère est la version « séries » du théorème de convergence des suites adjacentes. On peut noter que c'est un résultat quantitatif, puisqu'on a un contrôle explicite du reste.

On peut en particulier préciser le signe de R_n selon la parité de n :

Exercice (Critère spécial des séries alternées)

1 Montrer que $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.
2 Montrer sur un exemple l'importance de la condition de décroissance dans l'énoncé du CSSA.

13

7. Sommation des relations de comparaison

Nous avons déjà vu des résultats mêlant nature de séries et relations de comparaison. En fait, on peut aller beaucoup plus loin. Comme remarqué précédemment, les résultats ne s'appliqueront que dans le cas où la série de référence est à termes positifs.

Théorème de sommation des relations de comparaison, cas de la convergence

On suppose $\sum v_n$ à termes positifs, et convergente.

(1) si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$, alors $\sum u_n$ est absolument convergente, et
$$\sum_{k=n}^{+\infty} u_k = \mathrm{o}\left(\sum_{k=n}^{+\infty} v_k\right).$$

(2) si $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ est convergente, et
$$\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n}^{+\infty} v_k.$$

(3) si $u_n = \mathrm{O}(v_n)$, alors $\sum u_n$ est absolument convergente, et
$$\sum_{k=n}^{+\infty} u_k = \mathrm{O}\left(\sum_{k=n}^{+\infty} v_k\right).$$

7.a

Démonstration

$\square$

Théorème de sommation des relations de comparaison, cas de la divergence

On suppose $\sum v_n$ à termes positifs, et divergente.

(1) si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$, alors
$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \mathrm{o}\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right).$$

(2) si $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ est divergente, et
$$\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} v_k.$$

(3) si $u_n = \mathrm{O}(v_n)$, alors
$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \mathrm{O}\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right).$$

7.b

Démonstration

Montrons le premier point. On suppose donc que $u_n = \mathrm{o}(v_n)$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit N un rang à partir duquel
$$|u_k| \leqslant \varepsilon |v_k|$$
On a donc, pour tout $n \geqslant N$:
$$\left|\sum_{k=N}^{n} u_k\right| \leqslant \sum_{k=N}^{n} |u_k| \leqslant \varepsilon \sum_{k=N}^{n} |v_k| \leqslant \varepsilon \sum_{k=0}^{n} v_k$$
la dernière inégalité utilisant la positivité de (v_k).
De plus, la série $\sum v_n$ étant divergente positive, l'assertion
$$\sum_{k=0}^{N-1} |u_k| \leqslant \varepsilon \sum_{k=0}^{n} v_k$$
est vraie à partir d'un certain rang N'.
À partir du rang N', on a donc
$$\left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leqslant 2\varepsilon \sum_{k=0}^{n} v_k,$$
d'où le premier point.
Le deuxième point se déduit du premier, et le dernier se démontre de manière analogue au premier.

□

Il y a donc deux points essentiels à retenir :
- Ces théorèmes supposent la série de référence à termes positifs.
- En cas de convergence, on s'intéresse aux restes, et en cas de divergence, on s'intéresse aux sommes partielles.

Exemple (Équivalents et séries de Riemann)

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est monotone sur $\mathbb{R}_+^*$, et $\frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{(n+1)^\alpha}$. On en déduit que

$$\frac{1}{n^\alpha} \sim \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$

Ces termes étant en outre positifs, on en déduit :
Dans le cas de divergence $\alpha \leqslant 1$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \sim \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$

et donc, si $\alpha < 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{(1-\alpha)n^{1-\alpha}}$$

ainsi que, pour $\alpha = 1$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$$

Dans le cas de convergence $\alpha > 1$ On obtient cette fois-ci :

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

i

Exercice (Cesàro par sommation des relations de comparaison)

Expliquer comment déduire le théorème de Césaro du théorème de sommation des relations de comparaison.

14

Exercice (Série harmonique)

Donner un développement asymptotique à trois termes de la série harmonique (de terme général $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$).

15

8. Transformation d'Abel (hors-programme)

La transformation d'Abel est hors-programme, mais tombe parfois à l'oral des concours X/ENS, ainsi qu'à l'écrit (des CCP récemment).

Exercice (Transformation d'Abel)

16

Soit (a_n) et (B_n) deux suites complexes. On définit deux suites complexes (A_n) et (b_n) par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \quad \text{et} \quad b_n = B_{n+1} - B_n.$$

1 Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} a_k B_k = A_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_k.$$

Remarque : cette formule, appelée *formule d'Abel* ou *formule de sommation par parties*, est la version discrète de l'intégration par parties.

2 Montrer que si (B_n) converge vers 0, (A_n) est bornée, et $\sum b_n$ est absolument convergente, alors $\sum a_n B_n$ est convergente.

3 Applications :

i Montrer que $\sum \frac{\sin(n)}{n}$ converge.

ii Étudier l'absolue convergence de cette dernière série.

Indication : utiliser les formules trigonométriques et (à nouveau) la transformation d'Abel.

9. Feuille de TD 4 : Suites et séries numériques

9.1. Généralités sur les suites numériques

Exercice 1 (Suite convergente d'entiers relatifs) — 0

Montrer que toute suite de nombres entiers relatifs convergente est stationnaire.
Pour les 5/2 : proposer une généralisation de ce résultat.

Exercice 2 (Extraction convergente d'une suite monotone) — 0

Montrer qu'une suite monotone dont une suite extraite est convergente est elle-même convergente.

Exercice 3 (Équivalents et convergence) — 0

1 Montrer que la suite de terme général $\frac{n+3\sin(n)}{2n+(-1)^n}$ converge.
2 Montrer que la suite de terme général $\frac{E(\ln(n))}{\ln(n^2+n)}$ converge.

Exercice 4 (suite de Fibonacci) — 1

On définit la *suite de Fibonacci*, (u_n), par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, et :

$$\forall\, n > 1, \quad u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$$

1 Trouver une fonction f telle que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = f(n)$.
2 En déduire un équivalent simple de (u_n), et la limite de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Exercice 5 (Extraction d'une suite non majorée) — 2

Montrer que toute suite réelle non majorée admet une suite extraite divergeant vers $+\infty$.

Exercice 6 (Équivalent d'une suite) — 2

Soit (u_n) une suite de réels de limite nulle et telle que

$$u_n + u_{n+1} \sim \frac{1}{n}.$$

1 Montrer que si l'on suppose (u_n) décroissante, alors $u_n \sim \frac{1}{2n}$.
2 Montrer que ce résultat peut tomber en défaut si l'on ne suppose plus (u_n) décroissante.

Exercice 7 (Équivalents plus durs) — 2

Trouver des équivalents simples des suites de termes généraux $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ et $\sum_{k=0}^{n} k!$.

Exercice 8 (Exemple de suite implicite) 2

1 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x + \ln(x) = n$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$ admet une unique solution, que nous noterons u_n.
2 Étudier la monotonie de (u_n). En déduire la limite de cette suite.
3 Montrer que $u_n \sim n$.
4 Montrer que $u_n - n \sim -\ln(n)$.

Exercice 9 (Développements asymptotiques de suites) 2

1 Donner un développement asymptotique de la suite de terme général $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ à la précision $\frac{1}{n^3}$.
2 Donner un développement asymptotique à deux termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ donnée par $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} = \ln(n + u_n)$.
3 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x^n + x - 1 = 0$ d'inconnue $x \in [0, 1]$ admet une unique solution v_n. Donner un développement asymptotique à deux termes de v_n.
Indication : une fois la limite de (v_n) déterminée, on pourra poser $w_n = 1 - v_n$, puis utiliser le logarithme.
4 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note x_n l'unique solution dans $]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}[$ de l'équation $\tan(x) = x$. Donner un développement asymptotique à la précision $\frac{1}{n^2}$ de x_n.
5 Soit (x_n) la suite récurrente de terme initial $x_0 \in]0, \pi/2]$ et d'itératrice sinus. Donner un équivalent de x_n.

9.2. Expressions séquentielles de notions ou propriétés topologiques

Exercice 10 (Borne supérieure et suites) 0

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Montrer l'existence d'une suite (a_n) d'éléments de A, de limite $\sup(A)$.

Exercice 11 (Caractérisation séquentielle de la densité) 1

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Montrer que A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout réel x, il existe une suite d'éléments de A, de limite x.

Exercice 12 (Caractérisation séquentielle des fermés de $\mathbb{R}$) 2

Une partie U de $\mathbb{R}$ est dite *ouverte* si pour tout élément u de U, il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]u-\varepsilon, u+\varepsilon[\subset U$.
Une partie F de $\mathbb{R}$ est dite *fermée* si son complémentaire dans $\mathbb{R}$ est ouvert.
Montrer qu'une partie F de $\mathbb{R}$ est fermée si et seulement si la limite de toute suite convergente d'éléments de F appartient à F.

9.3. Calculs de sommes de séries

Exercice 13 (Lorsque le terme général est une fonction rationnelle) 0

Montrer la convergence et calculer la somme de $\sum u_n$, lorsque :
1 $u_n = \frac{n}{n^4+n^2+1}$.
2 $u_n = \frac{2n-1}{n^3-4n}$ (où $n \geqslant 3$).
3 $u_n = \frac{1}{n^2+3n}$.
4 $u_n = \frac{1}{n^2+3n+2}$.

Exercice 14 (Série et produit) 0

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$; on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{a^{2^n}}{\prod_{k=0}^{n}(a^{2^k}+1)}$.
1 Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ selon les valeurs de a.
2 Calculer la somme de cette série lorsqu'elle converge.

Exercice 15 (Autres calculs de sommes) 2 à 4

Montrer la convergence et calculer la somme de $\sum u_n$, lorsque :
1 $u_n = \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ ($n \geqslant 2$).
2 $\sum \frac{(-1)^n}{3n+1}$.
3 On pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que la série $\sum u_n$ où $u_n = \frac{H_n}{n(n+1)(n+2)}$ converge, et calculer sa somme.
4 $u_n = (-1)^n \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ ($n \geqslant 2$).
Indication : on pourra utiliser la formule de Stirling.

9.4. Séries à termes positifs

Exercice 16 (Nature de séries à termes positifs) 0

Déterminer la nature de $\sum u_n$, où :
1 $u_n = n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.
2 $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.
3 $u_n = \frac{\ln(n)}{\ln(e^n-1)}$.
4 $u_n = \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$.
5 $u_n = \left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n$.
6 $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}$.
7 $u_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}$.
8 $u_n = e^{-\sqrt{n}}$.
9 $u_n = \sqrt{\operatorname{ch}\left(\frac{1}{n}\right) - 1}$.
10 $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

Exercice 17 (Séries de Bertrand) 1

Soit $\alpha, \beta > 0$.

1 Montrer que $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

2 Donner un équivalent des sommes partielles lorsque $\alpha = \beta = 1$.

Exercice 18 (Opérateurs sur les séries convergentes à termes positifs) 2

On considère une série convergente à termes positifs $\sum a_n$.

Étudier la convergence des séries suivantes :

1 $\sum a_n^2$.

2 $\sum \frac{a_n}{a_n+1}$.

3 $\sum a_n a_{2n}$.

4 $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}$.

Remarque : pour prolonger l'exercice, on peut se poser les questions suivantes :

5 Étude des réciproques.

6 Que se passe-t-il si on ne suppose plus la série à termes positifs ?

Exercice 19 (Lois de composition interne sur les séries convergents à termes positifs) 2

Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries convergentes à termes positifs.

Établir la convergence des séries suivantes :

1 $\sum \max(a_n, b_n)$.

2 $\sum \sqrt{a_n b_n}$.

3 $\sum \frac{a_n b_n}{a_n+b_n}$ (en supposant que $(a_n + b_n)$ ne s'annule pas).

Exercice 20 (Cas douteux de la règle de d'Alembert) 2

Soit $a > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \frac{a^n n!}{n^n}$.

Étudier, selon la valeur de a, la convergence de $\sum u_n$.

Exercice 21 (Une idée reçue sur les séries) 2

1 Donner un exemple de série convergente $\sum u_n$ tel que $u_n \neq \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$ (si possible avec $u_n \geqslant 0$).

2 Montrer cependant que si $\sum u_n$ converge et si (u_n) décroît, alors $u_n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 22 (Série et produit, encore) 3

On se donne une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne prenant jamais la valeur -1. On pose, pour tout $n \geqslant 1$:

$$v_n = \frac{u_n}{\prod_{k=1}^{n}(1+u_k)}.$$

1 On suppose dans cette question (u_n) à termes positifs ou nuls. Montrer que la série de terme général v_n converge. Calculer la somme de cette série lorsque la série de terme général u_n diverge.

2 Étudier la série $\sum v_n$ lorsque :

i $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$.

ii $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.

Exercice 23 (Lien entre convergences de séries) 3

On suppose que la série de terme général positif a_n converge. Prouver que la série de terme général $\sqrt{a_n a_{n+1}}$ converge également. Montrer que la réciproque est fausse. Montrer que si la suite est (a_n) est décroissante, alors la réciproque est vraie.

Exercice 24 (Série telle que $u_{n+1}/u_n \to +\infty$) 3

Soit $(u_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$, telle que $u_{n+1}/u_n \to +\infty$. Montrer que $\sum u_n$ diverge, et que $\sum_{k=0}^{n} u_k \sim u_n$.

Exercice 25 (Série harmonique tronquée) 4

Donner le cardinal de l'ensemble A_n des $k \in [\![10^n, 10^n - 1]\!]$, dont l'écriture ne contient aucun 5. Soit $S_5 = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \sum_{k\in A_n} \frac{1}{k}$. Montrer que $S_5 \leqslant 72$. De même pour $S_0, \ldots, S_9$. Conclusion ?

Exercice 26 (Développement en série de Engel) 4

Pour une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ d'entiers croissante telle que $u_1 \geqslant 2$, on note

$$S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_0 u_1} + \cdots + \frac{1}{u_0 \ldots u_n}.$$

1 Montrer que pour tout réel $x \in]0,1[$, il existe une unique suite u telle que

$$S_n \to x.$$

2 Montrer que x est rationnel si et seulement si u finit par stationner.

3 En déduire que e est irrationnel.

9.5. Séries à termes quelconques

Exercice 27 (Nature de séries à termes quelconques) 0

Déterminer la nature de $\sum u_n$, où :

1 $u_n = \frac{\sin(n^2)}{n^2}$.

2 $u_n = \frac{(-1)^n \ln(n)}{n}$.

3 $u_n = \sin\left(\pi(2-\sqrt{3})^n\right)$.

4 $u_n = \sin\left(\pi(2+\sqrt{3})^n\right)$.

Indication : faire le lien avec la question précédente.

5 $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

6 $u_n = \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{2n+1}\right)$.

7 $u_n = \frac{v_n}{2^n}$, où v est une suite bornée.

Exercice 28 (Nature d'une série de cosinus) 0

Nature de $\sum \cos\left(\pi n\sqrt{1+n^2}\right)$?

Exercice 29 (Suite récurrente étudiée via une série) 0

$u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $u_{n+1} = 2\arctan(u_n)$. Montrer que (u_n) converge vers $\lambda \in \mathbb{R}$, nature de $\sum(u_n-\lambda)$?

Exercice 30 (Nature d'une série se ramenant à une série de Bertrand) 2

Nature de la série de terme général $\ln(n)^\alpha \sin\left(\pi n\sqrt{1+n^2}\right)$?

Exercice 31 (Calcul de $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln(n)}{n}$) 2

1 Nature de la série de terme général $\frac{\ln(n)}{n}$? $(-1)^n\frac{\ln(n)}{n}$?

2 Nature de la série de terme général $v_n = \frac{\ln(n)}{n} - \int_{n-1}^{n}\frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t$.

3 Montrer que la suite de terme général $w_n = \sum_{q=2}^{n}\frac{\ln(q)}{q} - \frac{\ln(n)^2}{2}$ converge.

4 Trouver $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln(n)}{n}$ grâce à

$$\sum_{p=1}^{2n}\frac{\ln(p)}{p} + \sum_{p=1}^{2n}\frac{(-1)^p\ln(p)}{p}.$$

Réponse : $\gamma\ln(2) - \frac{\ln(2)^2}{2}$.

Exercice 32 (Nature d'une série dont le terme général est un reste de série convergente) 3

Soit $u_n = \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}$. Nature de $\sum u_n$?

Exercice 33 (Nature d'une série définie à l'aide d'une fonction convexe) 4

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ convexe et telle que $f(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.

1 Montrer que la série de terme général $(-1)^k f(k)$ converge.

2 Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k f(k)\right| \leqslant \frac{f(n)}{2}$.

10. Oraux

10.1. Suites numériques

Exercice 34 (sin(ln(n)) (X PSI 05)) 2

Montrer que la suite de terme général $\sin(\ln n)$ n'a pas de limite.

Exercice 35 (Comportement asymptotique de suites récurrentes) 2

1 Soit $s > 0$ et $a_0 \in]0, 1/s[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_{n+1} = a_n - sa_n^2$. Montrer que $a_n \sim \frac{1}{sn}$.
2 *(X PC 08)* Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$. Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Donner un équivalent de u_n.
3 *(INT PSI 08)* On considère la suite définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^2}$. Étudier la convergence de u_n. Trouver un équivalent de u_n quand n tend vers l'infini.
4 *(ENS Lyon MP 09)* La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$. Donner un équivalent de u_n.

Exercice 36 (Suite récurrente et fonction lipschitzienne (ENS Cachan MP 08)) 3

Soit f une fonction 1-lipschitzienne de $[0, 1]$ dans lui-même, (x_n) la suite définie par $x_0 \in [0, 1]$ et $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + f(x_n))$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (x_n) converge.

Exercice 37 (Suite réelle (x_n) telle que $(2x_{n+1} - x_n)$ converge) 4

(X MP) Soient $a \in \mathbb{R}$ et $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle telle que $(2x_{n+1} - x_n)$ converge vers a. Montrer que (x_n) est convergente.

Exercice 38 (Suite réelle bornée verifiant une condition de convergence) 4

(X MP 05) Déterminer les suites réelles bornées telles que $\left(u_n + \frac{u_{2n}}{2}\right)$ converge.

10.2. Séries numériques

Exercice 39 (Série dont le terme général est une suite récurrente) 0

(Mines MP 06) Soit $u_0 \geqslant 0$ et $u_{n+1} = \frac{1+u_n}{1+u_n^2}$. Étudier la suite (u_n) puis la série $\sum(u_n - 1)$.

Exercice 40 (Série exponentielle lacunaire) 0

(Centrale MP 08) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!}$.

Exercice 41 ((ENTPE PSI 08)) 0

1 (ENTPE PSI 08) Nature de la série de terme général $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$?

2 (Centrale PSI 10) Nature de la série de terme général $\frac{j^n}{n}$ où $j = e^{2i\pi/3}$.

Exercice 42 (Équivalence de nature entre deux séries (Centrale PSI 08)) 2

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite monotone de réels positifs.

1 Montrer que les séries de termes généraux u_n et nu_{n^2} sont de même nature.

2 Qu'en est-il si on enlève l'une ou l'autre des deux hypothèses ?

Exercice 43 (Nature et somme d'une série) 2

1 (École de l'air) Nature et somme de la série de terme général $u_n = (-1)^n \int_0^1 \cos^n x \mathrm{d}x$.

2 (CCP) Justifier la convergence et calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n}\right)$.

Exercice 44 (Nature de séries en vrac) 3

1 (CCP) Nature de la série de terme général $(\cos(1/n))^{n^3}$?

2 (Mines Alès) Nature de la série de terme général $\ln\Big(1 + (-1)^n/n^\alpha\Big)$ en fonction de $\alpha > 0$.

3 (CCP) Nature de la série de terme général $(1 - \operatorname{th} n)$?

4 (Centrale PSI 10) Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{(-1)^{n(n+1)/2}}{\sqrt{n(n+(-1)^n)}}$. Nature de la série de terme général u_n ?

5 (Mines MP 10) Nature de la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$?

6 (Mines MP 10) Nature de la série de terme général $\frac{(-1)^n \cos(\sqrt{n})}{n}$?

7 (Mines MP 10) Nature de la série de terme général $\frac{\sigma(n)}{n^2}$, où σ est une injection de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$?

8 (Centrale MP 10) Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Nature de la série de terme général : $(-1)^n \frac{\sqrt{n^\alpha+1}-\sqrt{n^\alpha-1}}{n^\beta}$.

9 Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \arccos\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \sqrt{\frac{2}{n}}$.

Exercice 45 (Étude de convergence d'une série selon le choix d'un polynôme) 3

(Mines-Ponts PSI 10) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Si $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = (n^4 + n^2)^{1/4} - P(n)^{1/3}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur P pour que la série de terme général u_n converge.

Exercice 46 (Un opérateur sur certaines séries (Mines-Ponts PSI 10)) 3

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ décroissante. On suppose que la série de terme général u_n est convergente. Si $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = n(u_{n+1} - u_n)$. Montrer que la série de terme général v_n est convergente. Exprimer sa somme en fonction de celle de u_n.

Exercice 47 (Nature de la série des restes de la série exponentielle) 3

(CCP) Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $R_n = \sum_{k>n} \frac{1}{k!}$.
1 Prouver la convergence de la suite de terme général R_n et de la suite de terme général $(n+1)!\,R_n$.
2 Étudier la convergence de la série de terme général $\sin(2\pi e n!)$.

Exercice 48 (Nature de la série des restes de la série harmonique alternée) 3

(ENSAM) On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.
1 Justifier l'existence de u_n.
2 Montrer que la série de terme général u_n converge et calculer sa somme.

Exercice 49 (Nature d'une série alternée) 3

(CCP) Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = e^{-u_n}/(n+1)$.
1 Déterminer les limites éventuelles des suites (u_n) et (nu_n).
2 Nature de la série de terme général $(-1)^n u_n$?

Exercice 50 (Nature et somme d'une série donnée par les termes modulo 3) 3

(TPE) Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{3n+1} = \frac{1}{4n+1}$, $u_{3n+2} = \frac{1}{4n+3}$, $u_{3n+3} = -\frac{1}{2n+2}$. Montrer que la série de terme général u_n converge et calculer sa somme.

Exercice 51 (Nature d'une série dont le terme général est donné par une intégrale) 3

(CCP) Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 1-périodique et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \int_n^{n+1} \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t$.
1 Montrer : $u_n = \frac{1}{n}\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t + O(1/n^2)$.
2 Nature de la série de terme général u_n ?

Exercice 52 (Séries de même nature) 3

On se donne une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à termes positifs, décroissante et convergeant vers 0.
1 Montrer que les séries de terme général u_n et $n(u_n - u_{n+1})$ sont de même nature.
2 Montrer, dans le cas où elles convergent, qu'elles ont la même somme.

Exercice 53 (Nature d'une série définie à l'aide d'une fonction) 3

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et α un réel < 0 tels que $\frac{f'}{f}$ tende vers α en $+\infty$. Étudier la nature de la série de terme général $f(n)$.

Exercice 54 (Série et dérivation discrète) — 3

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série convergente à termes réels strictement positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ le reste d'ordre n.

1 Montrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} n^2 u_n = 1 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{R_n^2} = 1.$$

2 La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 55 (D'autres natures de séries) — 3 à 4

1 Nature de la série de terme général $d\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n, \mathbb{Z}\right)$ (où $d(x, \mathbb{Z}) \overset{def}{=} \min\{x - n, n \in \mathbb{Z}\}$, pour tout réel x).

2 On considère la suite de terme initial $u_0 = 1$ et telle que $u_{n+1} = \sin(-u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Nature de la série de terme général u_n ?

3 (Mines MP) On définit la suite réelle (v_n) par : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$. Convergence de la série de terme général $\frac{1}{v_n}$? Somme ?

Exercice 56 (Divergence d'une série (X MP 10)) — 4

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que ni f ni f' ne s'annulent et $f(0) = 1$. Soit (a_n) définie par $a_0 > 0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = a_n f(a_n)$. Montrer que la série de terme général a_n diverge.

Exercice 57 (Une autre idée reçue sur les séries (X MP)) — 4

Donner un exemple de série divergente dont le terme général tend vers 0 et dont les sommes partielles sont bornées.

Exercice 58 (Nature compliquée de séries) — 4

On donne une suite (a_n) d'éléments de $]0, 1[$, et on note

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \quad \text{et} \quad t_n = \sum_{k=0}^{n} s_k.$$

Déterminer la nature des séries

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{t_n} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geqslant 0} \frac{s_n^2}{t_n^2}.$$

Exercice 59 (Étude d'une série compliquée) 4

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 \in \mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n}.$$

1 Étudier la nature des séries $\sum u_n$ et $\sum (-1)^n u_n$.
2 Reprendre la question précédente en supposant u_1 complexe tel que $\operatorname{Re}(u_1) \geqslant 0$.

Exercice 60 (Produit et série) 4

1 Montrer que la suite de terme général

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$$

est convergente.
2 On pose, lorsque $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$:

$$u_n = \prod_{k=2}^{n} \frac{\sqrt{k} - 1}{\sqrt{k} + 1}.$$

i Étudier la convergence de la suite (u_n).
ii Étudier la nature de la série de terme général (u_n^α) lorsque $\alpha > 0$ est donné.

10.3. Applications aux développements asymptotiques

Exercice 61 (Étude d'une suite via une série) 4

Fixons $\alpha \in]0, 1[$ et définissons la suite u par $u_0 > 0$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \ln(1 + \alpha u_n).$$

1 Étudier la monotonie et la convergence de la suite u.
2 En posant $v_n = u_n/\alpha^n$, étudier la quantité $w_n = v_{n+1}^\beta - v_n^\beta$ pour β bien choisi, afin de montrer qu'il exite un réel $A > 0$ tel que $u_n \sim A\alpha^n$ lorsque n tend vers l'infini. On ne cherchera pas à expliciter A.
3 Déterminer un équivalent de $u_n - A\alpha^n$ lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 62 (Application des séries aux suites récurrentes) 4

1 Soit (u_n) la suite de terme initial $u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$, et d'itératrice sinus. Donner un développement asymptotique à deux termes de u_n.
2 (Mines MP 2010) Soit (u_n) telle que $u_0 > 0$ et d'itératrice $f\ : x \mapsto x + \frac{1}{\sqrt{x}}$. Donner un développement asymptotique à deux termes de u_n.
3 Soit (x_n) une suite définie par $x_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{n+1} = x_n + x_n^2.$$

i Montrer que (x_n) tend vers $+\infty$.
ii On pose $u_n = 2^{-n} \ln(x_n)$ et $v_n = u_{n+1} - u_n$. Montrer que la série de terme général v_n converge. En déduire que (u_n) converge.
iii Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $x_n \sim \alpha^{2^n}$.
4 (Mines MP 2006) Soit $u_0 \in]0, 2\pi[$, puis $u_{n+1} = \sin(u_n/2)$.
i Montrer que (u_n) tend vers 0.
ii Montrer que $\lim\limits_{n \to \infty} (2^n u_n) = A$ pour un certain $A > 0$.
iii Trouver un équivalent simple de $(u_n - A2^{-n})$.

Exercice 63 (Autres développements asymptotiques) 4

1 (Mines MP) On pose

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n}.$$

i Montrer que (a_n) converge et trouver sa limite λ.
ii Trouver un équivalent simple de $a_n - \lambda$.
2 Développement asymptotique à deux termes de $u_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{\ln(p)}{p}$.
3 Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes positifs. On note $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ et on suppose

$$u_n \sim R_n^2.$$

Déterminer un équivalent de u_n.

CHAPITRE V

Espaces vectoriels normés

Sommaire

L'objectif de ce chapitre est de généraliser, assez considérablement, une bonne partie du cours d'analyse de MPSI : suites et séries numériques, fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes, continuité. On se fonde, par analogie avec la situation dans le cas réel ou complexe, sur la notion de norme. Une fois un espace vectoriel E muni d'une norme, on peut définir une topologie sur E : se donner une topologie sur un ensemble, c'est donner des sens aux termes intuitifs d'ouvert, fermé, intérieur, fermeture, voisinage, point adhérent, etc. Formellement, on définit une topologie sur un ensemble en donnant celles de ses parties que l'on considère comme *ouvertes*, qui doivent en outre satisfaire une certaine axiomatique.

On voit aussi se dégager la notion de compacité, permettant de généraliser le fait que l'image continue d'un segment soit un segment, ou le théorème de Heine.

On définit enfin et étudie la notion de connexité par arcs, qui permet de généraliser le théorème des valeurs intermédiaires.

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

E et F sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et même des espaces vectoriels normés à partir de la deuxième section (topologie d'un espace vectoriel normé).

A est une partie de E, et f est une fonction de A dans F.

1. Normes et espaces vectoriels normés

Définition (Norme)

Une *norme* sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est une application $\|\cdot\|$ de E dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant
- *(axiome de séparation)* $\forall\, x \in E, \quad \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0_E$.
- *(inégalité triangulaire)* $\forall\, x, y \in E, \quad \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.
- *(homogénéité)* $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E, \quad \|\lambda\, x\| = |\lambda|\, \|x\|$.

Une *structure d'espace vectoriel normé* (en abrégé : *evn*) consiste en la donnée d'un couple $(E, \|\cdot\|)$, où $\|\cdot\|$ est une norme sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1.a

Si $(E, \|\cdot\|)$ est un evn, alors $\|0_E\| = 0$. On a aussi la *seconde inégalité triangulaire* :

$$\forall\, x, y \in E, \quad |\, \|x\| - \|y\|\, | \leqslant \|x+y\|\,,$$

ou encore

$$\forall\, x, y \in E, \quad |\, \|x\| - \|y\|\, | \leqslant \|x-y\|\,.$$

L'application $|\cdot|\ : \mathbb{K} \to \mathbb{R}_+$ (valeur absolue dans $\mathbb{R}$, module dans $\mathbb{C}$)est une [1] norme. C'est la norme que nous considérerons par défaut sur $\mathbb{K}$.

Si $N_1, \ldots, N_p$ sont des normes sur E, alors pour tous réels positifs non tous nuls $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$,

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i N_i$$

est une norme sur E.

Si $(E, \|\cdot\|)$ est un evn, et si F est un sous-espace vectoriel de E, alors la restriction de $\|\cdot\|$ à F est une norme sur F appelée *norme induite* sur F par la structure d'evn de E (ou par la norme $\|\cdot\|$ de E).

Voici des exemples à connaître absolument :

Exemple (Norme associée à un produit scalaire)

Étant donné un espace préhilbertien réel $(E, < \cdot, \cdot >)$, on peut définir la norme

$$\begin{array}{rccc} \|\cdot\| : & E & \to & \mathbb{R}_+ \\ & x & \mapsto & \sqrt{< x, x >} \end{array}$$

appelée *norme associée au produit scalaire* $< \cdot, \cdot >$ (ou à la structure préhilbertienne) de E.

La norme asssociée à un produit scalaire vérifie une propriété particulière, l'*identité du parallélogramme* :

$$\forall\, x, y \in E, \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

i

Illustration

1. D'ailleurs, quelles sont normes du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}$?

Exemple (Normes classiques sur des espaces de dimension finie)

Sur $\mathbb{K}^n$, on peut associer classiquement

(1) La *norme* 1, notée $\| \ \|_1$, donnée par

$$\forall\, x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \|x\|_1 \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

(2) La *norme* 2, notée $\| \ \|_2$, donnée par

$$\forall\, x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \|x\|_2 \overset{def}{=} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$

On reconnaît d'ailleurs dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ la norme associée au produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

(3) La *norme infinie*, notée $\| \ \|_\infty$, donnée par [a]

$$\forall\, x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \|x\|_\infty \overset{def}{=} \sup\{|x_i|, i \in [\![1, n]\!]\}$$

a. Ici, ce sup est un max, mais l'emploi de la norme infinie va vite se généraliser à des espaces où la borne supérieure ne sera pas toujours atteinte.

ii

Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$, et un tel isomorphisme permet de définir des normes du même type pour E. Par exemple, si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, et si $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ est la base duale de E (*i.e.* pour tout $x \in E, x = \sum_{i=1}^n e_i^*(x) e_i$, ou encore $(e_1^*(x), \dots, e_n^*(x))$ est le n-uplet des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$), alors on peut lui associer la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{B},\infty}$ sur E par

$$\forall\, x \in E, \quad \|x\|_{\mathcal{B},\infty} = \sup\{|e_i^*(x)|, i \in [\![1, n]\!]\},$$

appelée *norme infinie sur E associée à la base $\mathcal{B}$*.

Il faut cependant avoir conscience qu'une telle norme est assujettie à un choix d'une base de E, et qu'elles perdent donc le caractère canonique de l'exemple ci-dessus.

Toutefois, si E admet lui-même une base canonique, comme c'est par exemple le cas de $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pourra employer les expressions norme 1, norme 2 et norme infinie, en sous-entendant qu'il s'agit de celles associées à la base canonique de l'espace considéré.

Par exemple,

$$\forall\, P = \sum_{i=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}_n[X], \quad \|P\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |a_k|,$$

et

$$\forall\, A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \|A\|_2 = \sqrt{\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}|^2}$$

Exemple (Norme de la convergence uniforme)

Soit X un ensemble non vide. Notons $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des fonctions bornées de X dans $\mathbb{K}$. La norme de la *convergence uniforme* sur cet espace, notée $\|\cdot\|_\infty$, est donnée par

$$\forall\, f \in \mathcal{B}(X, \mathbb{K}), \quad \|f\|_\infty \overset{def}{=} \sup\{|f(x)|,\, x \in X\}$$

On l'utilise particulièrement dans le cas où X est un intervalle, ainsi que dans le cas où $X = \mathbb{N}$ (cela définit alors une norme sur l'ensemble des suites bornées d'éléments de $\mathbb{K}$).

iii

Exemple (Normes sur l'espace des fonctions numériques continues sur un segment)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, où $a < b$. Posons $E = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{K})$.
On définit

(1) La *norme de la convergence en moyenne* sur E, notée $\|\cdot\|_1$, par

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_1 = \int_{[a,b]} |f|$$

(2) La *norme de la convergence en moyenne quadratique* sur E, notée $\|\cdot\|_2$, par

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_{[a,b]} |f|^2}$$

On reconnaît d'ailleurs dans le cas réel la norme associée au produit scalaire $(f,g) \mapsto \int_{[a,b]} fg$ sur E.

(3) La norme infinie sur $\mathcal{B}([a,b], \mathbb{K})$ induit une norme sur E (et, dans ce cas restreint, le sup est en fait un max).

iv

Exemple (Produit fini d'espaces vectoriels normés)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(E_1, \|\cdot\|_1), \dots, (E_n, \|\cdot\|_n)$ des espaces vectoriels normés. L'application

$$\begin{array}{rccc} \|\cdot\| : & E_1 \times \cdots \times E_n & \to & \mathbb{R}_+ \\ & x = (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & \|x\| \overset{def}{=} \sup\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \|x_i\|_i \end{array}$$

confère à $E_1 \times \cdots \times E_n$ une structure d'evn, dite structure d'*evn produit* sur $E_1 \times \cdots \times E_n$.

v

Notion de norme d'algèbre

Si E n'est pas seulement un $\mathbb{K}$-espace vectoriel mais aussi une $\mathbb{K}$-algèbre, et qu'on le munit d'une norme, il est naturel d'espérer que $\|\cdot\|$ se « comporte bien » non seulement pour le produit par un scalaire (homogénéité) et pour la somme (inégalité triangulaire), mais aussi pour le produit interne. En considérant l'exemple des endomorphismes ou des matrices non nul(le)s nilpotent(e)s, on voit qu'il n'est pas raisonnable de vouloir que $\|uv\| = \|u\|\,\|v\|$ pour tous $u, v \in E$.
Aussi définit-on la notion de *norme d'algèbre* sur la $\mathbb{K}$-algèbre E comme une norme vérifiant en outre :

$$\forall u, v \in E, \quad \|uv\| \leqslant \|u\|\,\|v\|.$$

On dit alors que $(E, \|\cdot\|)$ est une $\mathbb{K}$-*algèbre normée.*
Cette notion n'est pas explicitement au programme.

1.1

Notion de semi-norme (hors-programme)

Lorsqu'une application $N : E \to \mathbb{R}_+$ est homogène et vérifie l'inégalité triangulaire, on dit que N est une *semi-norme*. Une norme n'est rien d'autre qu'une semi-norme vérifiant en outre l'axiome de séparation. Une somme $N_1 + \cdots + N_p$ de semi-normes est une semi-norme, et peut être une norme alors qu'aucune N_i ne l'est.
Pour toute forme linéaire φ sur E, $|\varphi|$ est une semi-norme [a]. En particulier, si φ est une forme linéaire d'évaluation, $|\varphi|$ est une semi-norme.

[a] Plus généralement, la composée $N \circ \psi$ d'une norme et d'une application linéaire, qui est une norme si et seulement si ψ est injective.

1.2

Exercice (D'autres exemples de normes)

1 On note E l'ensemble des fonctions continues 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$.
i Montrer que l'application

$$N : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R}_+ \\ f & \mapsto & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|\mathrm{d}t \end{array}$$

est une norme sur E.
ii Même question pour

$$N_2 : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R}_+ \\ f & \mapsto & \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\mathrm{d}t} \end{array}$$

2 On pose $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}), f(0) = 0\}$, et on note, pour tout $f \in E$: $N(f) = \int_0^1 |f'(t)|\mathrm{d}t$.
i Montrer que N est une norme sur E.
ii Trouver une norme sur $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ qui induit N sur E.

1

Exercice (Normes d'algèbres)

1 Soit X un ensemble non vide, et $E = \mathcal{B}(X,\mathbb{K})$. Montrer que la norme infinie sur E est une norme d'algèbres.
2 Montrer que l'on définit une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ en posant, pour tout $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\|A\| = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|,\ 1 \leqslant j \leqslant n\right\}$$

2

Définition (Vecteur unitaire)

Un vecteur d'un evn E est dit *unitaire* s'il est de norme 1.

1.b

Pour tout vecteur non nul x d'un evn E, $\frac{x}{\|x\|}$ est unitaire.

Exemple (Vecteur unitaire)

Les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ sont unitaires pour la norme 1, la norme 2, et la norme infinie, mais pour chaque norme, il existe des vecteurs unitaires pour cette norme mais pas pour les autres (sauf dans le cas sans intérêt où $n = 1$).
Pour la norme N_2 définie ci-dessus dans l'exercice 1, la fonction $g_n \ : t \mapsto e^{int}$ est unitaire (pour tout $n \in \mathbb{Z}$).

vi

Définition (Distance associée à une norme)

Étant donné une norme $\|\cdot\|$ sur E, l'application

$$d \ : \quad \begin{array}{ccc} E^2 & \to & \mathbb{R}_+ \\ (x,y) & \mapsto & \|x-y\| \end{array}$$

est appelée *distance associée à la norme* $\|\cdot\|$.

1.c

Dans ce contexte, d vérifie :
- *(axiome de séparation)* $\forall\, x, y \in E, \quad d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
- *(symétrie)* $\forall\, x, y \in E, \quad d(x,y) = d(y,x)$.
- *(inégalité triangulaire)* $\forall\, x, y, z \in E, \quad d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$.

Sur la notion de distance (hors-programme)

Ces propriétés (avec la positivité de d) définissent plus généralement la notion générale (hors-programme) de *distance*, un ensemble muni d'une distance étant appelé *espace métrique*. Vous ne rencontrerez que des distances associées à une norme, mais on peut quand même mentionner la distance sur $\mathbb{R}$ donnée par

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \quad d(x,y) \overset{def}{=} |\arctan(y) - \arctan(x)|$$

et qui s'étend naturellement en une distance sur $\overline{\mathbb{R}}$, pour laquelle les deux infinis sont distants de π.

1.3

Définition (Distance d'un point à une partie non vide)

Soit $x \in E$ (où E est un evn) et A une partie non vide de E. On appelle *distance de x à A* et on note $d(x,A)$ le réel

$$d(x,A) \overset{def}{=} \inf\{d(x,a),\ a \in A\}.$$

1.d

Démonstration

Justification de cette définition.

□

On observera que $d(x,A) = 0$ n'entraîne pas que $x \in A$:

Plus généralement, il n'existe pas nécessairement $a \in A$ tel que $d(x,A) = d(x,a)$: on dit que la distance de x à A n'est pas nécessairement atteinte.

Illustration

2. Topologie d'un espace normé

On rappelle que E est un evn.

2.1. Boules, sphères, parties bornées

Définition (Boules fermées, boules ouvertes, sphères) 2.a

Soit $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+$.
- L'ensemble $\{x \in E,\, d(x,a) \leqslant r\}$ est appelé *boule fermée* de centre a et de rayon r, et noté $\overline{\mathcal{B}}(a,r)$.
- L'ensemble $\{x \in E,\, d(x,a) < r\}$ est appelé *boule ouverte* de centre a et de rayon r, et noté $\mathcal{B}(a,r)$.
- L'ensemble $\{x \in E,\, d(x,a) = r\}$ est appelé *sphère* de centre a et de rayon r, et noté $\mathcal{S}(a,r)$.

La *boule unité* (fermé ou ouverte selon le cas) est celle de centre 0_E et de rayon 1. De même pour la sphère unité.

Illustration

Boules et sphères vides 2.1

(1) $\overline{\mathcal{B}}(a,r)$ n'est jamais vide.
(2) $\mathcal{B}(a,r)$ est non vide si et seulement si $r > 0$.
(3) $\mathcal{S}(a,r)$ est non vide si et seulement si $r = 0$ ou $E \neq \{0_E\}$.

Les boules sont convexes.

Illustration

Exercice (Boules unités)

Dessiner la boule unité fermée de $\mathbb{R}^2$ pour la norme euclidienne usuelle N_2, puis pour les normes $N_\infty : (x, y) \mapsto \max(|x|, |y|)$ et $N_1 : (x, y) \mapsto |x| + |y|$.

3

Définition (Parties, suites, fonctions bornées)

Une partie A de E est *bornée* s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall\, a \in A,\ \|a\| \leqslant M.$$

Une suite ou une fonction à valeurs dans E est dite *bornée* si son image l'est.

2.b

Parties bornées

(1) Une partie de E est bornée si et seulement si elle est incluse dans une boule (fermée ou ouverte, peu importe) centrée en 0_E.

(2) L'union d'un nombre fini de parties bornées est bornée.

(3) Une partie d'une partie bornée est bornée.

(4) Toute boule est bornée.

2.2

Illustration

Dans le cas où on travaille dans $\mathbb{R}$, nous aurions pu déclarer bornée une partie à la fois majorée et minorée. De même pour une fonction ou pour une suite. Ces deux points de vue sont bien sûr équivalents, mais une *bonne* *pratique* consiste à montrer par exemple qu'une fonction f à valeurs réelles est bornée en montrant que $|f|$ est majorée, plutôt qu'en montrant séparément qu'elle est majorée et minorée.

Exercice (Diamètre d'une partie non vide bornée)

On appelle *diamètre* d'une partie non vide et bornée A de E le réel

$$\sup\{d(x,y),(x,y)\in A^2\}.$$

1 Justifier la bonne définition de cette notion.

2 Déterminer le diamètre d'une boule ou sphère non vide de rayon r.

4

Illustration

2.2. Ouverts et fermés d'un evn

Définition (Voisinage d'un point)

Soit $a\in E$, et soit A une partie de E. On dit que A est un *voisinage* de a, ou que a est *intérieur* à A, s'il existe $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\mathcal{B}(a,\varepsilon)\subset A$$

2.c

a est intérieur à A si et seulement si

$$\exists\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*,\ \mathcal{B}(a,\varepsilon)\subset A$$

Illustration

Voisinage d'un point dans un evn

(1) Toute partie de E contenant un voisinage de a est un voisinage de a.

(2) L'intersection d'un nombre fini de voisinages de a est un voisinage de a (mais l'intersection d'un nombre infini de voisinages de a n'est pas toujours un voisinage de a).

(3) Étant donné deux points distincts a et b de E, il existe des voisinages respectifs V_a et V_b de a et b tels que $V_a \cap V_b = \emptyset$.

2.3

Définition (Ouvert d'un espace normé)

Une partie A de E est dite *ouverte* si elle est voisinage de chacun de ses points.

2.d

Illustration

E et $\emptyset$ sont des ouverts de E.

Ouvert

(1) Une union quelconque d'ouverts de E est un ouvert de E.

(2) Une intersection finie d'ouverts de E est un ouvert de E.

(3) Une intersection quelconque d'ouverts de E n'est pas toujours un ouvert de E.

2.4

Exemple (Ouverts)

Une boule ouverte est un ouvert.

i

Définition (Fermé d'un espace normé) 2.e

Une partie A de E est dite *fermée* si son complémentaire dans E est un ouvert de E.

E et $\emptyset$ sont des fermés de E.

Fermé 2.5

(1) Une intersection quelconque de fermés est un fermé.
(2) Une union finie de fermés de E est un fermé de E.
(3) Une union quelconque de fermés de E n'est pas toujours un fermé de E.

Exemple (Fermés) ii

Une boule fermée, une sphère, sont fermées. En particulier, les singletons sont fermés.

Une boule fermée est rarement ouverte, et une boule ouverte est rarement fermée.
Attention ! Une partie de E peut être à la fois fermée et ouverte, ou ni fermé ni ouverte :

Illustration

Définition (Point adhérent) 2.f

Un point a de E est *adhérent* à une partie A de E si A rencontre tout voisinage de a.

Point adhérent à une partie — 2.6

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) a est adhérent à A.

(2) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \mathcal{B}(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

(3) $d(a, A) = 0$.

Définition (Intérieur, adhérence, frontière d'une partie) — 2.g

- On appelle *intérieur* de A et on note $\mathring{A}$ l'ensemble des points intérieurs à A.
- On appelle *adhérence* de A et on note $\overline{A}$ l'ensemble des points adhérents à A.
- On appelle *frontière* de A (et on note parfois $\mathrm{Fr}(A)$) l'ensemble des points adhérents à A et à son complémentaire.

Avec cette définition, $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Fr}(E \setminus A)$. Un point appartient à $\mathrm{Fr}(A)$ si et seulement si il est à distance nulle de A et de son complémentaire.

Illustration

Exercice (Adhérence et intérieur du complémentaire) — 5

Montrer que pour toute partie A de E, l'adhérence de $E \setminus A$ est $E \setminus \mathring{A}$, et que l'intérieur de $E \setminus A$ est $E \setminus \overline{A}$.

La frontière de A est donc aussi $\overline{A} \setminus \mathring{A}$.
Bien sûr, si $A \subset B$, alors $\overline{A} \subset \overline{B}$ et $\mathring{A} \subset \mathring{B}$.
$\mathring{A}$ est un ouvert inclus dans A, et $\overline{A}$ est un fermé contenant A.

Intérieur et adhérence

Soit A une partie de E.

(1) L'intérieur de A est le plus grand ouvert (au sens de l'inclusion) de E contenu dans A.

(2) L'adhérence de A est le plus petit fermé (au sens de l'inclusion) de E contenant A.

2.7

Illustration

On retiendra que $A \subset \overline{A}$ (resp. $\mathring{A} \subset A$), l'égalité se produisant si et seulement si A est fermée (resp. ouverte).

A est ouverte si et seulement si elle ne possède aucun point de sa frontière, et est fermée si et seulement si elle possède tous les points de sa frontière (en général, une partie A de E possède certains points de sa frontière, mais pas tous).

Exemple (Adhérence, intérieur et frontière)

Pour tout $r > 0$ et tout $a \in E$, $\mathcal{B}(a, r)$ et $\overline{\mathcal{B}}(a, r)$ ont même adhérence $\overline{\mathcal{B}}(a, r)$, même intérieur $\mathcal{B}(a, r)$ et même frontière $\mathcal{S}(a, r)$.

iii

Exemple (Parties réelles d'intérieur vide)

Un intervalle I de $\mathbb{R}$ est d'intérieur vide si et seulement si I est vide ou est un singleton, si et seulement si I est fini.
$\mathbb{N}$ est infini et d'intérieur vide (mais n'est pas un intervalle).

iv

3. Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

Définition (Suite convergente, divergente)

Soit (u_n) une suite d'éléments de E, et $l \in E$. On dit que la suite (u_n) *converge* vers l si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geqslant N) \Rightarrow (\|u_n - l\| \leqslant \varepsilon).$$

3.a

Dans ce cas, on note $u_n \to_n l$ ou $\lim_n u_n = l$.

La suite (u_n) est dite *convergente* s'il existe un élément de E vers lequel elle converge.

Une suite non convergente est dite *divergente*.

Voici deux reformulations possibles du fait que (u_n) converge vers l :

(1) Que la suite réelle de terme général $\|u_n - l\|$ converge vers 0.

(2) Que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe un rang à partir duquel u_n appartient à la boule[2] de centre l et de rayon ε.

Illustration

Exemple (Suites convergentes)

(1) Vous avez déjà vu beaucoup d'exemples en Sup dans le cadre des suites réelles ou complexes, n'hésitez pas à les revoir.

(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $g_n : x \in [0,1] \mapsto x^n$. La suite (g_n) converge vers la fonction identiquement nulle dans l'evn $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$, mais pas dans $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

(3) On reprend les fonctions $g_n : x \in [0,1] \mapsto x^n$. Pour tout $a \in]0,1[$ la suite (h_n) des restrictions des g_n à $[0,a]$ converge vers la fonction identiquement nulle dans $(\mathcal{C}([0,a],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, mais la suite (s_n) des restrictions des g_n à $[0,1[$ ne converge pas vers la fonction identiquement nulle dans $(\mathcal{C}([0,1[,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, bien que $[0,1[= \cup_{a\in]0,1[}[0,a]$. i

(4) Pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la suite $(A + \frac{1}{k}B)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (pour n'importe laquelle des normes sur cet espace).

Proposition (Unicité de la limite)

Toute suite d'éléments de E admet au plus une limite. 3.a

2. ouverte ou fermée, cela ne change rien

Démonstration

$\square$

Proposition (Caractère borné d'une suite convergente) 3.b

Toute suite convergente d'un evn est bornée.

Bien sûr, je ne rappellerai pas que la réciproque est fausse.

Il se peut que pour des normes différentes N et N', une même suite soit convergente pour N, mais non bornée pour N'.

Théorème (Opérations algébriques sur les suites convergentes) 3.c

Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des suites convergentes d'éléments de E. L'ensemble $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $E^{\mathbb{N}}$, et l'application

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathcal{C} & \to & E \\ & u & \mapsto & \lim u \end{array}$$

est linéaire.

Si de plus $(E, \|\cdot\|)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre normée, alors $\mathcal{C}$ est [a] une $\mathbb{K}$-algèbre, et φ est un morphisme d'algèbres.

a. pour la structure induite par celle sur $E^{\mathbb{N}}$

Démonstration

$\square$

Exercice (Produit d'une suite numérique et d'une suite vectorielle) 6

Soit (λ_n) une suite convergente de scalaires, et λ sa limite, ainsi que (u_n), suite d'éléments de E, convergeant vers un vecteur u. Montrer que la suite $(\lambda_n u_n)$ converge vers λu.

Convergence d'une suite à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés

Une suite à valeurs dans un produit d'evn est convergente si et seulement si ses suites coordonnées sont convergentes.

3.1

Définition (Suites extraites, valeurs d'adhérence)

On appelle *extractrice* φ toute fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.
Soit $(u_n), (v_n) \in E^{\mathbb{N}}$. On dit que (v_n) est *extraite* de (u_n) s'il existe une extractrice φ pour laquelle

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{\varphi(n)}$$

On appelle *valeur d'adhérence* de (u_n) toute limite d'une suite extraite convergente de (u_n).

3.b

Suites extraites, valeurs d'adhérence

(1) Si (u_n) converge, alors sa limite est sa seule valeur d'adhérence.
(2) Une suite ayant au moins deux valeurs d'adhérence diverge.
(3) Une suite n'a pas toujours de valeur d'adhérence.
(4) La relation « est extraite de » est réflexive et transitive, mais ni symétrique, ni antisymétrique (sauf cas pathologiques).

3.2

Proposition (Caractérisation séquentielle des points adhérents)

Un point a de E est adhérent à A si et seulement si a est limite d'une suite de points de A.

3.d

Démonstration

□

On en déduit une caractérisation des fermés :

Corollaire (Caractérisation séquentielle des fermés)

A est une partie fermée de E si et seulement si pour toute suite convergente (u_n) de points de A, $\lim_n u_n$ appartient à A.

3.e

Définition (Partie dense)

Une partie A de E est dite *dense* si $\overline{A} = E$.

3.c

A est dense dans E si et seulement si A rencontre toute boule de E de rayon non nul.

Corollaire (Caractérisation séquentielle de la densité)

A est dense dans E si et seulement si tout point de E est limite d'une suite de points de A.

3.f

Exemple (Parties denses)

$\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$ (et d'intérieur vide).
$\mathbb{Q}^n$ est dense dans $\mathbb{R}^n$ (et d'intérieur vide).

ii

Exercice (Densité des matrices inversibles)

Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

7

4. Topologie induite

Ici, A désigne une partie d'un evn E.

Définition (Topologie induite)

Soit A une partie de E. On appelle *ouvert relatif* (resp. *fermé relatif*) de A toute intersection d'un ouvert (resp. d'un fermé) de E avec A.
Soit $a \in A$. On appelle *voisinage relatif* de a dans A toute intersection d'un voisinage de a dans E avec A.

4.a

Ces notions définissent ce qu'on appelle la *topologie de A induite par E*.

Tout fermé, ouvert de A, tout voisinage relatif dans A, est une partie de A.

Si B est une partie de A, fermée, ouverte, ou voisinage de a dans E, alors c'est un fermé, ouvert, voisinage de a relatif dans A, mais la réciproque est fausse.

B est un ouvert relatif de A si et seulement si son complémentaire dans A est un fermé relatif de A.

A est un ouvert relatif et un fermé relatif de lui-même.

Une union quelconque et une intersection finie d'ouverts relatifs de A en est encore un.

Une intersection quelconque et une union finie de fermés relatifs de A en est encore un.

Illustration

Proposition (Caractérisation des ouverts relatifs)

Soit B une partie de A. B est un ouvert relatif de A si et seulement si pour tout $b \in B$, B est un voisinage relatif de b dans A.

4.a

Démonstration

$\square$

Proposition (Caractérisation séquentielle des fermés relatifs)

Soit B une partie de A. B est un fermé relatif de A si et seulement si, pour tout suite (x_n) de points de B, convergeant dans A, la limite de (x_n) est dans B.

4.b

Démonstration

$\square$

Point isolé, partie discrète (non au programme, lecture facultative)

On sait que les sous-groupes de $(\mathbb{R},+)$ sont de la forme $a\mathbb{Z}$ pour un certain réel a, ou denses dans $\mathbb{R}$.
Topologiquement, que dire du premier type de sous-groupe ? Pour tout $x \in a\mathbb{Z}$, $\{x\}$ est un voisinage relatif de x dans $a\mathbb{Z}$ (*i.e.* il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de x dans $\mathbb{R}$ tel que $a\mathbb{Z} \cap \mathcal{V} = \{x\}$). On dit qu'un tel point x est *isolé* (dans $a\mathbb{Z}$). Tout point de $a\mathbb{Z}$ est isolé (dans $a\mathbb{Z}$) : on dit que $a\mathbb{Z}$ est *discret*.
C'est pourquoi vous entendrez parfois que tout sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ est soit discret, soit dense.

4.1

5. Étude locale d'une application, continuité

Ici, f est une fonction de A (partie d'un evn E) dans F (un evn), et a est adhérent à A.

5.1. Limite d'une fonction en un point adhérent à son domaine

Définition (Limite en un point adhérent à une partie A)

Soit $f : A \to F$ une application, a un point de E adhérent à A, et $l \in F$.
On dit que f admet l pour *limite* en a si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \delta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in A,\ (\|x-a\| \leqslant \delta) \Rightarrow (\|f(x)-l\| \leqslant \varepsilon).$$

On écrit alors $f \to_a l$, $f(x) \to_{x \to a} l$, $l = \lim\limits_a f$, ou encore $l = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

5.a

On peut remarquer que l'implication

$$\forall x \in A,\ (\|x-a\| \leqslant \delta) \Rightarrow (\|f(x)-l\| \leqslant \varepsilon)$$

peut se réécrire

$$f(A \cap \overline{\mathcal{B}}(a,\delta)) \subset \overline{\mathcal{B}}(l,\varepsilon)$$

Reformulation de la limite

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) f admet l pour limite en a.
(2) Pour toute boule $\mathcal{B}$ de rayon non nul centrée en l, il existe une boule de rayon non nul $\mathcal{B}'$, centrée en a, telle que $f(A \cap \mathcal{B}') \subset \mathcal{B}$.
(3) Pour tout voisinage $\mathcal{V}$ de l dans F, il existe un voisinage relatif $\mathcal{V}'$ de a dans A tel que $f(\mathcal{V}') \subset \mathcal{V}$.
(4) Pour tout voisinage $\mathcal{V}$ de l dans F, $f^{-1}(\mathcal{V})$ est un voisinage relatif de a dans A.

5.1

Une fonction admet au plus une limite en un point adhérent à son domaine, mais n'en admet pas toujours.
On étend sans problèmes la notion de limite aux cas suivants :

(1) Limite de $f(x)$ lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$.

(2) Limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ lorsque A est une partie de $\mathbb{R}$.

(3) Limite infinie en a adhérent à A pour une fonction réelle.

En utilisant la notion de voisinage[3] de $+\infty$ ou de $-\infty$ dans $\mathbb{R}$, ces extensions admettent encore des reformulations en termes de voisinages. Par exemple, f tend vers $+\infty$ en a si et seulement si pour tout voisinage $\mathcal{V}$ de $+\infty$ dans $\mathbb{R}$, $f^{-1}(\mathcal{V})$ est un voisinage relatif de a dans A.

Les deux dernières reformulations dans la remarque 5.1 sont valables dans toutes les situations : elles synthétisent à elles-seules ce que signifie, pour une fonction et même pour une suite (en prenant $A = \mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$), d'admettre une limite en un point adhérent à son domaine (en $+\infty$ pour les suites).

Proposition (Caractérisation séquentielle de la limite) 5.a

f admet l pour limite en a si et seulement si, pour toute suite (u_n) de points de A, de limite a, la suite $(f(u_n))$ tend vers l.

Démonstration

$\square$

Proposition (Limite d'une fonction à valeurs dans un evn produit) 5.b

Supposons que F soit un evn produit $F_1 \times \cdots \times F_p$. On écrit $l = (l_1, \ldots, l_p)$ et $f = (f_1, \ldots, f_p)$.

La fonction f tend vers l en a si et seulement si pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, la fonction f_k tend vers l_k en a.

Démonstration

$\square$

3. Une partie A de $\mathbb{R}$ est un voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $[M, +\infty[\subset A$ (resp. $]-\infty, M] \subset A$)

Théorème (Opérations algébriques sur les limites)

Si f et g (une fonction de A dans F) admettent respectivement l_f et l_g pour limites en a, alors pour tous scalaires λ et μ, $\lambda f + \mu g$ admet $\lambda l_f + \mu l_g$ pour limite en a.
Si en outre F est une $\mathbb{K}$-algèbre normée, alors fg tend vers $l_f l_g$ en a.

5.c

Démonstration

$\square$

Proposition (Limite d'une composée)

On suppose g définie sur l'image de f, et à valeurs dans un evn H. Si f admet b pour limite en a et g admet l pour limite en b, alors $g \circ f$ admet l pour limite en a.

5.d

Démonstration

$\square$

5.2. Continuité ponctuelle

Ici, on suppose plus précisément que a est en fait un point de A.

Définition (Continuité en un point)

f est dite *continue* en $a \in A$ si elle admet une limite en a.

5.b

Bien sûr, f est continue en a si et seulement si elle admet $f(a)$ pour limite en a.
Grâce à l'étude générale de la notion de limite, on a :

Proposition (Caractérisation séquentielle de la continuité en un point) 5.e

f est continue en a si et seulement si pour toute suite (u_n) de points de A de limite a, la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(a)$.

C'est surtout l'implication directe qui est intéressante : elle permet de justifier la convergence d'une suite (de la forme $(f(u_n))$), mais aussi par contraposition, de montrer qu'une fonction n'est pas continue en a (en exhibant une suite (u_n) telle que $(f(u_n))$ ne converge pas vers $f(a)$).

Théorème (Opérations algébriques sur les applications continues) 5.f

Si f et g (des fonctions de A dans F) sont continues en a, alors leurs combinaisons linéaires le sont aussi.
De même pour leur produit lorsque F est une $\mathbb{K}$-algèbre normée.

Proposition (Continuité du produit dans une algèbre normée) 5.g

Soit E une $\mathbb{K}$-algèbre normée. Pour tout entier $p \geqslant 2$, soit

$$\varphi_p : \begin{array}{rcl} E^p & \to & E \\ (x_1, \dots, x_p) & \mapsto & x_1 \dots x_p \end{array}$$

L'application φ_p est alors continue en tout point (on a muni E^p de sa structure naturelle d'EVN produit).

Démonstration

En utilisant la caractérisation séquentielle de la continuité ponctuelle, on est ramené à montrer qu'un produit de suites convergentes d'éléments de E est convergente, vers le produit des limites : le théorème 5.c justifie ce fait. $\square$

Proposition (Composition de deux applications continues) 5.h

On suppose g définie sur l'image de f, et à valeurs dans un evn H. Si f est continue en a, et si g est continue en $b \overset{def}{=} f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.

Si f et g coïncident au voisinage (relatif) d'un point a de A, alors f est continue en a si et seulement si g est continue en a.

Lorsque f est à valeurs réelles, on peut utiliser l'ordre sur $\mathbb{R}$ pour généraliser les résultats de MPSI utilisant l'ordre à l'arrivée : si f tend vers l en a et est majorée par M au voisinage de a, alors $l \leqslant M$, théorème d'encadrement (principe des gendarmes).

En revanche, les résultats utilisant aussi un ordre au départ, en particulier ceux concernant la monotonie, n'ont pas lieu d'être généralisés.

Si f admet une limite finie l en un point α adhérent à son domaine, mais n'appartenant pas à A, alors on définit le *prolongement par continuité* de f en α comme la fonction $\tilde{f}$ définie sur $A \cup \{\alpha\}$ coïncidant avec f sur A, et valant l en α.

5.3. Continuité globale

Définition (Continuité globale)

La fonction $f : A \to F$ est dite *continue sur A* si elle est continue en chaque point de A. On note $\mathcal{C}(A, F)$ ou $\mathcal{C}^0(A, F)$ l'ensemble des fonctions continues sur A, à valeurs dans F.

5.c

L'ensemble des fonctions continues de A dans F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et même une $\mathbb{K}$-algèbre lorsque F est une $\mathbb{K}$-algèbre normée.

Si E est une $\mathbb{K}$-algèbre normée, l'application

$$\varphi_p \ : \ \begin{array}{ccc} E^p & \to & E \\ (x_1, \ldots, x_p) & \mapsto & x_1 \ldots x_p \end{array}$$

est continue sur E^p (muni de sa structure d'EVN produit), pour tout entier $p \geqslant 2$.

Nous verrons beaucoup d'exemples de fonctions continues lors de la section suivante.

Exercice (Applications continues)

Soit $E \stackrel{def}{=} \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$.

1 Montrer que $\varphi : f \in E \mapsto f(1)$ est continue pour $\|\cdot\|_\infty$, mais pas pour $\|\cdot\|_1$.

2 Montrer que ce résultat reste valable pour $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$, où $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

8

Proposition (Caractère local de la continuité)

$f : A \to F$ est continue sur A si et seulement si pour tout $a \in A$, il existe un voisinage relatif $\mathcal{V}$ de a (dans A) tel que $f_{|\mathcal{V}}$ soit continue sur $\mathcal{V}$.

5.i

Démonstration

□

Exemple (Caractère local de la continuité)

Par exemple, une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si sa restriction à tout segment est continue. Cela paraît sans intérêt pour l'instant, mais cet exemple prendra tout son sens lors du cours sur les suites et séries de fonctions.

i

Caractère local de la continuité

Ne faites par dire à ce résultat ce qu'il ne dit pas. Prenons l'exemple de la fonction partie entière de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, que l'on notera f. Sa restriction à $[0,1[$ est continue sur $[0,1[$, mais f n'est pas continue (sur $\mathbb{R}$), ni même en tout point de $[0,1[$.

5.2

Théorème (Caractérisation des applications continues) 5.j

Soit $f\ : A \to F$ une application. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) f est continue sur A.

(2) Pour tout ouvert X de F, $f^{-1}(X)$ est un ouvert relatif de A.

(3) Pour tout fermé X de F, $f^{-1}(X)$ est un fermé relatif de A.

Démonstration

L'équivalence entre (2) et (3) est claire, puisque pour toute partie X de F, $f^{-1}(F \setminus X) = A \setminus f^{-1}(X)$, et qu'une partie B de A en est un ouvert relatif de A si et seulement si son complémentaire dans A en est un fermé relatif.
Supposons (1). Soit X un ouvert de F, et soit $a \in f^{-1}(X)$, *i.e.* $f(a) \in X$. Comme X est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathcal{B}(f(a), \varepsilon) \subset X$. Comme f est continue en a, il existe $\delta > 0$ tel que $f(A \cap \mathcal{B}(a, \delta)) \subset \mathcal{B}(f(a), \varepsilon) \subset X$, et donc $A \cap \mathcal{B}(a, \delta) \subset f^{-1}(X)$: $f^{-1}(X)$ est un voisinage relatif de a dans A. Ceci valant pour tout point a de $f^{-1}(X)$, $f^{-1}(X)$ est un ouvert relatif de A (grâce à la proposition 4.a), d'où (2).
Réciproquement, supposons (2) : soit $a \in A$, et montrons que f est continue en a. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\mathcal{B}(f(a), \varepsilon)$ est un ouvert de F, $f^{-1}(\mathcal{B}(f(a), \varepsilon))$ est un ouvert relatif de A, et c'est en particulier un voisinage relatif de a dans A, d'où l'existence de $\delta > 0$ tel que

$$A \cap \mathcal{B}(a, \delta) \subset f^{-1}(\mathcal{B}(f(a), \varepsilon))$$

et donc tel que $f(A \cap \mathcal{B}(a, \delta)) \subset f^{-1}(\mathcal{B}(f(a), \varepsilon))$.
Ainsi, f est continue en a. Ceci valant pour tout point a de A, f est continue sur A.

□

Ce théorème est très utile pour montrer qu'une partie d'un evn est ouverte (ou fermée).

Dans le cas où $A = E$, f est continue sur E si et seulement si l'image réciproque par f de tout ouvert (resp. fermé) de F est un ouvert (resp. un fermé) de E.

Il n'y a rien de tel pour les images directes : l'image directe par une fonction continue d'un ouvert (resp. d'un fermé) n'est pas, en général, un ouvert (resp. un fermé).

Exercice (Parties fermées ou ouvertes par image réciproque) 9

1 Montrer à nouveau que les boules ouvertes sont ouvertes, et que les boules fermées sont fermées.
Remarque : on admettra provisoirement que l'application $\|\cdot\|\ : E \to \mathbb{R}$ est continue.
2 Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Remarque : on admettra provisoirement que l'application $\det\ : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est continue.

Proposition (Prolongation d'une égalité par densité et continuité) 5.k

Deux applications continues f et g de E dans F, qui coïncident sur une partie dense, sont égales

Démonstration

□

Exercice (Prolongation d'une égalité par densité et continuité)

Vérifier que pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
Remarque : on admettra provisoirement que l'application $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \chi_M \in \mathbb{K}_n[X]$ est continue.

10

5.4. Uniforme continuité, caractère lipschitzien

Définition (Applications uniformément continues)

f est dite *uniformément continue* sur A si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x, y \in A, \quad \|y - x\| \leqslant \eta \Rightarrow \|f(y) - f(x)\| \leqslant \varepsilon.$$

Dans ce contexte formel, un tel η est appelé *module d'uniforme continuité* pour f et ε.

5.d

Toute fonction uniformément continue sur A est continue, mais la réciproque est fausse :

Définition (Applications lipschitziennes)

Soit $K \in \mathbb{R}_+$. f est dite *K-lipschitzienne*, ou *lipschitzienne de rapport K*, si

$$\forall x, y \in A, \quad \|f(y) - f(x)\| \leqslant K \|y - x\|.$$

f est dite *lipschitzienne* s'il existe $K \in \mathbb{R}_+$ pour lequel f est K-lipschitzienne.

5.e

Applications lipschitziennes

(1) Si f est K-lipschitzienne, alors elle est K'-lipschitzienne pour tout $K' \geqslant K$.
(2) Toute fonction lipschitzienne sur un domaine borné est bornée.
(3) Toute application lipschitzienne est uniformément continue.
(4) La réciproque est fausse.
(5) Une combinaison linéaire de fonctions lipschitziennes est lipschitzienne, de même pour la composée.
(6) Lorsque F est une $\mathbb{K}$-algèbre normée, le produit de fonctions lipschitziennes n'est pas toujours lipschitzien, une condition suffisante pour qu'il le soit est que f et g soient en outre bornées.

5.3

Exemple (Applications lipschitziennes)

ii

(1) L'application $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ est 1-lipschitzienne, et donc (uniformément) continue.

(2) L'application $x \mapsto d(x, A)$, où A est une partie non vide de E, est 1-lipschitzienne.

Illustration

Proposition (Caractérisation de continuité des applications linéaires)

5.1

Pour qu'une application linéaire u de E dans F soit continue, il faut et il suffit qu'il existe $C > 0$ tel que :

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\| \leqslant C\|x\|.$$

Démonstration

□

Autrement dit, une application linéaire est continue si et seulement si elle est lipschitzienne.

Une application linéaire est continue si et seulement si elle est uniformément continue, si et seulement si elle est continue en 0_E.

On note $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F. Il est clair que $\mathcal{L}_c(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$.

Exercice (Continuité de l'endomorphisme de dérivation)

1 Montrer que l'endomorphisme D de dérivation de $E = \mathcal{C}^\infty([0,1], \mathbb{R})$ n'est continu pour aucune norme.
2 Montrer qu'on peut trouver deux normes N et N' sur E de sorte que $D : (E, N) \to (E, N')$ soit continu.
3 Montrer l'existence d'une norme sur $\mathbb{R}[X]$ pour laquelle la dérivation est continue.

11

6. Comparaison des normes

Parmi les différentes normes dont on peut munir un même $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, certaines ne diffèrent pas fondamentalement, dans le sens où elles définissent les mêmes notions topologiques (ouverts, fermés, etc.).

Si par exemple N est une norme sur E, il est clair que $N' \overset{def}{=} 2N$ en est également une, et que, bien que les boules unités de E pour ces normes soient distinctes (sauf si $E = \{0_E\}$), les parties bornées (resp. fermées, ouvertes) de E pour N et N' sont les mêmes.

Un peu plus finement, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ définissent encore les mêmes notions topologiques sur $\mathbb{R}^2$.

Illustration

Définition (Normes équivalentes)

Soit $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes sur un même $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On dit que ces normes sont *équivalentes* s'il existe des réels strictement positifs α et β tels que

$$\forall x \in E,\ \alpha \|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \beta \|x\|_1 .$$

6.a

Normes équivalentes

(1) Cela définit une relation d'équivalence [a] sur l'ensemble des normes sur E.
(2) Pour établir que deux normes ne sont pas équivalentes, on pourra trouver une suite (u_n) d'éléments tous non nuls de E telle que $\left(\frac{\|u_n\|_2}{\|u_n\|_1}\right)$ tende vers $+\infty$ (ou vers 0).

a. L'expression « sont équivalentes » laissait supposer le caractère symétrique.

6.1

Exemple (Équivalence des normes) i

Vérifions que les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ de $\mathbb{K}^n$ sont équivalentes.
Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. On a $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1$ et $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2$,

$$\|x\|_1 \leqslant n\,\|x\|_\infty \quad \text{et} \quad \|x\|_2 \leqslant \sqrt{n}\,\|x\|_\infty\,,$$

donc $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes à $\|\cdot\|_\infty$, et elles sont par transitivité elles-mêmes équivalentes.

Boules et normes équivalentes 6.2

Dire que deux normes sont équivalentes, c'est dire que la boule unité de chacune contient une boule de rayon non nul pour l'autre centrée en 0_E.
Plus précisément, les assertions suivantes sont équivalentes (β désigne un réel strictement positif) :

(1) $\forall x \in E,\ \|x\|_2 \leqslant \beta\,\|x\|_1$.

(2) $\overline{\mathcal{B}}_1(0_E, 1) \subset \overline{\mathcal{B}}_2(0_E, \beta)$ (l'indice pour $\mathcal{B}$ faisant référence à la norme pour laquelle on considère la norme).

(3) $\forall a \in E, \forall r \in \mathbb{R}_+,\ \overline{\mathcal{B}}_1(a, r) \subset \overline{\mathcal{B}}_2(a, \beta r)$.

On en déduit que, pour tous réels α et β strictement positifs, les assertions suivantes sont équivalentes :

i $\forall x \in E,\ \alpha\,\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \beta\,\|x\|_1$.

ii $\overline{\mathcal{B}}_2(0_E, \alpha) \subset \overline{\mathcal{B}}_1(0_E, 1) \subset \overline{\mathcal{B}}_2(0_E, \beta)$ (l'indice pour $\mathcal{B}$ faisant référence à la norme pour laquelle on considère la norme).

iii $\forall a \in E, \forall r \in \mathbb{R}_+,\ \overline{\mathcal{B}}_2(a, \alpha\, r) \subset \overline{\mathcal{B}}_1(a, r) \subset \overline{\mathcal{B}}_2(a, \beta\, r)$.

Proposition (Caractérisations de l'équivalence de deux normes) 6.a

Soit $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes sur E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) Ces normes sont équivalentes.

(2) La boule unité pour chacune de ces normes est un voisinage de 0_E pour l'autre norme.

(3) Ces normes définissent les mêmes parties bornées.

(4) Ces normes définissent les mêmes voisinages.

(5) Ces normes définissent les mêmes ouverts.

(6) Ces normes définissent les mêmes fermés.

Démonstration

Les assertions (5) et (6) sont clairement équivalentes (par définition d'un fermé).
La remarque précédente permet d'établir l'équivalence entre (1), (2) et (3) (parce (3) équivaut à ce que chaque boule unité pour l'une des normes soit incluse dans une boule pour l'autre norme, centrée en 0_E), ainsi que l'implication de (1) vers (4) (grâce au point *iii*).
Pour conclure, on observe que (5) entraîne (2) (la boule unité ouverte de E est un voisinage de 0_E pour la norme considérée), et que (4) entraîne (5) (être ouvert, c'est par définition être voisinage de chacun de ses points).

□

Norme plus fine qu'une autre (hors-programme)

L'existence de $\beta > 0$ tel que $\|x\|_2 \leqslant \beta \|x\|_1$ pour tout $x \in E$ signifie que tout voisinage d'un point pour $\|\cdot\|_2$ est un voisinage de ce point pour $\|\cdot\|_1$: de façon imagée, on peut dire que « E possède plus de voisinages pour $\|\cdot\|_1$ que pour $\|\cdot\|_2$ », ou encore que « $\|\cdot\|_2$ sépare mieux les parties de E que $\|\cdot\|_1$ ». On dit alors que $\|\cdot\|_1$ est *plus fine* que $\|\cdot\|_2$.

6.3

Considérons deux normes N et N' équivalentes sur E, et (u_n) une suite d'éléments de E. Il est clair que (u_n) converge pour N si et seulement si elle converge pour N', et que les limites sont égales le cas échéant. De même pour la limite d'une fonction à valeurs dans E, en un point adhérent à son domaine.

Nous admettons provisoirement (y compris pour la section à venir) le résultat très important suivant :

Théorème (Équivalence des normes sur un espace de dimension finie)

Soit E un evn de dimension finie. Toutes les normes sur E sont alors équivalentes.

6.b

Démonstration

Selon le programme, aucune démonstration n'est exigible. Nous en présenterons éventuellement une, utilisant la notion de compacité, le moment venu. □

Cela généralise donc considérablement l'exemple ci-dessus d'équivalence des normes de $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$.

La comparaison de normes définies sur des espaces fonctionnels faisant partie des capacités attendues des étudiants, voici un exercice banal sur la question (vous en trouverez d'autres dans la feuille de TD), qui vous donne un exemple de normes non équivalentes :

Exercice (Comparaison de normes)

On travaille dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$, (où $a, b \in \mathbb{R}, a < b$). Vérifier qu'il n'y a pas d'équivalence entre les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.

12

7. Le cas de la dimension finie

7.1. Continuité, topologie

Ici, E est de dimension finie.

Nous rappelons que toutes les normes sur E sont équivalentes. En particulier, il y a invariance des différentes notions topologiques par rapport au choix d'une norme en dimension finie.

De plus, la convergence d'une suite (ou l'existence et la valeur de la limite d'une fonction) à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie équivaut à celle de chacune de ses coordonnées dans une base.

Proposition (Continuité des applications linéaires en dimension finie)

Si E est de dimension finie, toute application linéaire de E dans F est continue.

7.a

Démonstration

□

Exercice (Homéomorphisme, cas des applications linéaires)

Soit A et B des parties respectives de E et de F. On dit que l'application $f : A \to B$ est un *homéomorphisme* si c'est une bijection, continue, et de bijection réciproque continue.

1 Montrer qu'un isomorphisme entre deux evn de dimension finie est toujours un homéomorphisme.

2 Montrer que deux normes N et N' sur E sont équivalentes si et seulement si Id_E est un homéomorphisme de (E, N) sur (E, N').

3 Donner un exemple d'isomorphisme entre evn, qui n'est pas un homéomorphisme.

13

Toute forme linéaire sur un EVN de dimension finie est continue : en particulier, toutes les formes linéaires coordonnées associées à une base sont continues.

Exercice (Sous-espace d'un evn de dimension finie)

Soit E un evn de dimension finie, et F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que F est fermé.

14

Plus généralement, nous verrons à la proposition 8.j qu'un sous-espace de dimension finie d'un evn est fermé.

7.2. Continuité des applications multilinéaires, fonctions polynomiales

Proposition (Continuité des applications multilinéaires en dimension finie)

Soit $E_1, \ldots, E_p$ des EVN de dimension finie, F un EVN, et φ une application p-linéaire de $E_1 \times \cdots \times E_p$ dans F. L'application φ est alors continue.

7.b

Démonstration

Montrons-le dans le cas où $p = 2$ (le cas général est similaire). On se donne des base $(a_1, \ldots, a_p)$ et $(b_1, \ldots, b_q)$ de E_1 et E_2 respectivement.
Pour tout $(x, y) \in E_1 \times E_2$, écrivons

$$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_i \quad \text{et} \quad y = \sum_{j=1}^{q} \mu_j b_j$$

On a, par bilinéarité de φ

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \lambda_i \mu_j \varphi(a_i, b_j)$$

or les formes linéaires $x \mapsto \lambda_i$ et $y \mapsto \mu_j$ sont continues (E et F sont de dimension finie), ainsi que le produit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \mapsto \lambda\mu$, d'où la continuité de φ.

□

Exemple (Continuité des applications multilinéaires)

(1) Si H est un espace euclidien, alors l'application $(u, v) \in E^2 \mapsto (u|v)$ est continue, car bilinéaire en dimension finie.

(2) L'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{K} \times E & \rightarrow & E \\ & (\lambda, x) & \mapsto & \lambda x \end{array}$$

est bilinéaire (en dimension finie) donc continue.

(3) Le produit matriciel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est bilinéaire (en dimension finie) donc continu. De même pour la composition dans $\mathcal{L}(H)$ où H est un espace vectoriel de dimension finie.

(4) Si H est un espace vectoriel de dimension finie n, si $\mathcal{B}$ est une base de H, alors

$$\begin{array}{rccc} \det_{\mathcal{B}} : & H^n & \rightarrow & \mathbb{K} \\ & (v_1, \ldots, v_n) & \mapsto & \det_{\mathcal{B}}(v_1, \ldots, v_n) \end{array}$$

est n linéaire (en dimension finie), donc continue.

i

On rappelle que $\mathbb{K}^E$ peut être muni d'une structure de $\mathbb{K}$-algèbre, héritée de celle sur $\mathbb{K}$.

Définition (Application polynomiale)

On appelle *sous-algèbre des applications polynomiales* sur E la sous-algèbre de $E^{\mathbb{K}}$ engendrée, en tant qu'algèbre, par les formes linéaires sur E.

7.a

Bien sûr, on peut décrire la sous-algèbre Ω des applications polynomiales sur E comme l'intersection des sous-algèbres de $E^{\mathbb{K}}$ qui contiennent le dual $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ de E, mais ce n'est pas très éclairant. Il vaut mieux décrire Ω par l'« intérieur ».

Définition (Produit de deux formes linéaires)

Soit φ, ψ des formes linéaires sur E. On définit le *produit* de φ et ψ, et on note $\varphi \times \psi$ l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi \times \psi : & E & \rightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \mapsto & \varphi(x)\psi(x) \end{array}$$

7.b

C'est un cas particulier du produit d'éléments de $\mathbb{K}^E$.

Ainsi, on dispose d'une addition, d'un produit (pas interne dans $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$!), et d'un produit par un scalaire de formes linéaires. Le produit permet de définir les puissances d'une forme linéaire.

Définition (Monôme)

On appelle *monôme* sur E tout produit $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ de formes linéaires sur E.

7.c

Une application de E dans $\mathbb{K}$ est *polynomiale* si et seulement si elle s'écrit comme une combinaison linéaire de monômes sur E.

Les applications polynomiales sont continues (chaque monôme l'est car les formes linéaires et les applications multilinéaires le sont en dimension finie).

L'ensemble des applications polynomiales sur E est une $\mathbb{K}$-algèbre (engendrée en tant qu'espace vectoriel par les monômes, et en tant qu'algèbre par les formes linéaires sur E).

Exemple (Applications polynomiales)

(1) Les fonctions polynomiales usuelles de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ sont des polynômes (ils sont tous des polynômes en la forme linéaire $\mathrm{Id}_{\mathbb{K}}$).

(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tout $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, l'application
$$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mapsto x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$$
est une fonction polynomiale sur $\mathbb{K}^n$. L'ensemble des polynômes sur $\mathbb{K}^n$ est engendré (en tant qu'espace vectoriel) par ces fonctions.

(3) Le déterminant, vue comme application $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \det(M)$ est une application polynomiale sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (il s'exprime comme combinaison linéaire de produits de formes linéaires coordonnées sur la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).

(4) Si E est une $\mathbb{K}$-algèbre de dimension finie, alors pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, toute forme linéaire φ sur E, l'application
$$\begin{array}{rccl} \tilde{P} : & E & \to & \mathbb{K} \\ & x & \mapsto & \varphi(P(x)) \end{array}$$
est polynomiale. Par exemple, les fonctions coordonnées de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto M^2$ dans la base canonique sont polynomiales.

(5) L'application
$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{K}_n[X] & \to & \mathbb{K} \\ & P & \mapsto & \prod_{k=0}^{n} P(k) \end{array}$$
est polynomiale.

ii

Si on se fixe une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E, et qu'on note $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ sa base duale, une fonction de E dans $\mathbb{K}$ est polynomiale si et seulement si c'est un polynôme en $e_1^*, \ldots, e_n^*$ (*i.e.* $e_1^*, \ldots, e_n^*$ engendre l'algèbre des fonctions polynomiales sur E).

Exemple (Continuité)

Le déterminant, vu comme application de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathbb{K}$, où E est de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, est une application polynomiale, donc continue. De même pour l'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$.

iii

Exercice (Continuité de l'inverse matriciel)

Montrer que l'application $i : M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \mapsto M^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est continue.

15

Exercice (Continuité du polynôme caractéristique)

Montrer que l'application $\chi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}_n[X]$, qui à une matrice associe son polynôme caractéristique est continue.

16

Continuité des applications bilinéaires en dimension infinie

Nous avons caractérisé la continuité des applications linéaires en dimension quelconque. En fait, il existe une caractérisation analogue pour les applications bilinéaires ne figurant pas au programme : soit E, F, G trois EVN, et $B : E \times F \to G$ une application bilinéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) B est continue sur $E \times F$ (pour la structure d'evn produit).

(2) Il existe $C \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall (x, y) \in E \times F,\ \|B(x, y)\| \leqslant C \|x\| \|y\|$$

Il est déconseillé d'utiliser cette caractérisation hors-programme. Pourtant, vous pouvez avoir à utiliser la continuité de certaines applications bilinéaires en dimension infinie, comme le produit $\varphi : (f, g) \in \mathcal{C}([0, 1])^2 \mapsto fg$ pour la norme infinie sur $\mathcal{C}([0, 1])$, ou pour le produit scalaire $\psi : (u, v) \in E^2 \mapsto (u|v)$, où E est préhilbertien de dimension infinie. 7.1

Pour la continuité de φ, on peut invoquer la proposition 5.g, et éventuellement la redémontrer en une ligne.

Pour la continuité de ψ, le plus simple est d'utiliser encore la caractérisation séquentielle, et d'imiter la preuve de convergence du produit de deux suites convergentes :

$$\begin{aligned}
|(x_n|y_n) - (a|b)| &= |(x_n|y_n) - (x_n|b) + (x_n|b) - (a|b)| \\
&= |(x_n|y_n - b) + (x_n - a|b)| \\
&\leqslant |(x_n|y_n - b)| + |(x_n - a|b)| \\
&\leqslant \|x_n\| \|y_n - b\| + \|x_n - a\| \|b\|
\end{aligned}$$

7.3. Séries à valeurs dans un evn

E est ici de dimension finie.

Nous avons déjà fait l'essentiel du cours sur les séries, en nous limitant aux séries numériques. Beaucoup de ce qu'on a fait alors se généralise sans difficulté au cas de séries à valeurs dans un evn de dimension finie. Voici les notions au programme.

Sommes partielles. Convergence, divergence. La série de terme général u_n est notée $\sum u_n$.
Somme (notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$) et restes d'une série convergente.
Linéarité de la somme.
Le terme général d'une série convergente tend vers 0. Divergence grossière.
Lien suite-série. La suite (u_n) et la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ ont même nature.

Définition (Série absolument convergente dans un evn)

La série $\sum u_n$ d'éléments de E est dite *absolument convergente* si la série numérique $\sum \|u_n\|$ est convergente. 7.d

Théorème (Série absolument convergente dans un evn)

Toute série absolument convergente d'éléments de E est convergente. 7.c

Démonstration

Comme toutes les normes sont équivalentes en dimension finie, il suffit de le vérifier pour une norme donnée. On fixe une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ de E, et on considère la norme infinie pour cette base. Si $x = \sum \lambda_i e_i$ (où les λ_i sont des scalaires),

$$\|x\|_{\infty,\mathcal{B}} = \max\{|\lambda_i|, i \in [\![1, p]\!]\}$$

Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente dans E pour cette norme : cela signifie que $\sum \|u_n\|_{\infty,\mathcal{B}}$ est convergente. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, écrivons

$$u_n = \sum_{i=1}^{p} \lambda_{n,i} e_i$$

Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leqslant |\lambda_{n,i}| \leqslant \|u_n\|_{\infty,\mathcal{B}}$. Sachant que $\sum \|u_n\|_{\infty,\mathcal{B}}$ converge, on en déduit que $\sum_n \lambda_{n,i}$ converge absolument, puis converge (le cas des séries numériques a déjà été traité), et ce pour tout $i \in [\![1, p]\!]$. Ainsi, la série $\sum u_n$ est convergente.

$\square$

Exemple (Séries matricielles)

Pour tout $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, la série $\sum \frac{A^n}{n!}$ est convergente, car absolument convergente pour une norme d'algèbre.
La somme de cette série est appelée *exponentielle* de la matrice A.

iv

En revanche, beaucoup de compléments sur les séries numériques n'ont plus de sens dans un evn abstrait, comme la règle de d'Alembert, le critère spécial des séries alternées, la comparaison série-intégrale, etc.

On peut tenter de se ramener à des séries numériques

(1) En travaillant sur les coordonnées.

(2) En travaillant sur les normes (*i.e.* en travaillant avec l'absolue convergence).

8. Compacité

8.1. Parties compactes d'un espace normé

Définition (Partie compacte)

Soit A une partie de E. On dit que A est *compact*, ou que A vérifie la *propriété de Bolzano-Weierstrass*, si toute suite d'éléments de A admet une valeur d'adhérence dans A.

8.a

Caractère intrinsèque de la compacité

Soit A une partie d'un evn E. Hormis cette précision, la définition de la compacité de A ne fait référence qu'à des propriétés de A, pas à des propriétés de A *vue comme partie de* E : autrement dit, le fait que A soit compacte ne dépend que de la topologie induite sur A par celle de E.
Ainsi, si A est incluse dans un sous-espace vectoriel F de E, alors elle est compacte comme partie de F si et seulement si elle l'est comme partie de E : on dit que la compacité est une propriété *intrinsèque*.
En revanche, le fait d'être fermé (ou d'être ouvert) n'est pas une propriété intrinsèque :

8.1

Exemple (Compacts)

(1) Toute boule fermée dans $\mathbb{K}$ est compacte.

(2) Les intervalles compacts non vides de $\mathbb{R}$ sont les segments.

i

L'union d'un nombre fini de compacts est compacte. En revanche, l'union d'un nombre infini de compacts n'est pas toujours compacte.

Proposition (Une partie compacte est fermée et bornée)

Une partie compacte est fermée et bornée.

8.a

Démonstration

Pour montrer qu'une partie compacte est fermée, on pourra utiliser la caractérisation séquentielle des fermés.

Pour montrer qu'une partie compacte est bornée, on pourra, étant donné une partie non bornée, construire une suite d'éléments de cette partie sans valeur d'adhérence.

□

La réciproque est fausse (ne cherchez pas un exemple en dimension finie, voir plus loin). Un théorème hors-programme (le théorème de Riesz) affirme que la boule unité fermée d'un evn E de dimension infinie n'est jamais compacte.

Ainsi, tout compact non vide de $\mathbb{R}$ admet un plus grand et un plus petit élément.

Proposition (Partie fermée d'un compact)

Une partie fermée B de E incluse dans un compact A de E est compacte.

8.b

Démonstration

$\square$

En conséquence, l'intersection d'un fermé et d'un compact est un compact (autrement dit : tout fermé relatif d'un compact est compact).

Théorème (Caractérisation de la convergence dans un compact)

Une suite d'éléments d'une partie compacte converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.

8.c

Démonstration

Bien sûr, toute suite convergente admet une unique valeur d'adhérence, à savoir sa limite.

Montrons qu'une suite divergente (u_n) d'une partie compacte C admet plusieurs valeurs d'adhérence. Elle en admet déjà une, mettons l, et on sait que (u_n) ne converge pas vers l :

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geqslant N, \|u_n - l\| > \varepsilon$$

Pour un tel ε, l'ensemble $\Omega \overset{def}{=} \{n \in \mathbb{N}, \|u_n - l\| > \varepsilon\}$ est infini : il lui correspond une extractrice φ. La suite $(u_{\varphi(n)})$ admet une valeur d'adhérence l', qui est aussi valeur d'adhérence de (u_n), et qui ne peut pas être égale à l, car $\|l' - l\| \geqslant \varepsilon$ en passant à la limite dans la relation

$$\left\|u_{\varphi(n)} - l\right\| > \varepsilon,$$

valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\square$

C'est un résultat fin assez peu utilisé aux concours.

Proposition (Produit d'une famille finie de compacts)

Le produit d'une famille finie de compacts est un compact (pour la topologie induite par la structure d'evn produit).

8.d

Démonstration

Une démarche par récurrence sur le nombre de compacts se résume vite au cas de deux compacts A et B. Soit $((u_n, v_n))$ une suite d'éléments de $A \times B$.
Comme A est compact, il existe une extractrice φ telle que $(u_{\varphi(n)})$ converge dans A.
Comme B est compact, il existe une extractrice ψ telle que $(v_{\varphi(\psi(n))})$ converge dans B. Ainsi, la suite extraite $((u_{\varphi(\psi(n))}, v_{\varphi(\psi(n))})$ de $((u_n, v_n))$ converge dans $A \times B$, d'où le résultat.

□

Exemple (Produit d'un nombre fini de compacts) ii

Dans $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$, la boule fermée centrée en 0 de rayon $R \geqslant 0$ est compacte, car c'est le produit de n exemplaires du compact $\{z \in \mathbb{K}, |z| \leqslant R\}$ de $\mathbb{K}$.

8.2. Applications continues sur une partie compacte

Théorème (Image d'une partie compacte par une application continue) 8.e

Soit A un compact de E, et $f : A \to F$ une application continue. L'ensemble $f(A)$ est alors un compact de F.

Démonstration

Soit (v_n) une suite d'éléments de $f(A)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $u_n \in A$ tel que $f(u_n) = v_n$. Comme A est compact, on peut extraire de (u_n) une suite convergente $(u_{\varphi(n)})$, vers un certain $a \in A$. Comme f est continue, elle est continue en a, et la suite $(f(u_{\varphi(n)})$ converge donc vers $f(a) \in f(A)$, d'où la compacité de $f(A)$.

□

Exercice (Distance entre deux compacts) 17

Faire l'exercice 42 de TD.

Corollaire ((théorème des bornes atteintes)) 8.f

Si $f : A \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur un compact non vide A de E, alors f est bornée et atteint ses bornes.

Démonstration

□

Attention cependant, rien ne dit que $f(A)$ soit un segment (un compact non vide de $\mathbb{R}$ n'est pas toujours un segment).

Exemple (Théorème des bornes atteintes)

Par exemple, lorsque A est un compact non vide de E, pour tout $x \in E$, il existe $a \in A$ tel que $d(x, A) = d(x, a)$ (car $a \in A \mapsto d(x, a) \in \mathbb{R}$ est continue). iii

Exercice (Point fixe et compacité)

Faire l'exercice 39 de TD. 18

Exercice (Injection continue ayant pour source un compact)

Soit K un compact de E, et $f : K \to F$ une application continue et injective. Montrer que la corestriction g de f à son image est un homéomorphisme. 19

Théorème de Heine

Toute fonction continue sur un compact y est uniformément continue. 8.g

Démonstration

Considérons une fonction $f : A \to F$ non uniformément continue sur un compact A :

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall \eta \in \mathbb{R}_+^*, \exists (a, b) \in A^2, \|a - b\| \leqslant \eta \wedge \|f(a) - f(b)\| > \varepsilon$$

Pour un tel ε, on considère une suite (η_n) qui converge vers 0, pour laquelle il existe des suites (a_n) et (b_n) d'éléments de A telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|a_n - b_n\| \leqslant \eta_n \wedge \|f(a_n) - f(b_n)\| > \varepsilon$$

De (a_n), on peut extraire une suite convergente $(a_{\varphi(n)})$, vers un certain $\alpha \in A$. Puisque $(b_n - a_n)$ tend vers 0, (b_n) tend aussi vers α. Cependant, si f était continue en α, alors on obtiendrait l'absurdité

$$0 \geqslant \varepsilon$$

en passant à la limite dans la relation

$$\|f(a_n) - f(b_n)\| > \varepsilon,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'où le résultat par contraposition.

□

Exercice (Continuité uniforme sur un intervalle borné non fermé)

Soit $f : [0,1[\to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1 On suppose que f admet une limite finie en 1. Montrer que f est uniformément continue.

2 On suppose réciproquement f uniformément continue.

i Montrer que f est bornée.

ii En déduire qu'il existe une suite (x_n) de points de $[0,1[$, convergeant vers 1, telle que $(f(x_n))$ converge vers un certain $b \in \mathbb{R}$.

iii En utilisant la caractérisation séquentielle de l'uniforme continuité (et celle de la limite) en déduire que f est prolongeable par continuité en 1.

20

8.3. Compacité en dimension finie

On suppose dans toute cette sous-section que E est de dimension finie.
Nous pouvons désormais montrer qu'en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes :

Démonstration

Traitons d'abord le cas où $E = \mathbb{K}^n$.
Pour toute norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{K}^n$, on peut trouver $a > 0$ tel que

$$\forall x \in E, \|x\| \leqslant a \|\cdot\|_\infty$$

ce qui montre que l'application $\|\cdot\|$ est lipschitzienne, donc continue pour $\|\cdot\|_\infty$.
Or la sphère unité de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est compacte.
Considérons à présent la fonction $\|\cdot\|_E$ sur la sphère unité de $(E, \|\cdot\|)$. D'après le théorème des bornes atteintes, il existe des réels strictement positifs α et β tels que

$$\forall x \in E, \|x\|_\infty = 1 \Rightarrow \alpha \leqslant \|x\| \leqslant \beta$$

puis

$$\forall x \in E, \alpha \|x\|_\infty \leqslant \|x\| \leqslant \beta \|x\|_\infty$$

$\|\cdot\|$ est donc équivalente à $\|\cdot\|_\infty$.
Pour le cas général, il suffit d'utiliser un isomorphisme φ entre E et $\mathbb{K}^n$ si $n = \dim(E)$.

$\square$

Théorème (Caractérisation des compacts en dimension finie)

A, partie de E (de dimension finie) est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.

8.h

Démonstration

Le sens direct est connu. Supposons A fermée et bornée.
Nous avons traité le cas où $E = \mathbb{K}^n$, et où E est normé par $\|\cdot\|_\infty$.
En introduisant un isomorphisme entre E et $\mathbb{K}^n$ (et donc un homéomorphisme), traiter le cas général :

□

Exemple (Compacité en dimension finie) iv

$\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact.

Exercice (Distance à un fermé en dimension finie) 21

Soit B une partie fermée d'un evn E de dimension finie. Montrer que pour tout $a \in E$, la distance de a à B est atteinte, *i.e.* il existe $b \in B$ tel que

$$d(a, B) = d(a, b)$$

Théorème (Caractérisation de la convergence en dimension finie) 8.i

Une suite bornée de E (de dimension finie) converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.

Démonstration

□

Proposition (Un sous-espace de dimension finie est fermé) 8.j

Soit E un evn, et F un sous-espace vectoriel de E, de dimension finie. Le sous-espace F est alors fermé dans E.

Démonstration

Montrons ceci séquentiellement : soit (u_n) une suite de points de F, convergeant vers un point a de E. La suite (u_n) est convergente, donc bornée. L'image de (u_n) est une partie bornée de F : soit B une boule fermée de F qui la contient. B est une partie compacte (car F est de dimension finie), donc (u_n) a au moins une valeur d'adhérence dans B, et donc dans F. Cette valeur d'adhérence ne pouvant être que a, on a $a \in F$. Ainsi, F est fermé.

□

9. Connexité par arcs

Définition (Chemin)

Soit $a, a' \in A$. On appelle *chemin (continu)* dans A joignant a à a' toute fonction continue f de $[0, 1]$ dans A telle que $f(0) = a$ et $f(1) = a'$. L'image de f est alors appelée *arc* associé à f, $f(0)$ est l'origine de cet arc, et $f(1)$ en est son extrémité. Lorsqu'il existe un tel chemin, on dit que l'on peut joindre a à a' par un chemin (continu) dans A.

9.a

Cela définit une relation d'équivalence sur A.

Définition (Composantes connexes par arcs)

Dans ce contexte, les classes d'équivalence sont appelées les *composantes connexes par arcs* de A.

9.b

Illustration

Définition (Partie connexe par arc)

On dit que A est *connexe par arcs* si A n'a qu'une composante connexe par arcs.

9.c

Dans des cas simples, une figure convaincante vaut preuve de connexité par arcs : par exemple, tout segment, tout cercle est connexe par arcs, ou encore $\mathbb{R}^2$ privé d'un nombre fini de points est connexe par arcs.

Illustration

Exemple (Parties connexes par arcs)

Toute partie convexe de E est connexe par arcs.
Plus généralement, s'il existe $a \in A$ tel que pour tout $b \in A$, on ait $[a, b] \subset A$ (on dit alors que A est une partie *étoilée* de E), alors A est connexe par arcs.

i

Illustration

Proposition (Connexes de la droite numérique)

Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

9.a

Démonstration

□

Exercice (Connexité par arcs des groupes linéaires complexes)

Le but de cet exercice est de montrer la connexité par arcs de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Nous allons constuire un chemin continu $\gamma : [0,1] \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ de I_n à A.
Pour cela, on considère la fonction $\varphi : \lambda \in \mathbb{C} \mapsto \lambda A + (1-\lambda) I_n$, qui vérifie $\varphi(0) = I_n$ et $\varphi(1) = A$.

1 Montrer que $\det \circ \varphi$ est une fonction polynomiale non identiquement nulle.

2 En déduire que $Z \overset{def}{=} \{\lambda \in \mathbb{C}, \varphi(\lambda) \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\}$ est fini.

3 Conclure en utilisant la connexité par arcs de $\mathbb{C} \setminus Z$.

22

Proposition (Image continue d'une partie connexe par arcs)

Soit $f : A \to F$ une fonction continue, où A est une partie connexe par arcs de E. L'image $f(A)$ de f est alors connexe par arcs.

9.b

Démonstration

□

Exemple (Cas particulier des applications à valeurs réelles)

Lorsque $F = \mathbb{R}$, on obtient une nouvelle extension du théorème des valeurs intermédiaires : l'image continue d'un connexe par arcs est un intervalle.

ii

Exemple (Non connexité par arcs des groupes linéaires réels)

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.

iii

Exercice (Pas d'homéorphisme grâce à la connexité par arcs)

Montrer qu'il n'existe pas de bijection continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
Indication : utiliser la connexité par arcs de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

23

Exercice (Applications de la connexité par arcs)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I (d'intérieur non vide).

1 On introduit $\Omega = \{(x, y) \in I^2, x < y\}$. Vérifier que Ω est connexe par arcs.

2 On suppose f continue. Montrer que l'ensemble $\mathcal{T}$ des taux d'accroissements de f est un intervalle.

3 En déduire que si on suppose f continue et injective, alors f est strictement monotone. 24

4

i En déduire que si on suppose f dérivable, alors $f'(I)$ est un intervalle (c'est le *théorème de Darboux*).

ii Donner un exemple de fonction f dérivable mais non de classe $\mathcal{C}^1$.

10. Feuille de TD 5 : Espaces vectoriels normés

10.1. Norme, comparaison des normes

Exercice 1 (Norme sur un espace de fonctions) 0

Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, $g \in E$. On pose $N(f) = \sup_{x\in[0,1]}\{|f(x)g(x)\}$, pour tout $f \in E$.
1 Donner une condition nécessaire et suffisante sur g pour que N soit une norme sur E.
2 Si, pour tout $x \in [0,1]$, $g(x) \neq 0$, montrer qu'alors N et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes équivalentes. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 2 (Norme sur $\mathbb{R}^n$ définie par des fonctions) 0

Soit $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que

$$N \ : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \|x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n\|_\infty$$

soit une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 3 (Comparaison de normes sur les polynômes) 0

On pose, pour $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$N_1(P) = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{P^{(n)}(0)}{n!} \right| \qquad \text{et} \qquad N_2(P) = \sum_{n=0}^{\infty} |P^{(n)}(0)|.$$

1 Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.
2 Ces normes sont-elles équivalentes ?

Exercice 4 (Somme de distances à des sous-espaces) 0

Soit (E, N) un evn de dimension finie, d la distance associée à N. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E d'intersection triviale.
Montrer l'existence de réels strictement positifs α et β tels que, pour tout vecteur x de E :

$$\alpha\, N(x) \leqslant \sum_{i=1}^{p} d(x, F_i) \leqslant \beta\, N(x).$$

Remarque : selon l'état d'avancement du cours, on pourra admettre que chaque F_i est fermé, ou même que pour tout $x \in E$, il existe $f_i \in F_i$ tel que $d(x, F_i) = d(x, f_i)$.

Exercice 5 (Comparaison de normes, toujours) 1

Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R}), f(0) = 0\}$, $N(f) = N_\infty(3f + f')$. Montrer que (E, N) est un EVN et qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $N_\infty(f) \leqslant \alpha N(f)$.
Indication : en posant $g = 3f + f'$, on pourra exprimer f en fonction de g.

Exercice 6 (Équivalence de normes sur des espaces de fonctions) 1

Soit E l'ensemble des fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$, telles que $f(0) = f'(0) = 0$. Pour $f \in E$, on pose $N_\infty(f) = \sup_{[0,1]} |f|$, $N(f) = \sup_{[0,1]} |f + f''|$ et $N_1(f) = \sup_{[0,1]} |f| + \sup_{[0,1]} |f''|$.

1 Montrer que N_∞, N et N_1 sont des normes sur E.

2 Montrer que N_∞ n'est équivalente ni à N_1, ni à N.

3 Montrer que N et N_1 sont équivalentes.

Exercice 7 (Comparaison de normes) 1

Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R}), f(0) = f'(0) = 0\}$. Si $f \in E$, on pose $N(f) = \|f + 2f' + f''\|_\infty$.

1 Montrer que N est une norme.

2 Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que : $\forall\, f \in E, \|f\|_\infty \leqslant cN(f)$.

Exercice 8 (Norme matricielle invariante par conjugaison) 1

Soit $n \geqslant 2$. Existe-t-il une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ invariante par conjugaison (*i.e.* telle que deux matrices semblables quelconques aient même norme) ?

Indication : on pourra chercher une matrice non nulle semblable à son double.

Exercice 9 (D'autres équivalences de normes) 3

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $p, q\ : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux applications continues à valeurs positives ou nulles, ne s'annulant chacune qu'en au plus un nombre fini de points. Soit $E = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{C})$.

Soit

$$\begin{array}{rccl} \varphi_p : & E \times E & \to & \mathbb{C} \\ & (f,g) & \mapsto & \int_{[a,b]} \bar{f} g p \end{array},$$

et

$$\begin{array}{rccl} N_p : & E & \to & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & \varphi_p(f,f)^{1/2} \end{array}.$$

De même pour φ_q et N_q.

1 Montrer que N_p et N_q sont des normes.

2 Montrer que N_p et N_q sont équivalentes si et seulement si il existe des réels strictement positifs m et M tels que, pour tout point t de $[a,b]$, on ait

$$m\, p(t) \leqslant q(t) \leqslant M\, p(t).$$

Exercice 10 (Norme d'algèbre) 3

1 Déterminer sur $\mathbb{R}[X]$ une norme N telle que

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \quad N(PQ) \leqslant N(P)N(Q).$$

2 Soit A une $\mathbb{R}$-algèbre de dimension finie. Déterminer une norme N sur A telle que :

$$\forall (a,b) \in A^2, \quad N(ab) \leqslant N(a)N(b).$$

3 Peut-on déterminer une telle norme si A est une algèbre de dimension infinie ?

Exercice 11 (Pseudo-normes multiplicatives) 3

Soit $N : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}_+$, où $n \geqslant 2$, vérifiant $N(AB) = N(BA)$.
1 Montrer que N ne peut pas être une norme.
2 On suppose en outre que $N(A+B) \leqslant N(A) + N(B)$ et $N(\lambda A) = |\lambda| N(A)$.
i Montrer que $|\operatorname{tr}|$ convient.
ii Montrer que si $N(B) = 0$, alors $N(A+B) = N(A)$.
iii Trouver toutes les applications possibles.

Exercice 12 (Comparaison des normes infinie et euclidienne (Centrale PSI 10)) 4

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. Si $f \in E$, on note $\|f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f|$ et $\|f\|_2 = \left(\int_0^1 f^2\right)^{1/2}$.
1 Montrer qu'il existe $b \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall f \in E, \|f\|_2 \leqslant b \|f\|_\infty$.
2 Soit V un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall f \in V, \|f\|_\infty \leqslant c \|f\|_2$.
3 Soit V un sous-espace vectoriel de E. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall f \in V, \|f\|_\infty \leqslant n \|f\|_2$. Montrer que V est de dimension finie et que $\dim V \leqslant n^2$.

10.2. Topologie

Exercice 13 (Centre d'une boule) 0

Montrer que si $E \neq \{0_E\}$, une boule non vide admet un unique centre et un unique rayon.

Exercice 14 (Sous-espace engendré par une partie d'intérieur non vide) 0

Soit Ω une partie de E d'intérieur non vide. Montrer que $\operatorname{Vect}(\Omega) = E$. Qu'en déduire sur l'intérieur d'un sous-espace vectoriel strict de E ?

Exercice 15 (Sous-espace ouvert) 0

Que dire d'un sous-espace vectoriel ouvert F d'un EVN E ?

Exercice 16 (Boule ne contenant que des éléments inversibles) 1

Soit E une $\mathbb{K}$-algèbre normée de dimension finie. Montrer que tous les éléments de la boule ouverte de centre 1_E et de rayon 1 sont inversibles.
Indication : on pourra penser à la formule de Bernoulli, ou au développement limité en 0 de $(1-u)^{-1}$.

Exercice 17 (Topologie des hyperplans) 1

Montrer qu'un hyperplan est soit fermé, soit dense.

Exercice 18 (Densité des diagonalisables, ou pas) 1

1 Montrer que l'ensemble $D_n(\mathbb{C})$ des matrices diagonalisables de taille n est dense lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
2 Montrer que $D_2(\mathbb{R})$ n'est pas dense dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 19 (Matrices dont la classe de similitude est bornée) 1

Décrire les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont la classe de similitude est bornée.

Exercice 20 (Caractérisation topologique de la diagonalisabilité d'une matrice complexe) 1

Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable si et seulement si sa classe de similitude est fermée.

Exercice 21 (Caractérisation topologique de la nilpotence d'une matrice complexe) 1

Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente si et seulement si 0_n appartient à l'adhérence de sa classe de similitude.

Exercice 22 (Séparation de fermés disjoints) 2

Soit F, G deux fermés disjoints. Montrer qu'il existe des ouverts disjoints U et V contenant respectivement F et G.

Exercice 23 (Les fermés à partir d'ouverts) 2

Montrer que tout fermé est une intersection d'une suite décroissante d'ouverts.

Exercice 24 (Hyperplan fermé ou dense selon la norme choisie) 2

Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, et

$$F = \{f \in E, f(0) = f(1)\}$$

1 Vérifier que F est un hyperplan de E.
2 Que dire de $\mathring{F}$?
3 Trouver une norme sur E pour laquelle F est fermé.
4 Trouver une norme sur E pour laquelle F est dense dans E.

Exercice 25 (Adhérence des matrices de rang donné) 2

Soit $r \in [\![0, \min\{n,p\}]\!]$. On note $M_r(n,p)$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r. Déterminer l'adhérence de $M_r(n,p)$.

Exercice 26 (Ouvert étoilé) — 3

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn. Soit U un ouvert étoilé, V l'ensemble des points x de U tel que U soit étoilé par rapport à x.

1 Montrer que V est convexe.

2 Montrer que V n'est pas nécessairement ouvert ou fermé dans E.

3 Montrer que V est fermé dans U.

Exercice 27 (Un opérateur sur les espaces de fonctions) — 3

On munit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$. Soit T l'application qui à $f \in E$ associe $T(f)\ : x \mapsto f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)$.

1 Montrer que T est un endomorphisme continu de E. Déterminer sa *norme subordonnée*, *i.e.* $\sup\{\|T(x)\|, x \in \mathcal{S}(0,1)\}$.

2 Soit $f \in E$ non nulle telle que $f(0) = 0$. Montrer qu'il existe $x_0 \in]0,1]$ tel que : $\forall\, x \in [0, x_0[, |f(x)| < |f(x_0)| = \|f\|_\infty$. En déduire que l'espace propre de T associé à la valeur propre 2 est de dimension 1.

Exercice 28 (Description topologique d'un ensemble de points fixes) — 3

1 Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],[0,1])$. Montrer que l'ensemble des points fixes de f est un fermé non vide.

2 Soit F un fermé non vide de $[0,1]$. Montrer que F est l'ensemble des points fixes d'une fonction continue de $[0,1]$ dans lui-même.

Exercice 29 (Un fermé dans $\mathbb{R}_n[X]$) — 3

1 Soit $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. Montrer que si λ est racine de P, alors

$$|\lambda| \leqslant \max\{1, \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\}.$$

2 Montrer que l'ensemble des polynômes réels unitaires de degré n scindés sur $\mathbb{R}$ est fermé.

Exercice 30 (Boule fermée contenant une partie bornée donnée) — 4

Soit A une partie bornée non vide de $\mathbb{R}^n$ euclidien canonique.

1 Montrer qu'il existe un plus petit r tel que A soit inclus dans une boule fermée de rayon r.

2 Montrer que cette boule est unique.

3 On suppose ici $n = 2$, et on pose $M = \sup\{\|a - b\|, (a,b) \in A^2\}$. Montrer que $r\sqrt{3} \leqslant M$.

Exercice 31 (Distance à une partie atteint en un unique point) — 4

Soit F une partie non vide de $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $f \in F$ tel que $d(x, F) = d(x, f)$. Que dire de F ?

10.3. Continuité, uniforme continuité, fonctions lipschitziennes

Exercice 32 (Forme linéaire préservant la positivité) 2

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, muni de $\|\cdot\|_\infty$. Soit L une forme linéaire sur E telle que si $f \geqslant 0$, alors $L(f) \geqslant 0$. Montrer que L est continue.

Exercice 33 (Caractérisation de la continuité d'une forme linéaire) 2 et 4

Montrer qu'une forme linéaire φ est continue si et seulement si son noyau est fermé.

Exercice 34 (Prolongement lipschitzien d'une fonction lipschitzienne) 3

On considère une partie non vide A d'un espace vectoriel normé E et une application k-lipschitzienne $f : A \to \mathbb{R}$, avec $k > 0$. Montrer que

$$g : x \mapsto \inf_{y \in A} (f(y) + k\,\|x - y\|)$$

définit une application k-lipschitzienne sur E, qui constitue un prolongement de f.

Exercice 35 (Une fonction lipschitzienne) 3

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn, $f : x \mapsto \frac{x}{1+\|x\|}$.
1 Montrer que f est 1-lipschitzienne.
2 Montrer que pour tout $(x,y) \in E^2$:

$$(\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|) \Leftrightarrow (x = y).$$

Exercice 36 (Application continue pour une norme, pas pour une autre) 4

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, où $a < b$, et soit $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.
Montrer que $\varphi : f \mapsto \int_{[a,b]} f^2$ est continue pour $\|\cdot\|_\infty$, mais pas pour $\|\cdot\|_1$.

Exercice 37 (Condition suffisante de linéarité et continuité) 4

Soit E et F deux evns réels, $f : E \to F$ une application telle que pour tous $x, y \in E$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$, et il existe une boule fermée de rayon non nul dans E, d'image bornée dans F par f. Montrer que f est linéaire continue.

10.4. Compacité

Exercice 38 (Sommes de parties) 1

Soit A et B deux parties non vides de E. On note

$$A + B \stackrel{def}{=} \{a + b, (a, b) \in A \times B\}$$

1 Que dire de $A + B$ si A est ouvert ?
2 Montrer que si A est fermé et B compact, alors $A + B$ est fermé.
3 Donner un exemple de deux fermés dont la somme n'est pas fermée.

Exercice 39 (Point fixe et compacité (Centrale PSI 10)) 1

1 Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], [a, b])$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = c$.
2 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie, $K \subset E$ un compact non vide de $f : K \to K$ telle que :

$$\forall (x, y) \in K^2, \quad x \neq y \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$

Montrer qu'il existe un unique $c \in K$ tel que $f(c) = c$.

Exercice 40 (Le rang est localement croissant) 2

Montrer que pour l'application rang r, pour tout point A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il existe un voisinage V de A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que

$$\forall B \in V, \quad r(A) \leqslant r(B).$$

Exercice 41 (Fonction anti-stable (Centrale PSI 10)) 3

Soit A une partie bornée et non vide de $\mathbb{R}$. Montrer qu'il n'existe pas de $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f(A) \subset \mathbb{R} \setminus A$ et $f(\mathbb{R} \setminus A) \subset A$.

Exercice 42 (Distance entre deux compacts) 3

Soit A et B des compacts non vides de $\mathbb{R}^n$. Montrer l'existence de $(a, b) \in A \times B$ tel que $\|a - b\| = d(A, B)$. Cela reste-t-il vrai si A compact et B fermé ? A et B fermés ?

Exercice 43 (Parties réversibles) 4

Une partie A de $\mathbb{R}$ est dite *réversible* s'il existe une application continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(A) \subset \mathbb{R} \setminus A$ et $f(\mathbb{R} \setminus A) \subset A$.
1 Donner un exemple de partie réversible.
2 $\mathbb{Q}$ est-il réversible ?
3 Une partie réversible peut-elle être ouverte ? fermée ?
4 Une partie réversible peut-elle être un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$?
5 Une partie réversible peut-elle être bornée ? minorée ?

Exercice 44 (Théorème de Carathéodory (X MP 10)) 4

Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et X une partie de $\mathbb{R}^d$.

1 Montrer que tout point de l'enveloppe convexe de X est barycentre d'un système de $d+1$ points de X affectés de coefficients positifs.

2 Si X est compacte, montrer que son enveloppe convexe est compacte.

10.5. Connexité par arcs

Exercice 45 (Opérations ensemblistes et connexité par arcs) 0

1 Montrer qu'une union de connexes par arcs ne l'est pas toujours.

2 Montrer qu'une intersection de connexes par arcs ne l'est pas toujours.

3 Montrer qu'une union de connexes par arcs possédant un point commun est connexe par arcs.

Exercice 46 (Opérations topologiques et connexité par arcs) 2

Soit A une partie d'un evn E de dimension finie.

1 $\mathring{A}$ est-elle nécessairement connexe par arcs ?

2 $\overline{A}$ est-elle nécessairement connexe par arcs ?

Exercice 47 (Connexité par arcs de la sphère unité (ou pas)) 2

Soit $\mathcal{S}$ la sphère unité d'un evn E. $\mathcal{S}$ est-elle connexe par arcs ?

Exercice 48 (Le cercle unité n'est pas homéomorphe à un segment (X PC 10)) 2

Soit $S^1 = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$. Existe-t-il $f\ : [0,1] \to S^1$ continue et bijective ?

Exercice 49 (Connexité par arcs (ou pas) du complémentaire d'un hyperplan) 4

Soit φ une forme linéaire non nulle sur E, de noyau H. Montrer que $E \setminus H$ est connexe par arcs si et seulement si φ n'est pas continue.

11. Oraux

Exercice 50 (Sous-espace d'intérieur non vide) 0

(TPE) Soit (E, N) un espace normé. Montrer que le seul sous-espace de E d'intérieur non vide est E.

Exercice 51 (Caractérisation topologique de la nilpotence (Mines MP 10)) 1

1 Montrer que l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2 Montrer que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors 0 est adhérent à la classe de similitude de M si et seulement si M est nilpotente.

Exercice 52 (Existence de l'exponentielle matricielle complexe avec $\|\cdot\|_\infty$) 2

(CCP) On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de la norme N définie par : $N\left((a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\right) = \max\{|a_{i,j}|,\ 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$. Vérifier que si A et B sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors $N(AB) \leqslant nN(A)N(B)$. En déduire la convergence de $\sum \frac{A^k}{k!}$.

Exercice 53 (En dimension finie, convergences simple et uniforme sont équivalentes) 2

(ENS MP 10) Soit $d \in \mathbb{N}$. On pose $V = \mathbb{R}_d[X]$ et on considère une suite (P_n) d'éléments de V. Établir l'équivalence des conditions suivantes.
1 (P_n) converge dans V.
2 (P_n) converge simplement sur $[0, 1]$.
3 (P_n) converge uniformément sur $[0, 1]$.

Exercice 54 (Comparaison de deux normes sur un espace de fonctions continues) 2

Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. Si $f \in E$, on pose : $N(f) = \int_0^1 e^t\,|f(t)|\mathrm{d}t$.
1 Montrer que N définit une norme. Comparer N et $\|\ \|_\infty$.
2 Trouver le meilleur $\beta > 0$ tel que : $\forall f \in E,\ N(f) \leqslant \beta\|f\|_\infty$.

Exercice 55 (Idéaux maximaux de $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ (Centrale MP 06)) 2

On pose $\mathcal{A} = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.
1 Soit $f \in \mathcal{A}$ non constante. Montrer que la famille $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre.
2 Quelles sont les sous-algèbres de dimension finie de $\mathcal{A}$?
3 Pour $c \in [a, b]$, on note $\mathcal{I}_c$ l'ensemble des $f \in \mathcal{A}$ telles que $f(c) = 0$. Montrer que $\mathcal{I}_c$ est un idéal de $\mathcal{A}$.
On dit d'un idéal $\mathcal{I}$ de $\mathcal{A}$ qu'il est *maximal* si $\mathcal{I}$ est un élément maximal au sens de l'inclusion parmi les idéaux de $\mathcal{A}$ distincts de $\mathcal{A}$.
4 Montrer que les idéaux maximaux de $\mathcal{A}$ sont les $\mathcal{I}_c$, où c parcourt $[a, b]$.

Exercice 56 (Valeurs d'adhérence de (u_n) lorsque u_{n+1-n} tend vers 0 (X MP 10)) 2

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie et $u \in E^{\mathbb{N}}$.

1 On suppose que u est bornée, que $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0, que u n'a qu'un nombre fini de valeurs d'adhérence : montrer qu'alors u converge.

2 On suppose $E = \mathbb{R}$ et $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de u est un intervalle.

Exercice 57 (Une fonction polynomiale à une indéterminée est fermée (Mines MP 10)) 3

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ et F un fermé de $\mathbb{C}$. Montrer que $P(F)$ est un fermé de $\mathbb{C}$.

Exercice 58 (Inclusion d'une boule fermée dans une autre (Centrale MP 10)) 3

Soit E un espace normé, x et x' dans E, r et r' dans $\mathbb{R}_+$, B (resp. B') la boule fermée de centre x (resp. x') et de rayon r (resp. r'). Caractériser à l'aide de x, x', r, r' l'inclusion $B \subset B'$.

Exercice 59 (Partie convexe dense (X MP 10)) 4

Soit E un evn de dimension finie, C une partie de E convexe et dense dans E. Montrer que $C = E$.

Exercice 60 (Un cas particulier de Hahn-Banach (X MP 10)) 4

Soit A une partie convexe fermée de $\mathbb{R}^2$ ne contenant pas 0. Montrer qu'il existe une droite vectorielle disjointe de A.

Exercice 61 (Condition suffisante tordue pour être un disque (ENS MP 10)) 4

Soit K un compact non vide de $\mathbb{R}^2$. On suppose que le projeté orthogonal de l'origine sur n'importe quelle droite coupant K est dans K. Montrer que K est un disque.

Exercice 62 (Encore une version d'Hahn-Banach (ENS MP 10)) 4

Dans un espace vectoriel normé E de dimension finie, on considère deux parties convexes non vides A et B, respectivement fermée et compacte, telles que $A \cap B = \emptyset$. Montrer qu'il existe un réel α et une forme linéaire f sur E telle que

$$\forall (x, y) \in A \times B, \quad f(x) < \alpha < f(y).$$

Exercice 63 (Toute isométrie est affine (ENS MP 10)) 4

Soit E et F deux espaces vectoriels normés, et $f : E \to F$ une application bijective telle que $f(0) = 0$ et $\forall (x, y) \in E^2, \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$.

1 Montrer que f est linéaire si et seulement si $\forall (x, y) \in E^2, f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$.

2 Montrer que f est linéaire.

Exercice 64 (Endomorphismes conservant un compact dans $\mathbb{R}^n$) 4

Soit C un compact de $\mathbb{R}^n$ d'intérieur non vide. On note L l'ensemble des éléments f de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tels que $f(C) = C$.

1 Montrer que $L \subset \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$.

2 On suppose L infini. Montrer que l'on peut trouver une suite injective d'éléments de L qui converge vers I_n.

3 On suppose L infini et $n = 2$. Montrer l'existence de $f \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^2)$ tel que $f(C)$ soit invariant par toutes les rotations de centre 0.

Exercice 65 (Recouvrement d'un compact par des pavés (X MP 12)) 4

Soit $((a_i, b_i)) \in (]0, 1]^2)^{\mathbb{N}}$ tel que

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i b_i = +\infty$$

Montrer que tout compact peut être recouvert par des translatés des pavés $[0, a_i] \times [0, b_i]$.

Exercice 66 (Exemple de norme subordonnée) 5

On munit $E = \left\{f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}),\ f(1) = 0\right\}$ de la norme donnée par : $\|f\| = \sup\limits_{[0,1]} |f'|$. Soit $\Phi : f \in E \mapsto \int_0^1 f$. Montrer que Φ est continue et calculer $\|\Phi\|$.

CHAPITRE VI

Intégration sur un intervalle quelconque

Sommaire

On souhaite étendre la notion d'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment, en autorisant des intervalles de définition I quelconques (hormis le fait d'être non vides). Plutôt que d'essayer de reprendre la construction de MPSI telle quelle [1], nous allons utiliser un passage à la limite.

Informellement, en prenant l'exemple de $\mathbb{R}_+$: l'intervalle $[0, x]$ « tend vers » l'intervalle $\mathbb{R}_+$ lorsque x tend vers $+\infty$, donc nous allons définir $\int_{\mathbb{R}_+} f$ comme la limite, *si elle existe et est finie*, de $\int_{[0,x]} f$ lorsque x tend vers $+\infty$. Cela conduira à la notion d'*intégrale convergente*.

En fait, cette notion va s'avérer assez peu pratique, car elle se comportera mal avec les notions de comparaison : on peut par exemple trouver des fonctions continues par morceaux f et g sur $\mathbb{R}_+$ telles que $f = \mathrm{O}(g)$, $\int_{\mathbb{R}_+} g$ converge, mais pas $\int_{\mathbb{R}_+} f$. Cette situation est en revanche impossible si on impose en outre que g soit positive.

Comme dans le cas des séries, la bonne notion sera la convergence *absolue* de l'intégrale, *i.e.* la convergence de l'intégrale pour $|f|$. C'est donc cette notion qui conduira à l'*intégrabilité* d'une fonction.

Comme d'habitude, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, tous les intervalles considérés seront d'intérieur non vide, I sera un tel intervalle.

Sauf mention contraire, a est un réel, et b est un point de $\overline{\mathbb{R}}$ tel que $a < b$.

f désignera une fonction continue par morceaux sur son domaine, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

1. Intégration sur un segment (rappels de MPSI)

Je vous incite à reprendre votre cours de MPSI pour une construction de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment.

Notion de fonction en escalier sur un segment, intégrale d'une telle fonction. Propriétes de l'intégrale pour les fonctions en escalier.

1. Ce serait compliqué : il faudrait déjà définir l'intégrale d'une fonction en escalier sur un intervalle quelconque, puis vérifier que l'on peut approcher de manière satisfaisante les fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque par des fonctions en escalier.

Rappel (Fonction continue par morceaux sur un segment)

Définition, propriétés.

Illustration

Définition de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment.
Propriétés : linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire, relation de Chasles.

Rappel (Inégalités intégrales)

Rappel (Stricte croissance de l'intégrale pour les fonctions continues)

Valeur moyenne d'une fonction cpm sur un segment. Valeur moyenne d'une fonction périodique cpm (exemple de $\sin^2$ et $\cos^2$, qui ont même valeur moyenne puisque s'obtenant mutuellement par déphasage).

Rappel (Sommes de Riemann)

Notion de primitive.

Théorème fondamental de l'analyse

1.a

L'introduction des fonctions continues par morceaux était naturelle si on souhaitait définir l'intégrale d'une fonction sur un segment. Nous avons fait le lien, pour une fonction continue, avec la notion de primitive. En fait, on peut montrer que les seules fonctions continues par morceaux sur un segment admettant une primitive sont en fait les fonctions conitnues.

C'est pourquoi, dans les théorèmes dont la démonstration utilise la notion de primitive, vous ferez l'hypothèse que les fonctions considérées sont de classe $\mathcal{C}^1$.

2. Intégrale généralisée

Pour des raisons pratiques d'exposition, nous privilégions dans ce cours la notion d'intégrale généralisée (ou impropre) sur un intervalle de la forme $[a, b[$. On laisse au lecteur le soin d'adapter aux autres cas les résultats énoncés dans ce seul cas.

Définition (Nature d'une intégrale impropre)

Soit $f : [a, b[\to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux. L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ est dite *convergente* si la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$ a une limite finie en b. Si tel est le cas, on note $\displaystyle\int_a^b f$ (ou $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, ou encore $\int_{[a,b[} f$) cette limite. Sinon, cette intégrale est dite *divergente*.
La *nature* d'une intégrale impropre est sa convergence ou sa divergence (selon la situation).

2.a

Nature d'une intégrale impropre

(1) La convergence de $\displaystyle\int_{[a,b[} f$ (où f est continue par morceaux sur $[a, b[$) ne dépend que du comportement de f au voisinage de b. En particulier, pour tout $c \in]a, b[$, les intégrales $\int_a^b f$ et $\int_c^b f$ ont même nature, et, en cas de convergence, on a la *relation de Chasles* :

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

(2) Bien sûr, si b est finie et si f est en réalité continue par morceaux sur $[a, b]$, alors $\int_{[a,b[} f$ converge et a même valeur que $\int_{[a,b]} f$ (qui, elle, n'est pas impropre). La notation $\int_a^b f$, qui désignait chacune de ces intégrales, est donc cohérente.

(3) Ainsi, si f est continue par morceaux sur $[a, b[$, si b est fini et si f se prolonge en une fonction continue par morceaux sur le segment $[a, b]$, alors l'intégrale impropre $\int_{[a,b[} f$ converge. Cette intégrale est même dite alors *faussement impropre*, puisque sa convergence provient essentiellement de la théorie de l'intégration sur un segment.

2.1

On étend sans difficulté (par analogie) la notion d'intégrale impropre au cas d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle semi-ouvert du type $]a, b]$ -où $b \in \mathbb{R}$, et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$.

Exemple (Nature d'une intégrale impropre)

(1) Pour $f : t \mapsto e^{-t}$, $\int_{\mathbb{R}_+} f$ converge.

(2) $\int_{]0,1]} \ln$ converge, bien que $\ln$ tende vers $-\infty$ en 0.

(3) Pour $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{x}$, $\int_{]0,1]} f$ diverge, ainsi que $\int_{[1,+\infty[} f$. Ce dernier exemple illustre qu'une fonction (continue) peut tendre vers 0 en $+\infty$ sans que son intégrale sur un voisinage de $+\infty$ converge.

(4) Si $\int_{\mathbb{R}_+} f$ converge et si f admet une limite l en $+\infty$, alors $l = 0$.

(5) Il se peut que $\int_{\mathbb{R}_+} f$ converge sans que f tende vers 0 en $+\infty$.

(6) Pour $f : t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$, l'intégrale $\int_{]0,1]} f$ est faussement impropre.

i

Définition (Intégrale impropre sur un intervalle ouvert)

Soit $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, où $a < b$, et soit $f \ :]a, b[\to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux. Soit $c \in]a, b[$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f$ est *convergente* si les intégrales $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$ convergent. Si tel est le cas, on note $\int_a^b f$ (ou $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$, ou encore $\int_I f$) le scalaire

$$\int_a^b f \overset{def}{=} \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Sinon, cette intégrale est dite *divergente*.

2.b

Cette définition est bien indépendante du choix de c d'après la relation de Chasles ci-dessus (et sa version pour les intervalles de la forme $]\alpha, \beta]$).

Il faut bien étudier séparément les deux bornes. Par exemple, la limite de $\int_{-x}^{x} t\mathrm{d}t$ lorsque x tend vers $+\infty$ existe et vaut 0, mais $\int_{\mathbb{R}} t\mathrm{d}t$ est évidemment divergente.

Exemple (Intégrales de Riemann)

Soit $a \in \mathbb{R}$, et $f \ : t \mapsto \frac{1}{t^a}$.

(1) $\int_{[1,+\infty[} f$ converge si et seulement si $a > 1$, et, le cas échéant : $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^a} = \frac{1}{a-1}$.

(2) $\int_{]0,1]} f$ converge si et seulement si $a < 1$, et, le cas échéant : $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^a} = \frac{1}{1-a}$.

(3) $\int_{\mathbb{R}_+^*} f$ est toujours divergente.

Ces intégrales sont appelées *intégrales de Riemann*, et sont très souvent utilisées pour les études d'intégrabilité (voir plus loin).

ii

Proposition (Propriétés des intégrales impropres)

Notons Ω l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$, dont l'intégrale converge.

(1) Ω est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

(2) L'application

$$\begin{array}{cccc} \nabla : & \Omega & \to & \mathbb{K} \\ & f & \mapsto & \int_I f \end{array}$$

est linéaire (*linéarité de l'intégrale*).

(3) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ∇ est également positive (*i.e.* pour tout $f \in \Omega$ tel que $f \geqslant 0$, on a $\int_I f \geqslant 0$), et croissante. Sa restriction à $\Omega' \overset{def}{=} \Omega \cap \mathcal{C}([a, b[, \mathbb{R})$ est même strictement positive (au sens où si $f \in \Omega'$ et [a] $f > 0$, alors $\int_I f > 0$), et strictement croissante.

(4) Pour tout $f \in \Omega \cap \mathcal{C}([a, b[, \mathbb{K})$, l'application $G \ : x \mapsto \displaystyle\int_x^b f$ est dérivable sur $[a, b[$, de dérivée $-f$, et de limite nulle en b.

a. Rappelez vous que $f > 0$ signifie $f \geqslant 0$ et $f \neq 0$ dans ce cours.

2.a

Démonstration

$\square$

Il ne faudra pas oublier, lorsqu'on utilisera par exemple la linéarité de l'intégrale sur un intervalle quelconque I, de vérifier que les intégrales en jeu convergent effectivement : comme pour toute notion de limite, la convergence d'une intégrale ne va pas de soi.

Comme dans le cours de MPSI, on autorise aux bornes d'intégration d'être égales, ainsi que de ne pas être données dans l'ordre naturel. Si $\int_a^b f$ converge (où $a < b$), on posera par exemple $\int_b^a f \overset{def}{=} -\int_a^b f$ et on dira que cette intégrale converge (et sinon, on dira qu'elle diverge). La relation de Chasles reste valable avec ces notations étendues (pour peu que les intégrales engagées convergent).

Proposition (Caractérisation de la convergence dans le cas positif)

Si f est positive sur $[a, b[$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge si et seulement si $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$ est majorée.

2.b

Démonstration

$\square$

Proposition (Ordre et convergence dans le cas positif)

Soit f et g deux fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{R}$. On suppose que

$$0 \leqslant f \leqslant g$$

(1) Si $\int_I g$ converge, alors $\int_I f$ converge.

(2) Si $\int_I f$ diverge, alors $\int_I g$ diverge.

2.c

Démonstration

□

3. Intégrabilité d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle quelconque

Définition (Fonction intégrable)

Soit $f : [a, b[\to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux. On dit que f est *intégrable* sur $[a, b[$, ou encore que l'intégrale $\int_a^b f$ est *absolument convergente* si $\displaystyle\int_a^b |f|$ converge.

3.a

Évidemment, dans le cas d'une fonction positive (et plus généralement d'une fonction de signe constant), f est intégrable sur $[a, b[$ si et seulement si $\int_{[a,b[} f$ converge.

Exemple (Retour sur les intégrales de Riemann)

Pour α dans $\mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (resp. $]0, 1]$) si et seulement si $\alpha > 1$ (resp. $\alpha < 1$).

i

Comme dans le cas des séries, la convergence absolue d'une intégrale entraine sa convergence :

Proposition (Lien entre intégrabilité et intégrale convergente)

Si f est intégrable sur $[a, b[$, alors $\displaystyle\int_a^b f$ converge.

3.a

Démonstration

Traiter le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, puis celui où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

□

Exercice (Reformulation de l'intégrabilité)

Soit $f\ : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux.

1 Montrer que f est intégrable sur I si et seulement si $\{\int_J |f|, J$ segment inclus dans $I\}$ est majorée, et qu'alors $\int_I |f|$ est la borne supérieure de cet ensemble.

2 Soit $([x_n, y_n])$ une suite de segments inclus dans I, croissante pour l'inclusion, et telle que

$$I = \cup_{n\in\mathbb{N}}[x_n, y_n].$$

Montrer que f est intégrable sur I si et seulement si $\int_{[x_n,y_n]} |f|$ admet une limite finie lorsque n tend vers l'infini, et qu'alors

$$\int_I |f| = \lim_n \int_{[x_n,y_n]} |f|.$$

1

Proposition (Intégrabilité et relations de comparaison)

Pour f et g deux fonctions réelles continues par morceaux sur I :

– Si $I = [a, b[$ et $f(x) = O_{x\to b}(g(x))$, l'intégrabilité de g sur $[a, b[$ implique celle de f ;
– Si $I = [a, b[$ et $f(x) \sim_{x\to b} g(x)$, l'intégrabilité de g sur $[a, b[$ équivaut à celle de f.

3.b

Démonstration

□

Intégrabilité et relations de comparaison au programme

D'une manière générale, les résultats du cours sur les relations de comparaison permettent de prouver une intégrabilité, c'est-à-dire une *absolue convergence*, dont on peut certes déduire la convergence.

C'est pourquoi pour éviter toute ambiguïté, il est conseillé, dans votre rédaction, de ne parler que d'absolue convergence (ou d'intégrabilité), sauf en conclusion si vous devez établir la convergence.

3.1

Intégrabilité et relation de comparaison

Cette proposition est très utile pour établir l'intégrabilité d'une fonction. On la combine souvent à l'exemple des intégrales de Riemann. Elle sera approfondie en fin de chapitre pour donner des résultats asymptotiques plus précis.

3.2

Exercice (Translatées des intégrales de Riemann)

Pour α dans $\mathbb{R}$, étudier l'intégrabilité de $x \mapsto \frac{1}{(x-a)^\alpha}$ sur $]a,b]$, et de $x \mapsto \frac{1}{|x-a|^\alpha}$ sur $[b,a[$ (où $b < a$ pour une fois).

2

Exercice (Exemples d'absolue convergence)

Montrer que les intégrales $\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\mathrm{d}t$, $\int_{\mathbb{R}_+} t^7 e^{-t}\cos(t)\mathrm{d}t$ sont absolument convergentes.

3

Intégrales semi-convergentes

Il se peut qu'une intégrale soit convergente sans l'être absolument : on dit alors que l'intégrale est *semi-convergente*. L'étude de cette notion n'est pas un objectif du programme, mais il est intéressant de connaître des exemples classiques de telles intégrales.

3.3

Exercice (Intégrales semi-convergentes)

Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ (appelée *intégrale de Dirichlet*) est semi-convergente.

4

Définition (Espace des fonctions intégrables)

L'ensemble des fonctions continues par morceaux intégrables de I dans $\mathbb{K}$ est appelé *espace des fonctions intégrables sur I* (à valeurs dans $\mathbb{K}$), et noté $\mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$ (ou $\mathcal{L}^1(I)$ s'il n'y a pas d'ambiguité).

3.b

Comme le nom le laisse supposer, l'espace des fonctions intégrables sur I est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Bien sur, si $f \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$, alors $\int_I |f|$ et (donc) $\int_I f$ convergent.

Proposition (Inégalité triangulaire)

Pour tout $f \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$, $\left|\int_I f\right| \leqslant \int_I |f|$.

3.c

Démonstration

$\square$

Proposition (Changement de variable) 3.d

Étant données une fonction f continue sur $]a,b[$ et une fonction $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ bijective, strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$, les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(u)\big)\,\varphi'(u)\mathrm{d}u$ sont de même nature et égales en cas de convergence.

Démonstration

$\square$

Le lecteur adaptera cette proposition au cas où φ est strictement décroissante.

Il faut noter que cette proposition part d'hypothèses relativement restrictives (quoique souvent vérifiées) : φ est bijective, et f est continue (pas seulement continue par morceaux).

Le programme vous autorise officiellement à appliquer ce résultat sans justification dans des cas de changements de variable simples (fonctions affines, puissances, exponentielle, logarithme).

Théorème d'intégration par parties sur un intervalle quelconque 3.e

On considère deux fonctions f et g de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I =]a,b[$. On suppose que fg admet des limites finies en a et en b, et on pose

$$[fg]_a^b \overset{def}{=} \lim_b fg - \lim_a fg.$$

Les deux intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t$ ont alors même nature, et, en cas de convergence :

$$\int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t.$$

Démonstration

□

Exercice (La fonction Gamma d'Euler, première approche)

1 Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, l'intégrale $\int_{\mathbb{R}_+^*} e^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t$ converge. Ainsi, on peut définir une fonction Γ sur $\mathbb{R}_+^*$, en posant, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\Gamma(x) \stackrel{def}{=} \int_{\mathbb{R}_+^*} e^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t.$$

C'est la *fonction* Γ *d'Euler*.
2 Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

3 Déterminer $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. 5

4. Intégration des relations de comparaison

On considère deux fonctions continues par morceaux $f, g \ : [a, b[\to \mathbb{R}$.

Théorème d'intégration des relations de comparaison, cas de la convergence

On suppose g positive et $\int_a^b g$ convergente.

(1) si $f = \mathrm{o}_b(g)$, alors $\int_{[a,b[} f$ est absolument convergente, et

$$\int_{[x,b[} f = \mathrm{o}_{x \to b}\left(\int_{[x,b[} g\right).$$

(2) si $f \sim_b g$, alors $\int_{[a,b[} f$ est (absolument) convergente, et

$$\int_{[x,b[} f \sim_{x \to b} \left(\int_{[x,b[} g\right).$$

(3) si $f = \mathrm{O}_b(g)$, alors $\int_{[a,b[} f$ est absolument convergente, et

$$\int_{[x,b[} f = \mathrm{O}_{x \to b}\left(\int_{[x,b[} g\right).$$

4.a

Démonstration

□

Théorème d'intégration des relations de comparaison, cas de la divergence

On suppose g positive et $\int_a^b g$ divergente.

(1) si $f = \mathrm{o}_b(g)$, alors
$$\int_{[a,x]} f = \mathrm{o}_{x \to b}\left(\int_{[a,x]} g\right).$$

(2) si $f \sim_b g$, alors
$$\int_{[a,x]} f \sim_{x \to b}\left(\int_{[a,x]} g\right).$$

(3) si $f = \mathrm{O}_b(g)$, alors
$$\int_{[a,x]} f = \mathrm{O}_{x \to b}\left(\int_{[a,x]} g\right).$$

4.b

Démonstration

Comme g est positive et $\int_a^b g$ est divergente, $\int_a^x g(t)\mathrm{d}t$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.
Supposons $f = \mathrm{o}_b(g)$.
Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe $c \in [a, b[$ tel que, pour tout $t \geqslant c$, $|f(t)| \leqslant \varepsilon |g(t)|$ *i.e.*

$$|f(t)| \leqslant \varepsilon g(t)$$

puisque g est positive.
Par conséquent, pour tout $x \in [c, b[$, on a :

$$\left| \int_c^x f(t)\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_c^x |f(t)|\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon \int_c^x g(t)\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon \int_a^x g(t)\mathrm{d}t,$$

la dernière inégalité provenant encore de la positivité de g.
De plus, d'après la remarque initiale, il existe $d \in [c, b[$ tel que, pour tout $x \in [d, b[$, on ait :

$$\left| \int_a^c f(t)\mathrm{d}t \right| \leqslant \varepsilon \int_a^x g(t)\mathrm{d}t$$

Ainsi, on a, pour tout $x \in [d, b[$:

$$\left| \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \right| \leqslant \left| \int_a^c f(t)\mathrm{d}t \right| + \left| \int_c^x f(t)\mathrm{d}t \right| \leqslant 2\varepsilon \int_a^x g(t)\mathrm{d}t,$$

d'où le résultat.
Le deuxième résultat se déduit du premier.
Le dernier résultat se démontre de manière analogue au premier.

□

On peut bien sûr faire l'analogie avec les séries :

(1) La fonction de référence g est positive.
(2) En cas de convergence, on s'intéresse aux « termes résiduels », aux « restes ».
(3) En cas de divergence, on s'intéresse aux « termes partiels ».

5. Feuille de TD 6 : Intégration sur un intervalle quelconque

5.1. Intégration sur un segment

Exercice 1 (Annulation de fonction et intégrales) — 0 à 2

1 Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$, d'intégrale nulle sur $[a,b]$. Montrer que f s'annule sur $]a,b[$.
2 Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que $\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe $a \in]0,1[$ tel que $f(a) = a$.
3 Soit f continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \int_0^1 f(u)u^k du = 0.$$

Montrer que f admet au moins $n+1$ zéros distincts dans $]0,1[$.
4 *(X PC 09)* Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,\pi],\mathbb{R})$. On suppose que : $\int_0^\pi f(t)\cos(t)\mathrm{d}t = \int_0^\pi f(t)\sin(t)\mathrm{d}t = 0$. Montrer que f s'annule au moins deux fois sur $[0,\pi]$.
5 *(Cachan 07)* Soit f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et de moyenne nulle. Montrer que $f + f''$ s'annule quatre fois au moins sur $[0,2\pi[$.

Exercice 2 (Inégalités intégrales) — 2

1 Soit $f,g : [0,1] \to \mathbb{R}$, continues et positives, telles que $fg \geqslant 1$. Montrer

$$\left(\int_{[0,1]} f\right)\left(\int_{[0,1]} g\right) \geqslant 1.$$

2 *(X MP 05)* Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\int_{[0,1]} f = 0$, m le minimum de f et M son maximum. Prouver $\int_{[0,1]} f^2 \leqslant -mM$.
3 *(X MP 05)* Soit f et g deux fonctions croissantes et continues sur $[0,1]$. Comparer $\int_{[0,1]} fg$ et $(\int_{[0,1]} f)(\int_{[0,1]} g)$.

Exercice 3 (Extremums d'une fonction définie par des intégrales *(CCP 09)*) — 2

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}_+^*)$ et $\Phi\ : f \in E \mapsto \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{f(t)} \times \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$. Déterminer $\inf \Phi$ et $\sup \Phi$.

Exercice 4 (Cesàro intégral) — 2

Soit $f\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue par morceaux telle que f soit de limite $l \in \mathbb{R}$ en $+\infty$. Montrer que $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ tend vers l lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 5 (Fonctions définies par une intégrale) — 2

1 On définit sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction $f\ : x \mapsto \int_x^{3x} \frac{\cos(t)}{t}\mathrm{d}t$. Calculer la limite de f en 0, en $+\infty$.
2 Étudier en 1 la fonction $x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$.

5.2. Intégrabilité

Exercice 6 (Intégrabilité des fonctions exponentielles) 0

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$.

1 On se limite ici au cas où α est réel. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que $\int_{\mathbb{R}_+} e^{\alpha t}\mathrm{d}t$ converge.

2 On revient au cas général.

i Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que $\int_{\mathbb{R}_+} e^{\alpha t}\mathrm{d}t$ converge.

ii Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que $\int_{\mathbb{R}_+} e^{\alpha t}\mathrm{d}t$ converge absolument.

Exercice 7 (Calculs pas trop compliqués d'intégrales généralisées) 0

1 Existence et calcul de $\int_0^1 \left(\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$.

Indication : pour le calcul, on peut effectuer au choix les changements définis par $u = \sqrt{1+x^2}$ ou $x = \mathrm{sh}(u)$.

2 Existence et calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\ln(\tan(x))\mathrm{d}x$.

3 Existence et calcul de :

$$\int_0^{+\infty} \frac{(\sin(x))^3}{x^2}\mathrm{d}x.$$

Exercice 8 (Sommes de Riemann pour des intégrales généralisées) 1

Déterminer $\lim\limits_{n\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$.

Exercice 9 (Normes euclidiennes de f, f' et f'') 2

Prouver que si les intégrales $\int_a^{+\infty}(f(x))^2\mathrm{d}x$ et $\int_a^{+\infty}(f''(x))^2\mathrm{d}x$ convergent, alors $\int_a^{+\infty}(f'(x))^2\mathrm{d}x$ converge également.

Exercice 10 (Calculs d'intégrales généralisées plus délicates) 3

1 Existence et calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin(x)\cos(x)}{\tan(x)^2+\operatorname{cotan}(x)^2}\mathrm{d}x$.
Indication : pour le calcul, dans le cas où les trois règles de Bioche s'appliquent, on peut effectuer le changement de variable $u = \cos(2x)$.
2 Existence et calcul éventuel de l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\,\ln(x)}{(1+x)^2}\mathrm{d}x.$$

Indication : pour le calcul, astucieux, on pourra commencer par utiliser une intégration par parties, en dérivant la fonction $x \mapsto \sqrt{x}\,\ln(x)$.
3
i Existence et calcul de $I_n(x) = \int_0^{\pi} \frac{\cos(nt)-\cos(nx)}{\cos(t)-\cos(x)}\mathrm{d}t$, où $(n,x) \in \mathbb{N}\times]0,\pi[$.
Indication : pour le calcul, on pourra trouver une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 pour la suite $(I_n(x))$, en exprimant $I_n(x) + I_{n+2}(x)$ en fonction de $I_{n+1}(x)$.
ii Nature de la série $\sum x^n I_n(x)$.
4 Convergence de l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)\cos(x^2)}{x}\mathrm{d}x$.
5 Même question pour $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\sin(x+1/x^2)\cos(x^2+\frac{1}{x})\mathrm{d}x$.

Exercice 11 (Limite d'une suite définie par des intégrales) 3

Soit f une fonction positive et continue sur $\mathbb{R}_+$ telle que

$$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x < +\infty.$$

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\int_0^n xf(x)\mathrm{d}x = 0$.

Exercice 12 (D'autres calculs d'intégrales) 3

1 *(X MP 08)* $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-x^2}{1-x^2+x^4}\mathrm{d}x$.
2 *(X MP 08)* $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ $(a,b \in \mathbb{R}_+^*)$.
3 *(X MP 08)* $\int_a^b \sqrt{(b-x)(x-a)}\mathrm{d}x$.
4 *(X MP 08)* $\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\sin t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 13 (Calcul surprenant d'intégrale généralisée) 4

1 Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[x,+\infty[$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}\mathrm{d}t$.
2 Établir : $f(x) \sim_0 -\ln(x)$ et $f(x) = \frac{\cos(x)}{x^2} + \mathrm{O}_{+\infty}\left(\frac{1}{x^3}\right)$.
3 Montrer que $\int_0^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ converge et calculer sa valeur.

6. Oraux

Exercice 14 (Fonction définie par une intégrale sur $\mathbb{R}_+$) 0

(CCP) Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+x^2} \mathrm{d}t$.
1 Déterminer le domaine de définition de f.
2 Calculer $f(1)$.
3 Calculer $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$.
Indication : Effectuer un changement de variable.

Exercice 15 (Intégrabilité d'une fonction selon la valeur de paramètres) 0

(CCP) Étudier l'intégrabilité sur $]0,+\infty[$ de $t \mapsto \frac{e^{at}-e^{bt}}{t}$ selon les valeurs (réelles) de a et b .

Exercice 16 (Une intégrale semi-convergente) 2

(Mines MP 10) Montrer que $f\ : x \mapsto \cos(x^2)$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$ mais que $\int_0^x f$ a une limite lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 17 (Intégrabilité du sinus cardinal) 2

(TPE)
1 Établir la convergence et donner la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(2x)-\sin x}{x} \mathrm{d}x$.
2 La fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$?

Exercice 18 (Convergence et calcul) 3

1 (CCP) Convergence et calcul de $I_n = \int_0^{+\infty} t\, e^{-nt} \mathrm{d}t$.
2 Convergence et calcul de $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{1-e^{-\sqrt{t}}} \mathrm{d}t$.
3 (Centrale MP 10) Existence et calcul de $I = \int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2} \mathrm{d}x$.

Exercice 19 (Comparaison d'intégrales) 3

(TPE) Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}^+)$ telle que $\int_a^b f = 1$. Comparer $\left(\int_a^b t f(t) \mathrm{d}t\right)^2$ et $\int_a^b t^2 f(t) \mathrm{d}t$.

Exercice 20 (Existence et calcul d'une intégrale) — 3

(CCP)

1 Étudier la continuité par morceaux de $f : x \mapsto x\,E(1/x)$ sur $]0,1]$ et sur $[0,1]$.

2 Montrer l'existence et calculer $I = \int_0^1 x\,E(1/x)\mathrm{d}x$.

Exercice 21 (Lorsque $f + f'$ est de carré intégrable (X MP 10)) — 4

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que $f + f'$ soit de carré intégrable. Montrer que f est bornée, puis que f tend vers 0 en $+\infty$.

Exercice 22 (Condition suffisante pour qu'une fonction soit de limite nulle en $+\infty$) — 4

(X MP 10) Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que f et f'^2 soient intégrables sur $\mathbb{R}$. Montrer que f tend vers 0 en $\pm\infty$.

CHAPITRE VII

Groupes

Sommaire

1. Généralités sur les structures algébriques

1.1. Notion de structure algébrique

La notion de nombre est une première étape vers l'abstraction. Cependant, les nombres, pris isolément, n'ont que peu d'intérêt : ce sont les liens les unissant, par le biais de relations et d'opérations, qui en font la richesse.

Un pas supplémentaire vers l'abstraction a donc consisté en la recherche de propriétés susceptibles d'être satisfaites par les opérations elles-mêmes. Au fil de leurs investigations, les mathématiciens ont ainsi vu émerger la notion de *structure algébrique*.

La plupart des opérations sur des ensembles de nombres sont internes : étant donné un ensemble E, une *loi de composition interne* sur E est une application de $E \times E$ dans E : elle prend en argument un couple d'éléments de E, et les combine pour former un élément de E.

Soit $\star$ une loi de composition interne sur un ensemble E. Les propriétés usuelles susceptibles d'être satisfaites par $\star$ sont

– L'*associativité*

$$\forall (a,b,c) \in E^3, \quad (a \star b) \star c = a \star (b \star c)$$

– La *commutativité*

$$\forall (a,b) \in E^2, \quad a \star b = b \star a$$

– L'existence d'un *élément neutre* e

$$\forall\, a \in E, \quad a \star e = e \star a = a$$

– L'existence d'un *symétrique* pour un élément x (lorsqu'il existe un élément neutre e) :

$$\exists y \in E, \quad x \star y = y \star x = e$$

– Le fait qu'un élément x soit *simplifiable à gauche* (ou *régulier à gauche*) pour $\star$:

$$\forall\, y, z \in E, \quad x \star y = x \star z \Rightarrow y = z$$

De même pour le fait que x soit *simplifiable à droite* (ou *régulier à droite*). Un élément simplifiable à gauche et à droite est dit *simplifiable* (ou *régulier*).

Un ensemble E admet au plus un élément neutre (pour une loi de composition interne donnée) :

Si E est un ensemble muni d'une loi associative, et admettant un élément neutre, alors tout élément x de E admet au plus un symétrique :

Si la loi est associative, tout élément symétrisable est simplifiable :

Exemple (Propriétés de lois)

(1) 2 admet un symétrique pour la multiplication dans $\mathbb{Q}$, mais pas dans $\mathbb{Z}$. 2 est simplifiable (pour la multiplication) dans $\mathbb{Z}$, mais 0 ne l'est pas.

(2) La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas simplifiable pour la multiplication dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(3) La fonction sinus n'est pas simplifiable (pour la multiplication) dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, mais l'est dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

i

Il se peut que E soit muni de deux lois $\star$ et $\diamond$. On dit que $\star$ est *distributive à gauche* par rapport à $\diamond$ si

$$\forall (a, b, c) \in E^3, \quad a \star (b \diamond c) = (a \star b) \diamond (a \star c)$$

et *distributive à droite* par rapport à $\diamond$ si

$$\forall (a, b, c) \in E^3, \quad (a \diamond b) \star c = (a \star c) \diamond (b \star c)$$

La loi $\star$ est dite *distributive* (par rapport à une autre) si elle l'est à droite et à gauche.

Exemple (Distributivité)

Dans $\mathbb{N}$, la multiplication est distributive par rapport à l'addition.
Dans l'ensemble $\mathcal{P}(A)$ des parties d'un ensemble A, l'intersection est distributive par rapport à l'union, et inversement.

ii

Enfin, il se peut que E soit muni d'une *loi externe*, c'est-à-dire d'une application de $K \times E$ dans E, où K est un certain ensemble, appelé *domaine d'opérateurs*.

Informellement, une *structure algébrique* est un ensemble de propriétés qu'un ensemble structuré peut posséder, et que l'histoire des mathématiques a jugée suffisamment fécond. Les structures algébriques principales que nous rencontrerons seront les groupes, anneaux, corps, espaces vectoriels, algèbres.

Elle se définit par le respect de certaines propriétés générales (comme l'associativité par exemple) et la présence d'éléments distingués (en pratique, des éléments neutres pour certaines lois).

1.2. Sous-structures

Soit F une partie d'un ensemble structuré E. On dit que F est *stable* par une loi $\star$ de E si, pour tous $a, b \in F$, on a $a \star b \in F$. Dans ce cas, on peut définir une loi de composition interne sur F :

$$\begin{array}{rccc} : & F \times F & \to & F \\ & (a, b) & \mapsto & a \star b \end{array}$$

Cette loi s'appelle *loi induite* par $\star$ sur la partie stable F de E, et on la note encore souvent (et abusivement) $\star$.

Informellement, une partie F de E est une *sous-structure* de E si F « hérite » de la structure de E, *i.e.*

- F est stable par les opérations de E.
- F possède les éléments distingués de E (les éléments neutres pour les différentes lois).
- Muni de ces lois induites et de ces éléments distingués, F a la structure algébrique voulue.

Présence des éléments distingués

Nous verrons que l'on peut souvent remplacer la présence des éléments distingués par le fait que la partie soit non vide, à l'exception notable de l'élément unité dans un anneau ou une algèbre. C'est pourquoi il ne faudra pas omettre de vérifier la présence de cet élément dans ce dernier cas.

1.1

Intérêt de la notion de sous-structure

La notion de sous-structure est extrêmement importante, car elle permet de prouver à moindres frais qu'un ensemble muni de certaines opérations est structuré.

Prenons l'exemple le plus spectaculaire : aux concours, pour montrer que tel ensemble F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, vous montrerez toujours que c'est un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel déjà connu E.

Vous ne reviendrez jamais à la définition d'un espace vectoriel : vous n'aurez donc pas à vérifier les propriétés données dans cette définition (comme les pseudo-distributivités par exemple), car F héritera de toute façon de ces propriétés déjà vérifiées dans E.

1.2

Exemple (Sous-structures)

Nous verrons de très nombreux exemples explicites de sous-structures, voici plutôt des exemples de parties qui ne sont PAS des sous-structures :

(1) $\mathbb{N}$ n'est pas un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.

(2) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy = 0\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

(3) $\mathbb{R}^*_-$ n'est pas un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$.

(4) $\{0_A\}$ n'est pas un sous-anneau de A (à moins que $A = \{0_A\}$).

(5) $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{C}\right\}$ n'est pas un sous-anneau de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, mais c'est un anneau pour les lois induites par celles de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

iii

1.3. Sous-structures et opérations ensemblistes

L'intersection de sous-structures (d'un même ensemble structuré) est une sous-structure.
En général, l'union de deux sous-structures n'est pas une sous-structure :

Si E et F possèdent la même structure, $E \times F$ est naturellement muni d'une ou plusieurs lois, qui lui confère(nt) une structure, sauf dans le cas de la structure de corps. On parlera donc par exemple de groupe produit ou d'espace vectoriel produit, mais PAS de corps produit.

Si E est un ensemble muni d'une certaine structure, et si X est un ensemble quelconque, l'ensemble E^X des fonctions de X dans E peut naturellement être muni d'opérations lui conférant la même structure que E, sauf dans le cas des corps.

Une partie A d'un ensemble structuré E n'a pas de raison d'être une sous-structure. Cependant, parmi les sous-structures de E contenant A, il y en a une contenue dans toutes les autres, qui en est l'intersection : on l'appelle sous-structure *engendrée* par A.

1.4. Morphismes

Étant donné deux ensembles structurés E et F (pour la même structure algébrique), un *morphisme* est une application de E dans F respectant les lois et les éléments distingués.

Un morphisme se comportant bien avec les structures, on a des propriétés générales :
- L'image directe ou réciproque d'une sous-structure par un morphisme est une sous-structure.
- Si un morphisme est bijectif (*i.e.* un *isomorphisme*), sa bijection réciproque est aussi un (iso-)morphisme.
- L'injectivité d'un morphisme de groupes (et donc d'espaces vectoriels, d'anneaux et d'algèbres) peut se tester sur le noyau, qui est l'ensemble des antécédents de l'élément neutre pour la loi de ce groupe.
- La surjectivité d'un morphisme peut se tester sur une partie génératrice.

Le dernier point signifie que si le morphisme permet d'atteindre tous les éléments d'une partie génératrice de l'ensemble d'arrivée, alors il est surjectif.

Par exemple, le morphisme de groupes additifs

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^2 & \to & \mathbb{Z} \\ (u,v) & \mapsto & 3u+2v \end{array}$$

est surjectif, puisque $\varphi(-1,2)=1$ (et que 1 engendre le groupe additif $\mathbb{Z}$).

Si on impose l'image d'une partie génératrice de la source, alors il existe au plus un morphisme respectant ces conditions.

2. Groupes

2.1. Définition et exemples

Définition (Groupe)

Un ensemble muni d'une loi de composition interne $(G,\cdot)$ est appelé *groupe* si :
- La loi $\cdot$ est associative.
- G admet un élément neutre (noté e_G ou e s'il n'y a pas d'ambiguïté).
- Tout élément de G admet un symétrique (dans G) pour $\cdot$.

Dans le cas où la loi $\cdot$ est en outre commutative, le groupe $(G,\cdot)$ est dit *abélien* (ou *commutatif*).

2.a

Dans un groupe, tout élément est simplifiable (puisque symétrisable).

Sur la notation de la loi de groupe

Dans ce cours, la loi de groupe est le plus souvent notée multiplicativement. Bien sûr, la loi peut être notée comme on le souhaite, pour peu qu'on utilise un symbole non encore usité. La notation additive $+$ ne s'emploie que si le groupe est commutatif. En notation additive, g^k devient kg, le symétrique g^{-1} est noté $-g$, etc.

2.1

On note souvent la loi d'un groupe multiplicativement [1] (le symétrique de x est alors noté x^{-1} et sera parfois appelé *inverse* de x) ou additivement (le symétrique de x est alors noté $-x$, et sera parfois appelé *opposé* de x). Cette dernière notation est réservée au cas d'un groupe abélien. Dans le cas de la notation multiplicative, on peut définir les puissances n-ièmes (où n est un entier relatif) d'un élément x de G. On a alors, pour tout $x \in G$, tout $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$:

$$x^m x^n = x^{m+n} = x^n x^m$$

et

$$(x^m)^n = x^{mn} = (x^n)^m$$

mais en général

$$(xy)^n \neq x^n y^n$$

1. Si on ne précise pas la loi, c'est d'ailleurs implicitement le cas.

(où $y \in G$). On a cependant bien égalité si x et y commutent, *i.e.* $xy = yx$.

Le symétrique du produit xy est $y^{-1}x^{-1}$, mais pas $x^{-1}y^{-1}$ en général (c'est le cas si et seulement si les deux éléments commutent).

En notation additive, on définit de même nx où $(n, x) \in \mathbb{Z} \times G$, et on a, pour tout $(x, y) \in G^2$ et tout $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$:

$$(m+n)x = mx + nx, \quad m(nx) = (mn)x, \quad m(x+y) = mx + my,$$

la dernière formule provenant de la commutativité de la loi $+$.

Définition (Produit direct de groupes) 2.b

Étant donné des groupes $G_1, \dots, G_n$, on définit une structure de groupe sur $G_1 \times \cdots \times G_n$ en posant, pour tous $(a_1, \dots, a_n)$ et $(b_1, \dots, b_n)$ appartenant à $G_1 \times \cdots \times G_n$:

$$(a_1, \dots, a_n)(b_1, \dots, b_n) \stackrel{def}{=} (a_1 b_1, \dots, a_n b_n)$$

Exemple (Groupes) i

- Le groupe $\mathcal{S}_E$ des permutations d'un ensemble E (pour la loi de composition des applications).
- Le groupe additif dans un anneau, un espace vectoriel ou une algèbre.
- Le groupe des inversibles d'un anneau.
- Le groupe des automorphismes d'un objet structuré. En particulier, le groupe linéaire $\mathrm{GL}(E)$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E (et les versions matricielles $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$).
- Le groupe des isométries vectorielles d'un espace euclidien E.
- Si $\mathcal{E}$ est un espace affine : le groupe des translations de $\mathcal{E}$, le groupe des homothéties translations de $\mathcal{E}$, le groupe des transformations affines de $\mathcal{E}$. Le groupe des isométries préservant une partie de $\mathcal{E}$.
- L'ensemble G^X des applications d'un ensemble X à valeurs dans un groupe G, pour la loi naturelle issue de celle de G.

2.2. Sous-groupes

Définition (Sous-groupe) 2.c

Soit H une partie de G. On dit que H est un *sous-groupe* de G si :
- H est stable par la loi de G.
- H possède e_G.
- H, muni de la loi induite, est un groupe.

On notera dans ce cours $H \leqslant G$ lorsque H est un sous-groupe de G.

Lorsque H est un sous-groupe de G, le symétrique d'un élément de H pour $\cdot$ est le même dans H et dans G :

Si G est abélien, alors tous ses sous-groupes le sont aussi.

Proposition (Caractérisation des sous-groupes)

Soit H une partie de G. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) H est un sous-groupe de G.

(2) H possède e_G, est stable par la loi de G et par passage au symétrique.

(3) H possède e_G et, pour tous $x, y \in H$, xy^{-1} appartient à H.

2.a

Démonstration

$\square$

Sous-groupe

Dans les deux dernières assertions, on peut remplacer la condition que H possède e_G par le fait que H ne soit pas vide.

2.2

Proposition (Opérations sur les sous-groupes)

(1) Une intersection quelconque de sous-groupes de G est un sous-groupe de G.

(2) L'union de deux sous-groupes H et K de G est un sous-groupe de G si et seulement si $H \subset K$ ou $K \subset H$.

2.b

Démonstration

$\square$

Union de sous-groupes

L'union de deux sous-groupes n'est donc un sous-groupe que dans le cas évident où cette union est l'un des deux sous-groupes. Cependant, l'union de trois sous-groupes de G sans relation d'inclusion peut être un sous-groupe de G :

2.3

Exemple (Sous-groupes)

- Si $K \leqslant H$ et $H \leqslant G$, alors $K \leqslant G$.
- Un groupe ayant plus d'un élément admet au moins deux sous-groupes, G lui-même et le sous-groupe réduit à l'élément neutre.
- $\mathbb{Z} \leqslant \mathbb{Q} \leqslant \mathbb{R} \leqslant \mathbb{C}$, mais aussi $\mathbb{U}_n \leqslant \mathbb{U} \leqslant \mathbb{C}^*$
- Les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ sont les $n\mathbb{Z}$, où n décrit $\mathbb{N}$ (démonstration avec la division euclidienne).
- Centre d'un groupe : si G est un groupe, alors son *centre*

  $$Z(G) \stackrel{def}{=} \{g_0 \in G, \forall\, g \in G, gg_0 = g_0 g\}$$

  est un sous-groupe commutatif de G.
- Le commutant $\mathcal{C}(g)$ d'un élément g d'un groupe G

  $$\mathcal{C}(g) \stackrel{def}{=} \{g_0 \in G, gg_0 = g_0 g\}$$

  est un sous-groupe de G, et le centre de G est l'intersection des commutants des éléments de G.

ii

Les sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$ sont denses ou de la forme $a\mathbb{Z}$ pour un certain $a \in \mathbb{R}_+$.

Définition (Sous-groupe engendré par une partie)

Soit A une partie de G. On appelle *sous-groupe de G engendré par A* et on note $< A >$ le plus petit sous-groupe de G contenant A.

2.d

Sous-groupe engendré par un élément

Dans le cas d'un élément a, on note $< a >$ plutôt que $< \{a\} >$ le sous-groupe engendré par a : c'est $\{a^n, n \in \mathbb{Z}\}$ (ou $\{na, n \in \mathbb{Z}\}$ en notation additive).

2.4

Sous-groupe engendré par une partie

On peut se donner $< A >$ de deux manières :
- « Par l'intérieur » $< A >$ est l'ensemble des mots construits sur l'alphabet constitué des éléments de A et leur symétriques.
- « Par l'extérieur » $< A >$ est l'intersection des sous-groupes de G contenant A.

2.5

Sous-groupe engendré par une union

On considère ici un groupe additif $(G, +)$ et H et K deux de ses sous-groupes. On a

$$< H \cup K >= H + K,$$

où la somme $H + K$ de H et de K désigne l'ensemble

$$\{h + k, (h, k) \in H \times K\}$$

C'est pourquoi en algèbre linéaire, les opérations pertinentes sur les sous-espaces vectoriels sont l'intersection et la somme (et non l'union).
Que se passe-t-il en notation multiplicative ? On peut être tenté de poser

$$HK = \{hk, (h, k) \in H \times K\}$$

et espérer que $< H \cup K >= HK$.
Cependant cette formule est fausse en général, pour la simple raison que HK ne constitue pas, en général, un sous-groupe de G. Dans le cas où HK est un sous-groupe de G, cette formule est valable. C'est par exemple le cas lorsque G est abélien.

2.6

Exercice (Quand HK est un groupe)

Montrer que HK est un groupe si et seulement si $HK = KH$.
Donner des exemples de sous-groupes H et K tels que $HK = KH$ et tels qu'il existe $(h, k) \in H \times K$ tel que $hk \neq kh$.

1

2.3. Morphismes de groupes

Définition (Morphisme de groupes)

Soit $\varphi : G \to G'$ une application.
On dit que φ est un *morphisme de groupes* si $\varphi(e_G) = e_{G'}$ et si, pour tout $(a, b) \in G^2$, on a :

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$$

2.e

Morphisme de groupes

En fait, la première condition est conséquence de la seconde, et il est donc inutile de la vérifier :

2.7

La composée licite de deux morphismes de groupes en est également un :

Un *endomorphisme* d'un groupe G est un morphisme de groupes de G dans lui-même.
Un *isomorphisme* de groupes est un morphisme de groupes bijectif.

Proposition (Réciproque d'un isomorphisme)

La réciproque d'un isomorphisme de groupes est un isomorphisme de groupes.

2.c

Démonstration

$\square$

On dit qu'un groupe G est *isomorphe* à un groupe G' s'il existe un isomorphisme de G sur G'.
La relation « être isomorphe à » est une relation d'équivalence :

Propriétés conservées par un isomorphisme (en seconde lecture)

Soit $(G, \star)$ et $(H, \diamond)$ deux groupes. On suppose qu'il existe un isomorphisme $\varphi : G \to H$.
Cela signifie que G et H ont même structure, *i.e.* que tout calcul mené dans l'un se transporte dans l'autre via φ ou φ^{-1} : par exemple, pour passer de G à H, on change chaque élément g de G par $\varphi(g)$, et chaque $\star$ par $\diamond$.
Pour résumer, deux groupes sont isomorphes si et seulement si ils diffèrent tout au plus par l'écriture.
Ainsi, beaucoup de propriétés se transfèrent de G à H, par exemple :

(1) Le fait que G soit de cardinal fini n.
(2) Le fait que G soit abélien.
(3) Le fait que G admette un élément d'ordre p.
(4) Le fait que G admette un centre trivial (*i.e.* réduit à e_G).
(5) Le fait que dans G, tout élément admette une « moitié » (en notation additive) ou une « racine carrée » (en notation multiplicative).

2.8

Un *automorphisme* d'un groupe est un endomorphisme bijectif de ce groupe.
L'ensemble des automorphismes de G est noté $\mathrm{Aut}(G)$. C'est un groupe pour la loi de composition des applications :

Exemple (Morphismes de groupes)

(1) La signature $\varepsilon : \mathcal{S}_n \to \{-1, 1\}$.
(2) Le déterminant $\det : \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^*$.
(3) La multiplication par un élément donné dans un anneau est un morphisme du groupe additif sous-jacent.
(4) Toute application linéaire est un morphisme entre les groupes additifs sous-jacents.
(5) La conjugaison par un élément g_0 dans un groupe :

$$\varphi_{g_0} : \begin{array}{rcl} G & \to & G \\ g & \mapsto & g_0 g g_0^{-1} \end{array}$$

est un automorphisme de G, et l'application

$$\Phi : \begin{array}{rcl} G & \to & \mathrm{Aut}(G) \\ g & \mapsto & \varphi_g \end{array}$$

est un morphisme de groupes.

iii

Exemple (Morphisme de groupes partant des entiers relatifs)

Pour tout $g \in G$, il existe un unique morphisme $\psi : \mathbb{Z} \to G$ tel que $\psi(1) = g$: c'est

$$k \in \mathbb{Z} \mapsto g^k$$

iv

Proposition (Image et image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme)

Soit $\varphi : G \to G'$ un morphisme de groupes, H et H' des parties respectives de G et de G'. On a :

(1) $\forall x \in G, \quad \varphi(x^{-1}) = (\varphi(x))^{-1}$;
(2) $\forall x \in G, \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \varphi(x^n) = (\varphi(x))^n$;
(3) $(H \leqslant G) \Rightarrow (\varphi(H) \leqslant G')$;
(4) $(H' \leqslant G') \Rightarrow (\varphi^{-1}(H') \leqslant G)$.

2.d

Démonstration

□

L'image d'un groupe abélien par un morphisme de groupes est abélien.

Définition (Image et noyau d'un morphisme) 2.f

Soit $\varphi : G \to G'$ un morphisme de groupes. L'image $\varphi(G)$ de φ, notée $\mathrm{Im}(\varphi)$, est un sous-groupe de G'. On appelle *noyau* de φ et on note $\ker(\varphi)$ le sous-groupe $\varphi^{-1}(\{e_{G'}\})$ de G.

L'injectivité d'un morphisme se teste sur le noyau :

Proposition (Caractérisation d'injectivité d'un morphisme) 2.e

Soit $\varphi : G \to G'$ un morphisme de groupes. Le morphisme φ est injectif si et seulement si $\ker(\varphi) = \{e_G\}$.

Démonstration

□

Exemple (Injectivité d'un morphisme) v

Tout endomorphisme orthogonal d'un espace euclidien E a un noyau trivial, et est donc injectif, puis un automorphisme car E est de dimension finie.

3. Groupes monogènes et cycliques

Commençons par une notion qui ne figure pas au programme, mais qui aide à comprendre la notion de groupe monogène.

Définition (Rang d'un groupe) 3.a

On suppose que G est de *type fini*, *i.e.* qu'il admet une partie génératrice finie. On appelle *rang* de G le cardinal minimal d'une partie génératrice de G.

Définition (Groupe monogène, groupe cyclique) 3.b

G est dit *monogène* s'il est de rang 0 ou 1, *i.e.* s'il existe $a \in G$ tel que $G =< a >$. Un groupe monogène et fini est dit *cyclique*.

Exemple (Groupe Monogène, groupe cyclique) i

$(\mathbb{Z}, +)$ est monogène, et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le groupe $\mathbb{U}_n$ des racines n-ièmes de l'unité est cyclique.

Lemme pour définir l'addition dans le groupe des entiers modulo n

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a, b, a', b' \in \mathbb{Z}$ tels que $a \equiv a' \, [n]$ et $b \equiv b' \, [n]$. On a alors

$$a + b \equiv a' + b' \, [n]$$

3.a

Définition (Groupe des entiers modulo n)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathbb{Z}$ modulo n. La loi d'addition dans $\mathbb{Z}$ induit une application dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, qui lui confère une structure de groupe abélien.

3.c

Démonstration

Justification de cette définition (il faut en particulier bien comprendre l'importance du lemme pour définir l'addition dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$) :

$\square$

Proposition (Générateurs du groupe des entiers modulo n)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{Z}$. La classe de k dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ engendre ce groupe si et seulement si $k \wedge n = 1$.

3.b

Démonstration

$\square$

Nous préciserons la structure des groupes monogènes lorsque nous aurons étudié la notion d'ordre d'un élément dans un groupe.

4. Ordre d'un élément dans un groupe

Définition (Ordre d'un groupe) 4.a

Le cardinal d'un groupe fini est aussi appelé son *ordre*.

Définition (Élément d'ordre fini d'un groupe, ordre d'un tel élément) 4.b

Soit $g \in G$. On suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $g^N = e_G$. On appelle *ordre* de g l'entier

$$o(g) \overset{def}{=} \min\{k \in \mathbb{N}^*,\, g^k = e_G\}$$

Ordre d'un élément d'un groupe 4.1

L'ordre d'un élément n'est pas toujours défini. Bien sûr, si G est fini, tous ses éléments sont d'ordre fini.
Il existe des groupes infinis dont tous les éléments sont d'ordre fini :

Exemple (Ordre d'un élément) i

(1) Le seul élément d'ordre 1 dans G est e_G.
(2) Les transpositions sont d'ordre 2, ainsi que $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{S}_4$.
(3) Les symétries vectorielles de E distinctes de Id_E sont d'ordre 2 dans $\mathrm{GL}(E)$.
(4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ est d'ordre 3 dans $\mathcal{S}_3$.
(5) $e^{\frac{2i\pi}{n}}$ est d'ordre n dans $\mathbb{U}$ (et le sous-groupe qu'il engendre est $\mathbb{U}_n$).

Proposition (Élément d'ordre fini) 4.a

Soit $x \in G$ un élément d'ordre fini d. Soit $n, m \in \mathbb{Z}$.
(1) Si $m \equiv n[d]$, alors $x^m = x^n$.
(2) Si $x^n = e$, alors $d|n$.
(3) L'ordre de x est l'ordre du sous-groupe $< x >$ qu'il engendre dans G.

Démonstration

□

Théorème de Lagrange (pour les sous-groupes cycliques)

L'ordre d'un élément d'un groupe fini divise le cardinal du groupe. 4.b

La démonstration n'est exigible que pour G commutatif, mais le résultat est valable en toute généralité.

Démonstration

Traiter le cas où G est abélien, en considérant le produit $\prod_{g\in G} g$ des éléments de G (bien défini car G est abélien), puis, pour $a \in G$ fixé, effectuer le changement d'indice $g \leftarrow ag$.

□

Le « vrai » théorème de Lagrange (l'ordre d'un sous-groupe divise l'ordre du groupe) est proposé en exercice de TD, mais est hors-programme. Le théorème ci-dessus énonce que l'ordre d'un sous-groupe cyclique divise l'ordre du groupe : c'est donc le théorème de Lagrange dans le cas particulier des sous-groupes cycliques.

Exercice (Structure des groupes d'ordre p)

Soit p un nombre premier. Montrer que tous les groupes d'ordre p sont cycliques. 2

Exercice (Ordre d'un produit dans un cas particulier)

Soit G un groupe fini. On suppose que a et b commutent, et sont d'ordres respectifs m et n premiers entre eux. 3

1 Déterminer l'ordre de ab.

2 Montrer que ce résultat peut tomber en défaut lorsque a et b ne commutent pas.

Proposition (Structure des groupes monogènes)

Soit G un groupe monogène.

(1) Si G est infini, alors G est isomorphe à $(\mathbb{Z},+)$.

(2) Si G est fini de cardinal d, alors G est isomorphe à $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z},+)$.

4.c

Démonstration

Soit a un générateur de G, *i.e.* $G =< a >$.
(1) Pour le premier point, on vérifie

$$\begin{array}{cccc}\varphi : & \mathbb{Z} & \to & G \\ & k & \mapsto & a^k\end{array}$$

est un isomorphisme.
C'est bien un morphisme de $(\mathbb{Z},+)$ vers G, surjectif car $G =< a >$. Enfin, si $k \in \ker(\varphi)$, alors $a^k = e$. Si $k \neq 0$, on peut, quitte à considérer $-k$, supposer que $k > 0$. On a alors $G = \{e, a, \dots, a^{k-1}\}$, ce qui contredit le fait que G soit infini, donc $\ker(\varphi) = \{e\}$, puis φ est injectif.
(2) Pour le second point, on vérifie que

$$\begin{array}{cccc}\psi : & \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} & \to & G \\ & \overline{k} & \mapsto & a^k\end{array}$$

est bien une application, et que c'est un isomorphisme de groupes.
C'est une application car si $\overline{k} = \overline{k'}$, alors $k \sim k'[d]$, donc il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $k = k' + qd$ puis

$$a^k = a^{k'+qd} = a^{k'}(a^d)^q = a^{k'}$$

C'est un morphisme car, pour tous entiers k et k' :

$$\psi(\overline{k} + \overline{k'}) = \psi(\overline{k + k'}) = a^{k+k'} = a^k a^{k'} = \psi(\overline{k})\psi(\overline{k'})$$

ψ est clairement surjective car son image est un sous-groupe de G qui possède a, et qui contient donc $< a >$, c'est-à-dire G.
Comme en outre $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ et G ont même cardinal fini, ψ est bien bijective.

□

En particulier, le groupe (multiplicatif) $\mathbb{U}_n$ est isomorphe au groupe additif $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

5. Groupe symétrique

5.1. Définitions

Soit E un ensemble non vide. On appelle *permutation* de E une application bijective de E sur lui-même. On note $\mathcal{S}_E$ (ou $\mathcal{S}(E)$, $\mathfrak{S}_E$) l'ensemble des permutations de E. Cet ensemble est muni d'une structure de groupe pour la composition. Si E est fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$, alors $\mathcal{S}_E$ est fini de cardinal $n!$.

Définition (Groupe symétrique d'indice n)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit le *groupe symétrique* $\mathcal{S}_n$ (ou $\mathfrak{S}_n$) comme le groupe des permutations de $[\![1,n]\!]$, muni de la composition.

5.a

Un élément σ de $\mathcal{S}_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) peut être représenté sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n)\end{pmatrix}$$

Par exemple, l'élément neutre $e(= \mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]})$ de $\mathcal{S}_n$ est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n\end{pmatrix},$$

et

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \mathcal{S}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

On a $\mathcal{S}_3 =$:

Le groupe $\mathcal{S}_n$ est d'ordre $n!$, non commutatif dès que $n \geqslant 3$:

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. L'ensemble

$$\{\sigma \in \mathcal{S}_n, \quad \sigma(n) = n\}$$

est un sous-groupe de $\mathcal{S}_n$, canoniquement isomorphe à $\mathcal{S}_{n-1}$.

Exemple (Ordre d'une permutation)

Le seul élément d'ordre 1 de $\mathcal{S}_n$ est son élément neutre. Les permutations $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ sont des éléments d'ordre 2 de $\mathcal{S}_4$.

i

Définition (Cycle, transposition)

Soit $n \geqslant 2$, $p \in [\![2, n]\!]$. Un élément de $\mathcal{S}_n$ est appelé *cycle* de longueur p (ou p-*cycle*) s'il existe p éléments distincts $i_1, \dots, i_p$ de $[\![1, n]\!]$ tels que :

(1) $\sigma(i_1) = i_2, \sigma(i_2) = i_3, \dots, \sigma(i_{p-1}) = i_p, \sigma(i_p) = i_1$.

(2) Pour tout $j \in [\![1, n]\!] \setminus \{i_1, \dots, i_p\}, \sigma(j) = j$.

On appelle *support* du p-cycle σ l'ensemble $\{i_1, \dots, i_p\}$.
σ peut être noté $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \end{pmatrix}$.
Un 2-cycle est aussi appelé *transposition*.
Le cycle $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$ est appelé *permutation circulaire*.

5.b

Toute transposition est d'ordre 2, mais un exemple précédent nous montre que la réciproque est fausse.
Deux cycles de supports disjoints commutent.
Un même cycle peut posséder plusieurs « écritures ». Par exemple, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Un p-cycle est d'ordre p.

Exemple (Cycles)

(1) L'exemple de

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

montre qu'une puissance d'un cycle n'est pas toujours un cycle.

(2) Soit $n \geqslant 3$ et $j, k \in [\![2, n]\!]$, $j \neq k$. On a $\begin{pmatrix} 1 & j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j & k \end{pmatrix}$.

(3) L'inverse du p-cycle $\sigma = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} i_p & i_{p-1} & \dots & i_1 \end{pmatrix}$ (c'est aussi σ^{p-1}).

ii

$\mathcal{S}_n$ possède $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ transpositions.

5.2. Parties génératrices de $\mathcal{S}_n$

Définition (Orbite d'un élément sous-l'action d'une permutation)

Soit $i \in [\![1,n]\!]$, et $\sigma \in \mathcal{S}_n$. On appelle *orbite* de i pour σ (ou sous l'action de σ) l'ensemble

$$\Omega_i = \{\sigma^k(i),\ k \in \mathbb{N}\}$$

Une orbite est dite *triviale* si c'est un singleton.

5.c

Exercice (Cardinal d'une orbite)

Montrer que

$$\mathrm{Card}(\Omega_i) = \min\{p \in \mathbb{N}^*, \sigma^p(i) = i\},$$

et que $\mathrm{Card}(\Omega_i)$ divise l'ordre de σ.

4

On a

$$\Omega_i = \{\sigma^k(i),\ k \in \mathbb{N}^*\} = \{\sigma^k(i),\ k \in \mathbb{Z}\}$$

mais aussi, si $\sigma^p(i) = i$:

$$\Omega_i = \{\sigma^k(i),\ k \in [\![1,p]\!]\} = \{\sigma^k(i),\ k \in [\![0,p-1]\!]\}$$

Un élément σ de $\mathcal{S}_n$ est un cycle si et seulement si toutes les orbites de σ, sauf une, sont triviales.

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$, et $i,j \in [\![1,n]\!]$. La relation « appartenir à l'orbite de » ($i\mathcal{R}j$ équivaut à $i \in \Omega_j$) est une relation d'équivalence. En particulier, $[\![1,n]\!]$ est union disjointe des orbites distinctes sous l'action de σ.

Proposition (Décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints)

Soit $n \geqslant 2$. Tout élément non trivial de $\mathcal{S}_n$ peut s'écrire comme produit de cycles à supports disjoints. De plus, cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

5.a

Démonstration

Unicité : les cycles intervenant dans une telle décomposition (de $\sigma \in \mathcal{S}_n \setminus \{e\}$) doivent avoir pour supports les différentes orbites non triviales de σ, et pour unne telle orbite, l'action du cycle correspondant s doit coïncider avec celle de σ, ce qui détermine s.

□

Démonstration

Existence : soit σ un élément non trivial de $\mathcal{S}_n$, et $\Omega_{j_1}, \dots, \Omega_{j_l}$ les différentes orbites non triviales de $[\![1,n]\!]$ sous l'action de σ. Pour tout $k \in [\![1,l]\!]$, on note p_k le cardinal de l'orbite Ω_{j_k}, de sorte que

$$\Omega_{j_k} = \{j_k, \sigma(j_k), \dots, \sigma^{p_k-1}(j_k)\}.$$

On note $\sigma_k = \begin{pmatrix} j_k & \sigma(j_k) & \dots & \sigma^{p_k-1}(j_k) \end{pmatrix}$. Les permutations σ et σ_k coïncident sur Ω_{j_k}. On sait par ailleurs que les cycles $\sigma_1, \dots, \sigma_l$ commutent deux à deux. Vérifions que $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_l$.
Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Cet entier appartient à au plus une des orbites $\Omega_{j_1}, \dots, \Omega_{j_l}$:
- S'il n'appartient à aucune d'entre elles, il est laissé fixe par σ, ainsi que par $\sigma_1, \dots, \sigma_l$, de sorte que $\sigma(i) = (\sigma_1 \dots \sigma_l)(i)$.
- S'il appartient à l'une d'entre elles, mettons $\Omega_{j_{k_0}}$, alors, il est laissé invariant par tout σ_j tel que $j \neq j_0$, de sorte que $(\sigma_1 \dots \sigma_l)(i) = \sigma_{j_{k_0}}(i) = \sigma(i)$.

□

Exercice (Décomposition d'une permutation) 5

Décomposer $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 1 & 8 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Quel est l'intérêt d'une telle décomposition ?

(1) Comparaison de permutations : grâce à l'unicité, deux permutations sont égales si et seulement si on a trouvé les mêmes décompositions.

(2) Vérification d'une propriété sur $\mathcal{S}_n$: si on veut vérifier une propriété [2] sur $\mathcal{S}_n$, il suffit de vérifier qu'elle est vraie pour tous les cycles, et qu'elle est stable par produit.

(3) Puissances d'une permutation : muni d'une telle décomposition, il est aisé de calculer toute puissance d'une permutation (car les cycles intervenant dans cette décomposition commutent deux à deux). Ainsi, dans l'exercice ci-dessus,

$$\sigma^{17} =$$

Proposition (Génération du groupe symétrique par les transpositions) 5.b

Soit $n \geqslant 2$. Tout élément de $\mathcal{S}_n$ peut s'écrire comme produit de transpositions.

Démonstration

D'après la proposition précédente, il suffit de le prouver pour tout cycle. On note que :

$$\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_2 & i_3 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} i_{p-1} & i_p \end{pmatrix}.$$

□

Cette décomposition n'est pas unique en général, voir l'exemple 2 page 198. De plus, d'après cet exemple, les transpositions $\begin{pmatrix} 1 & j \end{pmatrix}$ engendrent $\mathcal{S}_n$.

2. On peut comparer cela au principe de récurrence : pour vérifier une propriété sur $\mathbb{N}$, il suffit de la vérifier au rang 0 et d'établir qu'elle est stable par passage au successeur. On a aussi utilisé ce genre d'arguments en algèbre linéaire.

5.3. Signature, groupe alterné

Définition (Signature d'une permutation)

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. On appelle *signature* de σ le nombre noté $\varepsilon(\sigma)$, défini par

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{n-t},$$

où t est le nombre d'orbites de σ.
On dit que σ est de signature *paire* (resp. *impaire*) si $\varepsilon(\sigma) = 1$ (resp. $\varepsilon(\sigma) = -1$).

5.d

Exemple (Signature d'une permutation)

(1) $\varepsilon(\mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]}) = 1$.
(2) Une transposition est de signature -1.
(3) Un 3-cycle est de signature 1.
(4) Plus généralement, pour tout p-cycle σ, on a $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{p+1}$.
(5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}$ élément de $\mathcal{S}_4$ est de signature 1.

iii

Lemme sur la signature

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$, et τ une transposition de $\mathcal{S}_n$. Alors

$$\varepsilon(\sigma \circ \tau) = -\varepsilon(\sigma)$$

5.c

Démonstration

Écrivons $\tau = \begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix}$ $(i \neq j)$. Soit Ω une orbite sous l'action de σ. On vérifie que
- si Ω ne comprend ni i ni j, alors Ω est aussi une orbite sous l'action de $\sigma \circ \tau$.
- si Ω comprend i et j, alors les orbites de i et j sous l'action de $\sigma \circ \tau$ sont disjointes, d'union Ω.
- si Ω comprend i mais pas j, et si on note Ω' l'orbite de j sous l'action de σ, alors l'orbite de i et de j sous l'action de $\sigma \circ \tau$ est $\Omega \cup \Omega'$.

Ainsi, les nombres d'orbites sous les actions respectives de σ et $\sigma \circ \tau$ n'ont pas même parité, d'où le résultat.

□

Ce lemme permet de prouver la :

Proposition (La signature est un morphisme)

L'application $\varepsilon : (\mathcal{S}_n, \circ) \to (\{-1, 1\}, \times)$ est un morphisme de groupes multiplicatifs.

5.d

Démonstration

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Le lemme précédent montre que si l'on décompose σ en produit de k transpositions, $\varepsilon(\sigma) = (-1)^k$. Ainsi, si $\sigma' \in \mathcal{S}_n$ se décompose en produit de k' transpositions, on a :

$$\varepsilon(\sigma\sigma') = (-1)^{k+k'} = (-1)^k(-1)^{k'} = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma'),$$

d'où le résultat.

□

Cela prouve en particulier que si $\sigma \in \mathcal{S}_n$ se décompose en produit de p transpositions (resp. de q transpositions), alors p et q ont même parité.

Définition (Groupe alterné d'indice n)

On définit le *groupe alterné* d'indice n, noté $\mathcal{A}_n$ (ou $\mathfrak{A}_n$), comme le noyau du morphisme de groupes $\varepsilon : \mathcal{S}_n \to \{-1, 1\}$ (*i.e.* l'ensemble des permutations de $\mathcal{S}_n$ de signature paire). 5.e

Exercice (Cardinal du groupe symétrique alterné d'indice n)

On suppose $n \geqslant 2$. Montrer que $\mathcal{A}_n$ est d'ordre $n!/2$. 6

Exercice (Autre point de vue sur la signature)

(Exercice facultatif, peu utile dans la suite)
Étant donné $\sigma \in \mathcal{S}_n$, $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, où $i < j$, on dit que σ inverse i et j si $\sigma(j) < \sigma(i)$.

1 Montrer que $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{inv(\sigma)}$, où $inv(\sigma)$ désigne le nombre d'inversions sous l'action de σ, *i.e.* le nombre de couples $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, où $i < j$, tels que σ inverse i et j, soit encore 7

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}.$$

2 En utilisant la question précédente, montrer à nouveau que ε est un morphisme de groupes.

6. Feuille de TD 7 : Groupes

6.1. Généralités sur les groupes

Exercice 1 (Un isomorphisme de groupes) — 0

Montrer que $\mathbb{C}^*$ (multiplicatif) et $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{U}$ sont isomorphes.

Exercice 2 (L'addition des vitesses relativistes) — 0

Soit $G =]-1, 1[$, $\star$ définie par $x \star y = \frac{x+y}{1+xy}$. Montrer que $(G, \star)$ est un groupe abélien.

Exercice 3 (Partie finie stable par multiplication) — 0

Soit G un groupe multiplicatif et H une partie finie de G non vide, stable par multiplication. Montrer que H est un sous-groupe de G.

Exercice 4 (Monoïde fini et régulier) — 1

On appelle *monoïde* un ensemble muni d'une loi de composition interne associative, admettant un élément neutre pour cette loi. Montrer qu'un monoïde fini et régulier (*i.e.* tout élément est simplifiable à gauche et à droite) est un groupe.

Exercice 5 (Caractérisation de la commutativité) — 1

Soit G un groupe.
1 Montrer l'équivalence des conditions suivantes :

(1) G est abélien.
(2) L'application carré de G dans G est un endomorphisme de G.
(3) L'application inverse de G dans G est un automorphisme de G.

2 Généralisation : montrer que s'il existe $i \in \mathbb{Z}$ tel que $g \mapsto g^i$, $g \mapsto g^{i+1}$ et $g \mapsto g^{i+2}$ soient des morphismes de groupes, alors G est abélien.
3 Donner un groupe non abélien tel que $g \mapsto g^3$ soit un endomorphisme.
4 On suppose que $g^2 = 1$ pour tout $g \in G$. Montrer que G est abélien.

Exercice 6 (Théorème de Cayley) 1

Soit G un groupe, et a un élément de G.

1 Montrer que les applications $\alpha_a : g \mapsto ag$ et $\beta_a : g \mapsto ga$ – appelées respectivement applications de *multiplication (ou de translation) à gauche et à droite par a* – sont des permutations de G.

2 Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une telle application soit un endomorphisme de G.

3 Montrer que l'application $\phi : a \mapsto \alpha_a$ est un morphisme injectif de G vers $\mathcal{S}_G$. En déduire que tout groupe est isomorphe à un sous-groupe d'un groupe de permutations (théorème de Cayley).

4 Prolongement : montrer que tout groupe fini est isomorphe à un sous-groupe d'un groupe linéaire (et même que l'on peut choisir le corps des scalaires librement).

Exercice 7 (Transfert de structure) 1

Soit G un groupe multiplicatif, E un ensemble et $\phi : G \to E$ une bijection. On définit une opération $*$ sur E par :

$$\forall\, x, y \in E, x * y = \phi\left(\phi^{-1}(x)\phi^{-1}(y)\right)$$

Montrer que $*$ confère à E une structure de groupe, et que les groupes G et E sont isomorphes.

Exercice 8 (Groupe d'automorphismes d'un groupe, automorphismes intérieurs) 1

(Centrale MP 07) Soit G un groupe. On note $\mathrm{Aut}(G)$ l'ensemble des automorphismes de G.

1 Montrer que $\mathrm{Aut}(G)$ est un groupe pour la loi $\circ$.

2 Déterminer $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z})$.

3 Pour $a \in G$ on note ϕ_a l'application de G dans G telle que $\phi_a(x) = axa^{-1}$, pour tout élément x de G : ϕ_a est appelée *conjugaison par a* (dans G). Montrer que ϕ_a est un automorphisme de G, (on dit que ϕ_a est un automorphisme *intérieur*).

4 Montrer que l'application $\psi : a \mapsto \phi_a$ est un morphisme de groupes. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que ce morphisme soit injectif. Donner un exemple où il n'est pas surjectif.

Exercice 9 (Équipotence et isomorphisme) 2

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^*$ peuvent-ils être mis en bijection ? Sont-ils isomorphes ?

Exercice 10 (Éléments réguliers de E^E) 3

Soit E un ensemble non vide. Déterminer les éléments de E^E réguliers à gauche (resp. à droite), pour la composition.

Exercice 11 (Structure de groupe) 4

1 Soit G un ensemble muni d'une loi de composition interne associative, admettant un élément neutre à gauche et tel que chaque élément de G admette un symétrique à gauche. Montrer que G est un groupe.
2 Soit G un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne associative $\cdot$ telle que :

$$\forall\, a, b \in G,\ \exists x, y \in G\ :\ a = x \cdot b = b \cdot y \quad (\star)$$

Montrer que $(G, \cdot)$ est un groupe.
3 Soit G un ensemble fini non vide muni d'une loi de composition interne $\cdot$ associative pour laquelle tout élément est régulier à droite et à gauche. Montrer que G est un groupe.

6.2. Ordre d'un élément d'un groupe

Exercice 12 (Résultats élémentaires sur les ordres) 0

1 Soit G et G' deux groupes et f un morphisme de G dans G'. Pour $a \in G$, comparer l'ordre de a et celui de $f(a)$.
2 Soit $a, b \in G$. Comparer les ordres de a et de bab^{-1}.
3 Soit $a, b \in G$. Comparer les ordres de ab et de ba.

Exercice 13 (Sous-groupes finis de $\mathbb{C}^*$) 2

Déterminer tous les sous-groupes finis de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Exercice 14 (Groupe infini dont tout élément est d'ordre fini) 2

Donner un groupe infini dont tout élément est d'ordre fini.

Exercice 15 (Existence d'une involution non triviale dans un groupe d'ordre pair) 3

Soit G un groupe fini de cardinal pair. Montrer l'existence d'un élément x de G, distinct de l'élément neutre e, tel que $x^2 = e$.

Exercice 16 (Groupe n'ayant qu'un nombre fini de sous-groupes) 3

Montrer qu'un groupe G est fini si et seulement si il n'a qu'un nombre fini de sous-groupes.

Exercice 17 (Racine carrée dans un groupe d'ordre impair) 3

Soit G un groupe fini de cardinal impair. Montrer que :

$$\forall\, x \in G,\ \exists! y \in G \text{ tel que } x = y^2.$$

Exercice 18 (Sous-groupes de type fini de $(\mathbb{Q}, +)$) — 3

Montrer que les sous-groupes de type fini de $(\mathbb{Q}, +)$ sont monogènes.

Exercice 19 (Théorème de Lagrange, cas général) — 4

Soit G un groupe fini, et H un sous-groupe de G. On considère l'ensemble Ω des *translatés à gauche* de H par un élément de g :

$$\Omega = \{gH,\ g \in G\}$$

(pour $g \in G$ fixé, gH désigne l'ensemble $\{gh,\ h \in H\}$).

1 Montrer que la réunion des éléments de Ω est G.

2 Montrer que chaque élément de Ω est de même cardinal que H.

3 Montrer que deux éléments distincts de Ω sont disjoints.

4 En déduire que l'ordre de H divise celui de G : c'est le théorème de Lagrange.

Exercice 20 (Groupe n'ayant que deux classes de conjugaison) — 4

Que dire d'un groupe fini n'ayant que deux classes de conjugaison ?

Exercice 21 (Groupe n'ayant que deux classes sous l'action de $\mathrm{Aut}(G)$) — 4

Que dire d'un groupe sur lequel le groupe des automorphismes agit en créant deux orbites ?

6.3. Groupe symétrique

Exercice 22 (Sous-groupes de $\mathcal{S}_3$ (Centrale MP 07)) — 0

Le groupe des permutations de $\{1, 2, 3\}$ est-il cyclique ? Et ses sous-groupes stricts ?

Exercice 23 ($\mathcal{S}_n$ est de rang 2 (Centrale MP 08)) — 1

Soient t la transposition $(1, 2)$ et c le cycle $(1, \dots, n)$. Calculer c^k et $c^{-k} \circ t \circ c^k$. En déduire que c et t engendrent $\mathcal{S}_n$.

Exercice 24 (Transpositions et groupe symétrique) — 4

Quel est le nombre minimum de transpositions qui engendrent le groupe $\mathfrak{S}_n$?

7. Oraux

Exercice 25 (Périodicité d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$) 0

Soient $u_0, u_1 \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_{k+2} = u_{k+1} + u_k$. Étudier la périodicité de la suite (u_k).

Exercice 26 (Groupes d'ordre 4 (X MP 10)) 0

Déterminer les groupes d'ordre 4 à isomorphisme près.

Exercice 27 (Étude d'isomorphie (X PC 10)) 0

1 Les groupes $(\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{Q}, +)$ sont-ils isomorphes ?
2 Les groupes $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ sont-ils isomorphes ?
3 Les groupes $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}^*, \times)$ sont-ils isomorphes ?

Exercice 28 (Groupe fini d'involutions (Mines MP 08)) 2

1 Soit $(G, \cdot)$ un groupe fini de cardinal $\geqslant 2$ tel que : $\forall\, g \in G, g^2 = e$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $(G, \cdot)$ soit isomorphe à $((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n, +)$.
2 Un groupe infini contient-il un élément d'ordre infini ?

Exercice 29 (Une loi de groupe sur un ensemble de polynômes) 3

Soient $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, $G_n = \left\{\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i X^i \;;\; (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1} \text{ et } \lambda_1 \neq 0\right\}$.
1 Si P et Q sont dans G_n, montrer qu'il existe un unique R de G_n tel que $R \equiv P \circ Q\ [X^n]$.
On note $R = P * Q$.
2 Montrer que $(G_n, *)$ est un groupe.
3 Déterminer un morphisme surjectif de G_n dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Exercice 30 (Sur le ppcm des ordres des éléments d'un groupe fini) 3

Soient G un groupe commutatif fini, m le ppcm des ordres des éléments de G.
1 Montrer qu'il existe g dans G d'ordre m.
2 Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un polynôme P_n de degré n de $\mathbb{Z}[X]$ tel que, si x et y sont dans $\mathbb{R}$ avec $x^2 + y^2 = 1$ et $(x + iy)^n + (x - iy)^n = 2$, alors $P_n(x) = 0$.
3 On suppose G de cardinal majoré par $2m - 1$. Montrer que G est cyclique.
4 Soit p un nombre premier. Montrer que l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ avec x, y dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ tels que $x^2 + y^2 = 1$ est un sous-groupe cyclique de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.

Exercice 31 (Partie génératrice finie stable par passage à l'inverse) 3

Soit $(G, \cdot)$ un groupe engendré par une partie finie S stable par passage à l'inverse. Pour $x \in G$, on note $L(x, G)$ la longueur minimale d'une décomposition de x comme produit d'éléments de S. Pour un endomorphisme $\varphi : G \to G$, on note $\Lambda(\varphi, S) = \max\limits_{x \in S} L(\varphi(x), S)$.

1 Montrer que $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \ln\big(\Lambda(\varphi^n, S)\big)$ existe dans $\mathbb{R}$ et ne dépend pas de S.

2 Calculer la limite précédente pour $G = \mathbb{Z}^2$ et $\varphi : (x, y) \mapsto (2x + y, x + y)$.

Exercice 32 (Reconnaître un groupe connu) 3

1 Déterminer $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Quelle est sa structure algébrique ?

2 À quel groupe est-il isomorphe ?

Exercice 33 (Ordre d'un élément dans un groupe abélien (X MP 07)) 3

Soit G un groupe abélien, $x \in G$ d'ordre m et $y \in G$ d'ordre n. Montrer qu'il existe $z \in G$ d'ordre $m \vee n$.

Exercice 34 (Élément d'ordre p (X MP 06)) 4

Soit p un nombre premier, $p > 2$, et G un groupe de cardinal $2p$. Montrer que G admet au moins un élément d'ordre p.

Exercice 35 (Existence d'un idempotent (X MP 07)) 4

Soit E un ensemble fini non vide muni d'une loi de composition interne associative notée T. Montrer qu'il existe $e \in E$ tel que $eTe = e$.

Exercice 36 (Sous-groupes maximaux de $\mathcal{S}_n$ (ENS MP 10)) 4

Soit G le sous-groupe de $\mathcal{S}_n$ formé des éléments qui fixent n. Montrer que G est maximal parmi les sous-groupes stricts de $\mathcal{S}_n$.

Exercice 37 (Le premier théorème d'isomorphie, dégradé en relation entre cardinaux (ENS M 2))

Soit G et H deux groupes, avec G fini, f un morphisme de G dans H. Donner une relation entre $|G|$, $|\ker f|$ et $|\operatorname{Im} f|$.

Exercice 38 (Morphismes de $\mathbb{Q}$ vers $\mathbb{Q}^*$) 2

Déterminer les morphismes de $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{Q}^{+*}, \times)$.

Exercice 39 (Racine carrée d'une permutation circulaire (Mines MP 10)) — 3

Le cycle $(1, 2, \dots, n)$ admet-il une racine carrée dans $\mathcal{S}_n$?

Exercice 40 (Loi de groupe sur les points entiers d'une branche d'hyperbole) — 3

1 (Centrale MP 06) Montrer que $\{x + y\sqrt{3} / x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{Z}, x^2 - 3y^2 = 1\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.

2 (X MP 08)Soit $G = \{x + \sqrt{2}y | x \in \mathbb{N}^*, y \in \mathbb{Z}$ et $x^2 - 2y^2 = 1\}$.

i Montrer que G est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$.

ii Montrer que G est monogène.

Exercice 41 (Nombre d'éléments d'ordre donné) — 3

Soit p un nombre premier. Déterminer le nombre d'éléments d'ordre p du groupe symétrique $\mathcal{S}_{2p}$.

CHAPITRE VIII

Anneaux, corps, algèbres

Sommaire

Sauf mention contraire, A désignera un anneau, et K un corps.

En arithmétique, qui est dans sa version abstraite l'étude de la structure d'anneau [1], la notion pertinente n'est pas celle de sous-anneau, mais plutôt d'*idéal* (définie plus loin). La raison principale en est, pour simplifier, que l'ensemble des multiples d'un élément a de A n'est pas, en général, un sous-anneau, mais un idéal.

Révisez vos cours de MPSI sur les anneaux, l'arithmétique, les polynômes et les fractions rationnelles.

1. Anneaux

1.1. Définition et propriétés générales

Définition (Anneau) — 1.a

On appelle *anneau* un ensemble A muni de deux lois de composition interne $+$ et $\times$, telles que :

(1) $(A,+)$ est un groupe abélien. L'élément neutre pour l'addition est noté 0 (ou 0_A) et appelé *élément nul.*

(2) La multiplication est associative.

(3) A admet un élément neutre pour la multiplication, noté 1 (ou 1_A), et appelé *élément unité.*

(4) La multiplication est distributive par rapport à l'addition.

Le symétrique d'un élément pour l'addition est appelé *opposé* (de cet élément).
S'il existe, le symétrique d'un élément pour la multiplication est appelé *inverse* (de cet élément).
Enfin, un anneau est dit *commutatif* si sa loi de multiplication est commutative.

1. L'arithmétique au sens usuel étant l'étude de $\mathbb{Z}$.

La distributivité de la multiplication par rapport à l'addition revient à dire que, pour tout $a \in A$, les applications $x \mapsto ax$ et $x \mapsto xa$ sont des endomorphismes du groupe $(A, +)$.

On obtient donc immédiatement :

Proposition (Premières propriétés calculatoires dans un anneau)

Pour tous $a, b, c \in A$ et tout entier relatif m, on a :
- $a0_A = 0_A a = 0_A$ (on dit que 0_A est *absorbant*) ;
- $(-a)b = a(-b) = -(ab)$;
- $(-a)(-b) = ab$;
- $(a - b)c = ac - bc$;
- $a(b - c) = ab - ac$;
- $a(mb) = (ma)b = m(ab)$.

1.a

Exemple (Anneau nul)

Il se peut que $1_A = 0_A$, auquel cas l'anneau est réduit à son élément nul (et dit *nul*).

i

Exemple (Anneaux)

(1) $(\mathbb{Z}, +, \times), (\mathbb{Q}, +, \times), (\mathbb{R}, +, \times), (\mathbb{C}, +, \times)$ sont des anneaux commutatifs.

(2) Si $(A, +, \times)$ est un anneau et X un ensemble non vide, alors $A^X = \mathcal{F}(X, A)$, muni des lois déduites de A est un anneau, d'élément nul l'application nulle et d'élément unité l'application constante de valeur 1. En particulier, il en est ainsi de $\mathbb{R}^I$ et de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (où I désigne un intervalle non vide).

(3) Si A et B sont deux anneaux, on peut définir un anneau produit (comme pour les groupes). En particulier, $(\mathbb{R}^n, +, \times)$ est un anneau.

(4) Lorsque A est commutatif, on peut construire l'anneau $A[X]$ des polynômes à coefficients dans A à une indéterminée (et donc par exemple $\mathbb{Z}[X], \mathbb{Z}[X, Y]$).

(5) Étant donné un groupe $(G, +)$, l'ensemble $\mathrm{End}(G)$ de ses endomorphismes, muni des lois $+$ et $\circ$ (usuelles) est un anneau.

(6) Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathcal{L}(E)$ est un anneau.

(7) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées de taille n à coefficients réels, muni des lois usuelles, est un anneau, non commutatif si $n \geqslant 2$.

ii

Proposition (Distributivité du produit par rapport au symbole sommatoire)

Soit A un anneau, $n \in \mathbb{N}^*$, $b \in A$ et $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in A^n$.

$$b \left(\sum_{i \in [\![1,n]\!]} a_i \right) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} (ba_i)$$

et

$$\left(\sum_{i \in [\![1,n]\!]} a_i \right) b = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} (a_i b).$$

1.b

Démonstration

Récurrence sur n. $\square$

Proposition (Formule de Bernoulli) 1.c

Soit $a, b \in A$, et $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que a et b commutent. On a :

$$a^n - b^n = (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1}b^k\right) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1}b^k\right)(a-b).$$

Démonstration

Cette formule se démontre sans récurrence :

$$\begin{aligned}(a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1}b^k\right) &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k}b^k\right) - \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1}b^{k+1}\right)\\ &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k}b^k\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} a^{n-k}b^k\right) = a^n - b^n.\end{aligned}$$

De même dans l'autre sens. $\square$

Proposition (Formule du binôme de Newton) 1.d

Soit $a, b \in A$, et $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que a et b commutent. On a alors la relation :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Démonstration

Par récurrence sur n. L'amorçage est clair, détaillons le calcul principal de l'hérédité :

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n\\ &= (a+b)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k} \quad (\text{car } ab = ba)\\ &= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k}\\ &= \binom{n}{0}b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{n}a^{n+1}\\ &= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k} \quad (\text{formule du triangle de Pascal})\end{aligned}$$

$\square$

Pour appliquer ces formules, il faut absolument vérifier au préalable que les éléments commutent. Ce sera par exemple le cas si A est commutatif.

Pour ne pas se tromper dans les exposants, on peut vérifier l'homogénéité de ces formules (voir a et b comme des longueurs).

Exercice (Développement dans un anneau)

Développer $(a-b)(a+b)$, $(a+b)^2$ et $(a+b)^3$ pour a et b ne commutant pas.

1

Exercice (Éléments nilpotents d'un anneau)

Faire l'exercice 4 de TD.

2

Notation (Éléments inversibles d'un anneau)

Soit A un anneau non nul. On note $A^\times$ (ou A^*) l'ensemble des éléments inversibles de A.

1.b

Proposition (Les inversibles forment un groupe)

Soit A un anneau non nul. L'ensemble $A^\times$ est un groupe pour la loi $\times$.

1.e

Démonstration

$\square$

Exemple (Éléments inversibles)

(1) $\mathbb{Q}^\times = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\mathbb{Z}^\times = \{-1, 1\} (\neq \mathbb{Z} \setminus \{0\})$.

(2) Si G est un groupe additif, $(\mathrm{End}(G), +, \circ)$ est un anneau : en particulier, $\mathrm{Aut}(G)$, qui en est l'ensemble des inversibles, est un groupe.

(3) L'ensemble des matrices réelles carrées inversibles de taille $n \in \mathbb{N}^*$ forme un groupe multiplicatif.

(4) Quels sont les éléments inversibles de $\mathbb{R}^X$ (où X est un ensemble non vide) ?

iii

Définition (Diviseur de zéro)

Soit A un anneau non nul, et $a \in A \setminus \{0\}$. On dit que a est un *diviseur de zéro* s'il existe b dans A, non nul, tel que $ab = 0$ ou $ba = 0$.

1.c

Un élément non nul a est un diviseur de zéro si et seulement si il est non simplifiable (raisonner sur les endomorphismes $x \mapsto ax$ et $x \mapsto xa$ de $(A, +)$).

En particulier, il ne peut être inversible, mais un élément peut ne pas être inversible tout en étant simplifiable (exemple : tout nombre distinct de 0, 1 et -1 dans $\mathbb{Z}$).

Exemple (Diviseurs de zéro)

Dans A^2 (avec $A \neq \{0\}$), $\mathbb{R}^X$ (avec $|X| \geqslant 2$), on a des diviseurs de zéro.

iv

Définition (Anneau intègre)

Un anneau non nul est dit *intègre* s'il est commutatif et sans diviseur de zéro.

1.d

Exemple (Anneaux intègres)

(1) Les anneaux usuels $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ sont intègres, mais pas A^2.
(2) $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est intègre si et seulement si $n = 1$ (lorsque $n \geqslant 2$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas commutatif, et a des diviseurs de zéro).
(3) Les anneaux de fonctions sont rarement intègres.

v

1.2. Sous-anneaux

B désigne une partie de A.

Définition (Sous-anneau)

On dit que B est un *sous-anneau* de $(A, +, \times)$ si :
– 0_A et 1_A appartiennent à B ;
– B est stable pour $+$;
– B est stable pour $\times$;
– muni des lois induites, $(B, +, \times)$ possède une structure d'anneau.

1.e

On peut enlever la condition $0_A \in B$, car elle se déduit des autres. En revanche, il faut vérifier que $1_A \in B$, qui ne résulte pas des suivantes (voyez le contraste avec les sous-groupes).

Donner un exemple de partie non vide de A (non nul) vérifiant toutes les conditions ci-dessus, sauf la condition $1_A \in B$:

Comme pour les sous-groupes, on dispose d'une caractérisation un peu plus pratique des sous-anneaux :

Proposition (Caractérisation des sous-anneaux)

B est un sous-anneau de A si et seulement si

(1) $1_A \in B$;

(2) $\forall\, a, b \in B, \quad a - b \in B$;

(3) $\forall\, a, b \in B, \quad ab \in B$.

1.f

Exemple (Sous-anneaux)

(1) La relation « être un sous-anneau de » est une relation d'ordre.

(2) On peut appliquer ceci à $(\mathbb{Z}, +, \times)$, $(\mathbb{Q}, +, \times)$, $(\mathbb{R}, +, \times)$, $(\mathbb{C}, +, \times)$.

(3) $\mathbb{Z}[i]$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}(i)$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$ (voir le TD pour des définitions).

(4) Une intersection de sous-anneaux en est un.

vi

1.3. Morphismes d'anneaux

A et B désignent des anneaux.

Définition (Morphisme d'anneaux)

On dit qu'une application $f : A \to B$ est un *morphisme d'anneaux* si :
- $f(0_A) = 0_B$ et $f(1_A) = 1_B$;
- $\forall\, a, b \in A, \quad f(a + b) = f(a) + f(b)$;
- $\forall\, a, b \in A, \quad f(ab) = f(a)f(b)$.

1.f

Encore une fois, la condition $f(0_A) = 0_B$ se déduit des autres, mais pas $f(1_A) = 1_B$, qu'il ne faudra donc pas oublier de vérifier. Par exemple, la fonction constante de A dans B, de valeur 0_B n'est pas un morphisme d'anneaux (à moins que B soit nul), bien qu'elle vérifie toutes les autres propriétés ci-dessus.

On a les propriétés classiques des morphismes. Par exemple, si a est inversible, alors $f(a)$ l'est, d'inverse $f(a^{-1})$. Plus généralement, $f(a^n) = f(a)^n$ pour tout entier pour lequel cela a un sens. L'image directe ou réciproque d'un sous-anneau est un sous-anneau.

Un morphisme d'anneaux f est en particulier un morphisme de groupes (additifs). En particulier, f est injectif si et seulement si $\operatorname{Ker} f = \{0_A\}$.

Exemple (Morphismes d'anneaux)

(1) Dans $(\mathbb{R}^I, +, \cdot)$, évaluation $f \mapsto f(a)$ en $a \in I$.

(2) Endomorphismes de l'anneau $\mathbb{Z}$: ce sont des endomorphismes du groupe $(\mathbb{Z}, +)$, donc de la forme $n \mapsto an$. Comme un tel morphisme doit valoir 1 en 1, on en déduit que c'est $\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}$.

(3) Morphisme naturel d'inclusion $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ (et plus généralement de tout sous-anneau dans un anneau).

(4) Morphisme de dérivation dans un anneau de polynômes : c'est un morphisme de groupes additifs et d'espaces vectoriels, mais pas d'anneaux (il n'envoie pas l'unité sur l'unité, et ne respecte pas la multiplication).

(5) Shifts dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (faire attention pour le shift à droite).

(6) Si $b \in A^\times$, alors $a \in A \mapsto bab^{-1}$ est un automorphisme de l'anneau A, appelé *automorphisme de conjugaison par* b.

vii

Contrairement aux groupes, il n'existe pas toujours de morphisme d'anneaux de A dans B. C'est le cas par exemple de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$, de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Z}$, de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ (en seconde lecture) etc.

2. Corps

Définition (Corps)

Soit K un ensemble muni de deux lois $+$ et $\times$. On dit que $(K, +, \times)$ est un *corps* si $(K, +, \times)$ est un anneau commutatif non nul, dans lequel tout élément non nul est inversible.

2.a

Corps

(1) Un corps n'est rien d'autre qu'un anneau commutatif dont les éléments non nuls forment un groupe multiplicatif.

(2) Tout corps est un anneau intègre (et la réciproque est fausse).

2.1

Exemple (Corps)

(1) $(\mathbb{Q}, +, \times)$, $(\mathbb{R}, +, \times)$, $(\mathbb{C}, +, \times)$ sont des corps.

(2) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(i)$ sont des corps (on montre que ce sont des sous-corps de $\mathbb{C}$, cf. ci-dessous).

(3) Pour tout nombre premier p, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps (en seconde lecture).

(4) Le produit cartésien de deux corps n'est pas un corps.

i

Définition (Sous-corps)

Une partie L d'un corps $(K, +, \times)$ est appelée *sous-corps* de K si L est un sous-anneau de K, qui, muni des lois induites, est un corps. On dit alors que K est un *surcorps* de L.

2.b

Proposition (Caractérisation des sous-corps)

L est un sous-corps de $(K, +, \times)$ si et seulement si
- $1_K \in L$;
- $\forall x, y \in L, \quad x - y \in L$;
- $\forall (x, y) \in (L - \{0\})^2, \quad xy^{-1} \in L$.

2.a

Démonstration

$\square$

Sous-corps

Si K est un sous-corps de L, alors on peut voir L comme un K-espace vectoriel. Lorsque L est de dimension finie sur K, cette dimension est appelée *degré* de cette extension de corps, et est notée $[L : K]$.
Plus généralement, tout L-espace vectoriel E peut-être vu comme un K-espace vectoriel. Si l'extension de corps est finie, et si E est de dimension finie sur L, alors il l'est aussi sur K, et :

$$\dim_K(E) = [L : K] \dim_L(E).$$

Par exemple, tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n peut-être vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, de dimension $2n$ (car $[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$).

2.2

Sous-corps engendré par une partie (culturel)

Soit K un corps, et soit A une partie de K. Il existe un plus petit sous-corps de K contenant A : il peut se décrire comme l'intersection des sous-corps de K contenant A. On peut aussi dire que c'est la partie de K que l'on peut construire à partir de A et des opérations d'addition, multiplication, passage à l'opposé et passage à l'inverse (d'un élément non nul).
Par exemple, $\mathbb{Q}(i)$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ sont les sous-corps de $\mathbb{C}$ engendrés par i et $\sqrt{2}$ respectivement [a].
En particulier, on peut regarder le sous-corps de K engendré par $\emptyset$ (ou par 1_K, cela revient au même) : c'est un sous-corps de K, contenu dans chaque sous-corps de K. On dit que c'est le *sous-corps premier* de K. Dans le cas de $\mathbb{C}$ (et donc de tous ses sous-corps), le sous-corps premier est $\mathbb{Q}$.

a. Au fait, quel est le sous-anneau de $\mathbb{C}$ engendré par i ?

2.3

Corps finis (hors-programme)

Vous savez qu'il existe des corps finis, à savoir les $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, où p est un nombre premier. En fait, il en existe d'autres. Étant donné un corps fini K, son sous-corps premier est nécessairement isomorphe à un $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (où p est premier). On peut ensuite voir K comme un $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-espace vectoriel, de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, donc K est de cardinal p^n.
Réciproquement, on peut construire, pour tout nombre premier p et tout $n \in \mathbb{N}^*$, un corps fini de cardinal p^n. Cependant, cette construction est délicate, surtout celle de la loi multiplicative : par exemple, les anneaux $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$ et $\left(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}\right)$ *ne sont pas* des corps, puisqu'ils ne sont pas intègres.
Signalons enfin qu'un corps infini n'admet pas toujours $\mathbb{Q}$ comme sous-corps premier : le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}(X)$ des fractions rationnelles à une indéterminée sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ admet $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ comme sous-corps premier.

2.4

Définition (Morphisme de corps)

Soient $(K,+,\times)$ et $(L,+,\times)$ deux corps. Une application $f : K \to L$ est un *morphisme du corps* K vers le corps L si f est un morphisme de l'anneau $(K,+,\times)$ vers $(L,+,\times)$.

2.c

Exercice (Morphisme de corps)

1 On considère deux corps K et L. Montrer que si $f \ : K \to L$ vérifie $f(a+b)$ et $f(ab) = f(a)f(b)$ pour tout $(a,b) \in K^2$, et si f n'est pas identiquement nul, alors f est un morphisme de corps

2 Faire l'exercice 38 de TD.

3

Quand un anneau peut-il être vu comme sous-anneau d'un corps ?

Un anneau A peut-il être vu comme un sous-anneau d'un corps ? Pas forcément, car il est nécessaire que A soit intègre. Réciproquement, on peut effectivement associer un corps K à un anneau intègre A, tel que A soit un sous-anneau de K : le corps que l'on construit s'appelle le *corps des fractions* de A. C'est $\mathbb{Q}$ pour $\mathbb{Z}$. C'est le corps $\mathbb{K}(X)$ des fractions rationnelles pour l'anneau $\mathbb{K}[X]$, qui est bien intègre. Cependant, la construction effective du corps des fractions d'un anneau intègre dépasse le cadre du programme.

2.5

Exercice (Automorphismes du corps des réels)

Montrer que $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ est l'unique automorphisme du corps des nombres réels.
Indication : on pourra vérifier qu'un tel automorphisme est croissant, et utiliser la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

4

3. Idéaux d'un anneau commutatif

A désigne ici un anneau commutatif.

Définition (Idéal d'un anneau commutatif) 3.a

On dit qu'une partie $\mathcal{I}$ de A en est un *idéal* si :

(1) $\mathcal{I}$ est un sous-groupe de $(A,+)$.

(2) Pour tout $(a,x) \in A \times \mathcal{I}$, ax appartient à $\mathcal{I}$.

On pourrait se dire qu'un idéal $\mathcal{I}$ est un super sous-anneau, puisqu'il est stable par la multiplication par un élément *quelconque* de A, mais nous n'imposons pas que $1_A \in \mathcal{I}$, donc $\mathcal{I}$ n'est pas, en général, un sous-anneau de A. D'ailleurs, quel est le seul idéal de A possédant 1_A ?

Exemple (Idéal engendré par un élément) i

Soit $a \in A$. L'ensemble
$$aA \overset{def}{=} \{ax, x \in A\}$$
est un idéal, appelé *idéal engendré par a*.

On a $aA = A$ si et seulement si a est inversible.

Définition (Idéal principal, anneau principal) 3.b

Un idéal $\mathcal{I}$ de A est dit *principal* s'il est engendré par un élément, *i.e.* s'il existe $a \in A$ tel que
$$\mathcal{I} = aA.$$
L'anneau commutatif A est dit *principal* si tous ses idéaux sont principaux.

Exemple (Idéal principal) ii

L'anneau $\mathbb{Z}$ est principal.

Une intersection quelconque et une somme finie[2] d'idéaux de A sont des idéaux de A.

Voici un exemple typique d'idéal, qui permet également de comprendre pouquoi cette notion intervient souvent en arithmétique :

Proposition (Le noyau d'un morphisme d'anneaux est un idéal) 3.a

Soit $\varphi : A \to B$ un morphisme d'anneaux. $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est alors un idéal de A.

2. En revanche, une somme de sous-anneaux n'est pas, en général, un sous-anneau.

Démonstration

□

Exemple (Idéaux d'un corps) iii

Les seuls idéaux d'un corps K sont $\{0_K\}$ et K lui-même. Réciproquement, un anneau (commutatif non nul) A qui n'a pour idéaux que $\{0_A\}$ et A est-il un corps ?

Définition (Relation de divisibilité dans un anneau commutatif) 3.c

Soit $a, b \in A$. On dit que b *divise* a, et on note $b|a$, s'il existe $x \in A$ tel que $a = bx$.

Interprétation de la divisibilité en termes d'idéaux 3.1

Le fait que b divise a peut se traduire par l'inclusion $aA \subset bA$.

Définition (Éléments associés) 3.d

Deux éléments a et b d'un anneau A sont dits *associés* s'il existe un élément inversible u de A tel que $a = bu$.

Cela définit une relation d'équivalence sur A.

Exercice (Éléments associés) 5

Soit $a, b \in A$.

1 Montrer que si a et b sont associés, alors ils se divisent mutuellement.

2 Montrer que dans le cas où on suppose A intègre, la réciproque est vraie.

4. Les anneaux de congruence

On considère des entiers n et m supérieurs ou égaux à 2. On a défini l'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et on lui a conféré une structure de groupe additif lors du cours sur les groupes.

Lemme pour définir la multiplication dans un anneau de congruence 4.a

Soit $a, b, a', b' \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $a \equiv a'\ [n]$ et $b \equiv b'\ [n]$. On a alors

$$ab \equiv a'b'\ [n]$$

Démonstration

$\square$

Définition (Anneau de congruence modulo n) 4.a

La multiplication dans $\mathbb{Z}$ passe au quotient modulo n, et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, muni de l'addition et de cette multiplication induite, est un anneau commutatif. Étant donné $k \in \mathbb{Z}$, on notera $\overline{k}_n$ sa classe dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, ou plus simplement $\overline{k}$ s'il n'y a pas d'ambiguité.

Démonstration

Le lemme précédent justifie le passage au quotient (et c'est le point crucial des vérifications).
Les autres propriétés établissant la structure d'anneau commutatif résultent essentiellement de ces mêmes propriétés pour l'anneau $\mathbb{Z}$.
On sait déjà que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est un groupe abélien. Soit $a, b, c \in \mathbb{Z}$. On a

$$(\overline{a}\,\overline{b})\,\overline{c} = \overline{ab}\,\overline{c} = \overline{(ab)c} = \overline{a(bc)} = \overline{a}\,\overline{bc} = \overline{a}\,(\overline{b}\,\overline{c}),$$

d'où l'associativité du produit.
De plus

$$\overline{a}\overline{b} = \overline{ab} = \overline{ba} = \overline{b}\overline{a}$$

$\overline{1}$ est clairement neutre pour la multiplication dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
Enfin

$$\overline{a}\,(\overline{b} + \overline{c}) = \overline{a}\,\overline{b+c} = \overline{a(b+c)} = \overline{ab+ac} = \overline{ab} + \overline{ac} = \overline{a}\overline{b} + \overline{a}\overline{c}$$

d'où la distributivité.

$\square$

Proposition (Inversibles de l'anneau de congruence modulo n) 4.b

Soit $k \in \mathbb{Z}$. La classe de k dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est inversible si et seulement si $k \wedge n = 1$.

Démonstration

$\square$

Corollaire (Caractérisation de la structure de corps sur les anneaux de congruence) 4.c

L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement si n est premier.

Démonstration

□

Lemme pour le théorème des restes chinois

On définit une application f de $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ en posant $f(\overline{k}_{mn}) = \overline{k}_n$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, et il s'agit d'un morphisme d'anneaux.

4.d

Démonstration

□

Théorème (des restes) chinois

On suppose m et n premiers entre eux. L'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ & \overline{k}_{mn} & \mapsto & \left(\overline{k}_m, \overline{k}_n\right) \end{array}$$

est un isomorphisme d'anneaux.

4.e

Démonstration

On sait d'après le lemme que φ est bien défini, et qu'il s'agit d'un morphisme d'anneaux.
On vérifie ensuite l'injectivité en testant le noyau : soit $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\overline{k}_{mn} \in \ker(\varphi)$. On a donc $\overline{k}_m = \overline{0}_m$ et $\overline{k}_n = \overline{0}_n$, donc k est un multiple de m et de n. Comme m et n sont premiers entre eux, c'est un multiple de mn, *i.e.* $\overline{k}_{mn} = \overline{0}_{mn}$: φ est injectif.
On conclut :

□

Application aux systèmes de congruences.

Théorème des restes chinois

Si on suppose que m et n ne sont pas premiers entre eux, l'application du théorème reste un morphisme d'anneaux, mais n'est plus bijective :

4.1

Définition (Indicatrice d'Euler)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\varphi(n) \stackrel{def}{=} \operatorname{Card}\{k \in [\![1, n]\!],\ k \wedge n = 1\}.$$

On définit ainsi une application $\varphi\ : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, appelée *indicatrice d'Euler*.

4.b

$\varphi(n)$ est l'ordre du groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$.

Exercice (Indicatrice d'Euler)

1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que n est premier si et seulement si $\varphi(n) = n - 1$.
2 Montrer que pour tout nombre premier p et tout $r \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(p^r) = (p-1)p^{r-1}$.

6

Proposition (L'indicatrice d'Euler est multiplicative)

L'indicatrice d'Euler est *multiplicative*, au sens où, si m et n sont premiers entre eux, on a :

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n).$$

4.f

Démonstration

$\square$

Proposition (Calcul de l'indicatrice d'Euler)

Soit $n = \prod_{i=1}^k p_i^{r_i}$ un entier naturel supérieur ou égal à 2, donné avec sa décomposition en facteurs premiers. On a :

$$\varphi(n) = \prod_{i=1}^k (p_i - 1)p_i^{r_i - 1} = n \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

4.g

I : calcul de $\varphi(n)$ à l'aide d'une méthode de crible.

Théorème d'Euler

Soit a un entier relatif, premier avec n. On a :
$$a^{\varphi(n)} \equiv 1[n]$$

4.h

Démonstration

$\square$

Théorème d'Euler

On retrouve immédiatement, dans le cas où $n = p$ est supposé premier, le petit théorème de Fermat :
$$\forall\, a \in \mathbb{Z},\ a^p \equiv a[p]$$

4.2

Codage RSA

Le codage RSA (du nom de ses inventeurs Rivest, Shamir et Adleman), est un protocole cryptographique pour transmettre un message sur un canal peu sûr.
Le principe est le suivant :
– Ada choisit deux nombres premiers distincts p et q, et forme leur produit $n = pq$. On a donc $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$.
– Ada choisit un entier e, premier avec $\varphi(n)$, et détermine d tel que $de \equiv 1\,[\varphi(n)]$ (on dit que d est un *inverse modulaire* de e modulo $\varphi(n)$).
– Ada communique le couple (n, e) à tout le monde. Si Bernice veut lui transmettre un message codé M (un certain entier compris entre 0 et $n-1$), alors Bernice transmet le reste C de la division de M^e par n.
– Ada peut alors décoder le message de Bernice en calculant C^d, puisque
$$C^d \equiv M\,[n]$$
Ce protocole se fonde sur la difficulté de calculer $\varphi(n)$, ce qui revient à connaître $p+q$ puisqu'on connaît déjà pq. En particulier, on espère que récupérer p et q connaissant leur produit n est difficile.

4.3

5. Anneaux de polynômes à une indéterminée

Dans ce paragraphe, K est un sous-corps de $\mathbb{C}$, mais on pourrait travailler dans l'anneau des polynômes à une indéterminée sur n'importe quel corps. On ne revient pas sur la construction de l'anneau $K[X]$ des polynômes à coefficients dans K et à une indéterminée X.

Rappel (Degré, division euclidienne, coefficient dominant)

Polynôme unitaire (ou normalisé) :

L'anneau $K[X]$ est intègre.

Les inversibles de $K[X]$ sont les polynômes constants non nuls. Deux polynômes P et Q sont associés si et seulement si il existe $\lambda \in K^*$ tel que $P = \lambda Q$.

Rappel (Racines d'un polynôme, ordre de multiplicité d'une racine)

Rappel (Formule de Taylor pour les polynômes)

Rappel (Théorème de d'Alembert-Gauss (également appelé théorème fondamental de l'algèbre))

Proposition (Idéaux de $K[X]$)

L'anneau $K[X]$ est principal.

5.a

Démonstration

□

Tout idéal $\mathcal{I}$ non nul de $K[X]$ admet donc un unique générateur normalisé.

Générateur normalisé

Dans $\mathbb{Z}$, nous savons que les idéaux sont les parties de la forme $a\mathbb{Z}$, où $a \in \mathbb{Z}$. Si l'idéal n'est pas nul, il admet exactement deux générateurs, à savoir a et $-a$: l'arithmétique usuelle, *i.e.* l'étude de l'anneau $\mathbb{Z}$ a privilégié l'unique générateur positif. Pour les idéaux de $K[X]$, nous privilégions l'unique générateur normalisé. Ceci permet de parler d'entiers, ou de polynômes (ce que vous aviez fait jusqu'à présent), plutôt que d'idéaux. 5.1

Définition (PGCD de polynômes)

Soit $A, B \in K[X]$. On appelle *plus grand commun diviseur* (ou *PGCD*) de A et B et on note $A \wedge B$ l'unique générateur nul ou normalisé de l'idéal $A\,K[X] + B\,K[X]$. Plus généralement, si $A_1, \dots, A_n$ sont des éléments de $K[X]$, on appelle PGCD de ces polynômes et on note $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n$ l'unique générateur nul ou normalisé de 5.a

$$A_1\,K[X] + \cdots + A_n\,K[X].$$

Définition (PPCM de polynômes)

Soit $A, B \in K[X]$. On appelle *plus petit commun multiple* (ou *PPCM*) de A et B et on note $A \vee B$ l'unique générateur nul ou normalisé de l'idéal $A\,K[X] \cap B\,K[X]$. Plus généralement, si $A_1, \dots, A_n$ sont des éléments de $K[X]$, on appelle PPCM de ces polynômes et on note $A_1 \vee \cdots \vee A_n$ l'unique générateur nul ou normalisé de 5.b

$$A_1\,K[X] \cap \cdots \cap A_n\,K[X].$$

Définition (Polynômes premiers entre eux)

Soit $A, B, A_1, \dots, A_n$ des polynômes sur K. On dit que A et B sont *premiers entre eux* si $A \wedge B = 1$.
On dit que $A_1, \dots, A_n$ sont *premiers entre eux deux à deux* si pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$ distincts, A_i et A_j sont premiers entre eux. 5.c
On dit que $A_1, \dots, A_n$ sont *premiers entre eux dans leur ensemble* si $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n = 1$.

Théorème de Bézout

Deux polynômes A et B sont premiers entre eux si et seulement si il existe $(U, V) \in K[X]^2$ tel que
$$AU + BV = 1.$$

5.b

Démonstration

$\square$

De même, $A_1, \ldots, A_n$ sont premiers entre eux dans leur ensemble si et seulement si il existe des polynômes $U_1, \ldots, U_n$ tels que
$$\sum_{i=1}^{n} U_i A_i = 1.$$

Si $A_1, \ldots, A_n$ sont premiers entre eux deux à deux, alors ils le sont dans leur ensemble, mais la réciproque est fausse.

Algorithme d'Euclide étendu

Pour trouver une relation de Bézout sur des entiers ou des polynômes A et B de manière algorithmique, on peut utiliser les opérations élémentaires sur les lignes de la matrice [a]
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & A \\ 0 & 1 & B \end{pmatrix}$$
afin d'obtenir $A \wedge B$ sur la dernière colonne : les coefficients de la ligne correspondante donnent un couple (U, V) convenable.

a. Cette suite d'opérations suivant l'algorithme d'Euclide classique.

5.2

Exercice (Algorithme d'Euclide étendu)

1 Trouver une relation de Bézout pour $A = 19$ et $B = 33$ (dans $\mathbb{Z}$).
Réponse : $7A - 4B = 1$.
2 Même question pour $A = X^2 + X + 2$ et $B = X^3 + 2X + 1$.
Réponse : $\frac{X^2-3X+3}{8} A + \frac{-X+2}{8} B = 1$.

7

Théorème (Lemme de Gauss)

Soit A, B et C trois polynômes. On suppose que A divise BC et que $A \wedge B = 1$. Le polynôme A divise alors C.

5.c

Démonstration

□

Corollaire (PPCM de polynômes premiers entre eux)

Soit A et B deux polynômes sont premiers entre eux. $A \vee B$ est alors le normalisé de AB.

5.d

Démonstration

□

Définition (Irréductible de $K[X]$)

Un polynôme A non constant est dit *irréductible* (sur K, ou dans $K[X]$) si tout polynôme de $K[X]$ le divisant est constant ou associé à A.

5.d

Tout polynôme est évidemment divisible par les polynômes constants non nuls et par les polynômes qui lui sont associés : un polynôme irréductible est donc un polynôme non constant dont les seuls diviseurs sont ces diviseurs évidents.

Un polynôme irréductible qui divise un produit de polynômes divise (au moins) un des termes de ce produit.

Théorème de décomposition en facteurs irréductibles

Pour tout polynôme non constant A, il existe des polynômes irréductibles unitaires $P_1, \dots, P_k$ sur K, distincts deux à deux, des entiers naturels $r_1, \dots, r_k$ tous non nuls, et un scalaire non nul λ, tels que

$$A = \lambda \prod_{i=1}^{k} P_i^{r_i}.$$

De plus, cette décomposition est unique à réindexation près des couples $(P_1, r_1), \dots, (P_k, r_k)$.

5.e

Démonstration

$\square$

Proposition (Irréductibles dans les cas complexe et réel) 5.f

(1) Les irréductibles sur $\mathbb{C}$ sont les polynômes de degré 1.
(2) Les irréductibles sur $\mathbb{R}$ sont les polynômes de degré 1 et ceux de degré 2 sans racine réelle.

Démonstration

$\square$

La description des irréductibles sur d'autres corps, notamment $\mathbb{Q}$, est bien plus délicate.

6. Algèbres

6.1. Généralités

Définition (Algèbre) 6.a

On appelle *algèbre sur* K (ou K-*algèbre*) tout ensemble A muni de lois de composition internes d'addition et de multiplication, et d'une loi externe de multiplication par un scalaire, lui conférant à la fois une structure de K-espace vectoriel et d'anneau, et telle que

$$\forall (\lambda, a, b) \in \mathbb{K} \times A \times A, \quad (\lambda a)b = \lambda(ab) = a(\lambda b).$$

Exemple (Algèbres) i

$K[X]$, $\mathcal{L}(E)$, $\mathcal{M}_n(K)$, $\mathcal{F}(X, K)$ sont des K-algèbres.

Définition (Sous-algèbre)

On dit qu'une partie B d'une K-algèbre A en est une *sous-algèbre* si

(1) B est stable par les lois de A.

(2) B possède 0_A et 1_A.

(3) Muni des lois induites, B a une structure de K-algèbre.

6.b

« Être une sous-algèbre de » est une relation d'ordre.

Proposition (Caractérisation des sous-algèbres)

Soit A une K-algèbre, B une partie de A. B est une K-algèbre si et seulement si

(1) $1_A \in B$.

(2) B est stable par combinaisons linéaires.

(3) B est stable par produit.

6.a

Démonstration

$\square$

Exemple (Sous-algèbres)

(1) $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ est une sous-algèbre de $\mathbb{R}^I$ pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

(2) $\mathcal{T}_n(K)$ (ensemble des matrices triangulaires supérieures) est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(K)$, et l'ensemble des matrices diagonales de taille n en est elle-même une sous-algèbre.

(3) $K[X^2] \overset{def}{=} \operatorname{Vect}(X^{2k}, k \in \mathbb{N})$ est une sous-algèbre de $K[X]$.

(4) Si L est un surcorps de K, et si A est une L-algèbre, alors A est naturellement munie d'une structure de K-algèbre.

ii

Exercice (Sous-algèbres, ou pas)

Donner des parties de la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathbb{C}[X]$ qui sont :

1 Des sous-algèbres de $\mathbb{C}[X]$.

2 Des sous-anneaux mais pas des sous-algèbres de $\mathbb{C}[X]$.

3 Des sous-espaces vectoriels mais pas des sous-algèbres de $\mathbb{C}[X]$.

8

Définition (Morphisme d'algèbres) 6.c

Soit A et B deux K-algèbres. On dit qu'une application $f : A \to B$ est un *morphisme* de K-algèbres si f est à la fois un morphisme d'anneaux et de K-espaces vectoriels.

On définit classiquement les notions d'endomorphisme et d'automorphisme d'une K-algèbre, d'isomorphisme de K-algèbre, et le fait que deux K-algèbres soient isomorphes.

Proposition (Caractérisation des morphismes d'algèbres) 6.b

Soit A et B deux K-algèbres, et $f : A \to B$ une application. f est un morphisme de K-algèbres si et seulement si

(1) $f(1_A) = 1_B$.

(2) $\forall (\lambda, \mu) \in K^2, \forall (x, y) \in A^2,\ f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$.

(3) $\forall (x, y) \in A^2,\ f(xy) = f(x) f(y)$.

Exemple (Morphismes d'algèbres) iii

(1) Soit X un ensemble non vide, et $a \in X$. L'évaluation en a

$$\varphi : \begin{array}{ccc} K^X & \to & K \\ f & \mapsto & f(a) \end{array}$$

est un morphisme d'algèbres.

(2) Pour tout $a \in K$, l'évaluation en a :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} K[X] & \to & K \\ P & \mapsto & P(a) \end{array}$$

est un morphisme d'algèbres.

(3) Pour tout $C \in K[X]$, la composition à droite par C :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} K[X] & \to & K[X] \\ P & \mapsto & P(C) \end{array}$$

est un endomorphisme de la K-algèbre $K[X]$.

(4) Pour tout élément inversible b d'une algèbre A, l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} A & \to & A \\ a & \mapsto & bab^{-1} \end{array}$$

est un automorphisme de l'algèbre A, appelé *conjugaison* par b.

(5) Pour tout espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, et toute base $\mathcal{B}$ de E, l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ f & \mapsto & M_{\mathcal{B}}(f) \end{array}$$

est un isomorphisme d'algèbres.

Si $\varphi : A \to B$ est un morphisme d'algèbres, alors, pour toutes sous-algèbres A' et B' de A et de B respectivement, $\varphi(A')$ et $\varphi^{-1}(B')$ sont des sous-algèbres respectives de B et de A.

Exercice (Éléments inversibles d'une sous-algèbre de dimension finie)

1 Soit A une K-algèbre, B une sous-algèbre de A de dimension finie et soit b un élément de B, inversible dans A.
En considérant

$$\varphi : \begin{array}{ccc} B & \to & B \\ x & \mapsto & bx \end{array}$$

montrer que b^{-1} appartient à B.

2 Montrer sur un exemple que ce résultat ne s'étend pas en dimension infinie.

9

Exemple (Éléments inversibles d'une sous-algèbre de dimension finie)

L'inverse d'une matrice triangulaire supérieure inversible est triangulaire supérieure. De même pour les matrices diagonales, triangulaires inférieures, triangulaires par blocs (de tailles imposées), les matrices en damier, les polynômes en une matrice donnée, etc.

iv

6.2. Sous-algèbre des polynômes en un élément d'une algèbre

Cette sous-section est préparatoire au cours sur la rédaction des endomorphismes : vous pouvez la lire afin de faciliter l'assimilation du cours sur la rédaction, mais ce n'est pas une obligation.

La K-algèbre $K[X]$ possède une propriété importante (dite universelle) : pour toute K-algèbre A, et tout $\alpha \in A$, il existe un unique morphisme d'algèbres $\varphi : K[X] \to A$ tel que $\varphi(X) = \alpha$. C'est celui donné par

$$\varphi\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k$$

pour tout polynôme $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$.

Son image s'appelle la K-algèbre des polynômes en α, c'est une sous-algèbre commutative de A. On la note $K[\alpha]$. Elle est monogène en tant que K-algèbre, *i.e.* c'est une sous-algèbre engendrée par un singleton, ici $\{\alpha\}$.

Pour tout $P \in K[X]$, l'élément $\varphi(P)$ est noté $P(\alpha)$, et appelé évaluation de P en α.

Ainsi, on a, pour tous $P, Q \in K[X]$, tous $\lambda, \mu \in K$:

$$(\lambda P + \mu Q)(\alpha) = \lambda P(\alpha) + \mu Q(\alpha), (PQ)(\alpha) = P(\alpha)Q(\alpha), \quad \text{et} \quad 1(\alpha) = \alpha^0 = 1_A$$

Cela s'applique notamment à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{L}(E)$. Au sujet de ce dernier exemple, il faudra bien prendre garde au fait que si $P \in \mathbb{K}[X]$, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$, alors $(P(u))(x)$ a un sens (on évalue l'endomorphisme $P(u)$ en le vecteur x de E), mais $P(u(x))$ *n'a aucun sens a priori* (on tente d'évaluer un polynôme en un vecteur de E, alors que la multiplication de vecteurs d'un espace vectoriel E n'est pas définie).

On dira qu'un polynôme $P \in K[X]$ annule α si $P(\alpha) = 0_A$. Comme $\varphi : P \in K[X] \mapsto P(\alpha)$ est un morphisme d'algèbres, son noyau est un sous-espace vectoriel et surtout un idéal de $K[X]$, appelé idéal annulateur de α. Si ce noyau n'est pas trivial, *i.e.* si φ n'est pas injective, alors l'idéal annulateur admet un unique générateur unitaire.

Nombres algébriques, nombres transcendants (culturel, lecture facultative)

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, et soit $\mathbb{Q}(\alpha)$ le sous-corps de $\mathbb{C}$ qu'il engendre. L'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{Q}[X] & \to & \mathbb{Q}[\alpha] \\ & P & \mapsto & P(\alpha) \end{array}$$

est un morphisme surjectif d'algèbres. En particulier, son noyau est un idéal $\mathcal{I}$.
Si $\mathcal{I} = \{0\}$, *i.e.* si le seul polynôme à coefficient rationnels dont α est racine est le polynôme nul, on dit que α est *transcendant*, et $\mathbb{Q}[\alpha]$ est isomorphe à $\mathbb{Q}[X]$. 6.1
Sinon, on dit que α est un *nombre algébrique*, $\mathbb{Q}[\alpha] = \mathbb{Q}(\alpha)$, le générateur unitaire P de $\mathcal{I}$ est alors irréductible sur $\mathbb{Q}$, et son degré est aussi le degré de l'extension de corps $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$.
Par exemple $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{3} + \sqrt[5]{5}$ sont algébriques, e et π sont transcendants, mais on ne sait pas si $e + \pi$ l'est !

7. Feuille de TD 8 : Anneaux, corps, algèbres

7.1. Généralités sur les anneaux

Exercice 1 (Morphisme d'anneaux) 0

Étant donné deux anneaux A et B quelconques, existe-t-il au moins un morphisme d'anneaux de A vers B ?

Exercice 2 (Anneau intègre fini) 1

Montrer que tout anneau intègre fini est un corps.

Exercice 3 (Anneau des endomorphismes d'un groupe commutatif) 1

Soit $(G,+)$ un groupe commutatif. On note $\mathrm{End}(G)$ l'ensemble des endomorphismes de G, sur lequel on définit la loi (notée abusivement) $+$ par :

$$\forall\, f,g \in \mathrm{End}(G), \forall\, x \in G, (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

Montrer que $(\mathrm{End}(G),+,\circ)$ est un anneau.

Exercice 4 (Éléments nilpotents d'un anneau) 1

Soit $(A,+,\times)$ un anneau non nul. On dit que $x \in A$ est *nilpotent* s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n = 0$.

1 Donner un exemple de matrice nilpotente non nulle.

2 Montrer qu'un élément de A ne peut pas être à la fois nilpotent et inversible.

3 Montrer qu'il peut exister des éléments ni inversibles ni nilpotents.

4 Montrer que si x est nilpotent, alors $1-x$ est inversible.

5 Montrer que si x et y sont nilpotents et commutent, alors xy et $x+y$ sont nilpotents.

Exercice 5 (Centre d'un anneau) 2

Soit $(A,+,\times)$ un anneau. On appelle *centre* de A l'ensemble $C = \{x \in A, \forall\, y \in A, xy = yx\}$. Montrer que C est un sous-anneau de A.

Exercice 6 (Anneau principal non intègre) 2

Donner un exemple d'anneau principal non intègre.

Exercice 7 (Radical d'un idéal) 3

Soit A un anneau commutatif, I un idéal de A. On appelle *radical* de I et on note $\sqrt{I}$ l'ensemble :

$$\sqrt{I} = \{x \in A,\ \exists n \in \mathbb{N}, x^n \in I\}.$$

Dans $\mathbb{Z}$, calculer $\sqrt{12\mathbb{Z}}$, $\sqrt{72\mathbb{Z}}$.

Exercice 8 (Anneau local) — 4

1 Soit A un anneau commutatif qui n'est pas un corps. Montrer l'équivalence des assertions suivantes :

(1) La somme de deux non inversibles est non inversible.

(2) Les non inversibles forment un idéal propre.

(3) A possède un idéal maximal unique

Lorsque l'une de ces conditions est remplie, on dit que A est un *anneau local*.

2 Montrer que dans un anneau local, les seuls idempotents sont 1 et 0.

7.2. Arithmétique, anneaux de congruence

Exercice 9 (Chiffres en base 10) — 0 à 4

1 (Mines MP) Trouver le chiffre des unités de 7^{7^7}.

2 Trouver les deux derniers chiffres de la représentation décimale de $19^{19^{19}}$.

3 Montrer que chaque nombre du type

$$2^{2^n}+1$$

(où $n \geqslant 2$) se termine par 7.

4 Montrer qu'un nombre entier positif de six chiffres dont la représentation décimale est de la forme « abcabc » est nécessairement divisible par 13.

5 On admet que 2^{29} est un nombre de 9 chiffres, tous différents (en base 10). Quel est le chiffre manquant ?

6 Trouver la somme des chiffres de la somme des chiffres de la somme des chiffres de 4444^{4444}.

Exercice 10 (Restes chinois) — 0

Trouver les $a \in \mathbb{Z}$ tels que $a \equiv 3\,[7]$, $a \equiv 8\,[17]$ et $c \equiv 13\,[27]$.
Réponse : 1606.

Exercice 11 (Vers le théorème de Dirichlet) — 1

Montrer qu'il y a une infinité de nombres premiers congrus à 3 modulo 4.

Exercice 12 (Nombres de Mersenne et de Fermat) — 1

Trouver une condition nécessaire sur $n \in \mathbb{N}^*$ pour que 2^n-1 soit premier. Même question avec 2^n+1.

Exercice 13 (Équations diophantiennes) 2

1 Montrer qu'il n'existe pas de couple d'entiers $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que

$$x^2 - 5y^2 = 3.$$

2 L'équation diophantienne

$$x^3 + 2y^3 = 4z^3$$

possède-t-elle dans $\mathbb{Z}^3$ une autre solution que le triplet nul ?

Exercice 14 (Centrale MP 08) 2

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Calculer le reste de la division euclidienne de $(n-1)!$ par n.

Exercice 15 (Sommes dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$) 2

Soit p un nombre premier et $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\sum_{x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} x^k \in \{-1, 0\}$. Préciser à quelle condition on obtient 0 ou -1.

Exercice 16 (Une caractérisation des carrés parfaits) 3

Soit n un entier strictement positif, et soit $d(n)$ le nombre d'entiers positifs divisant n. Prouver que $d(n)$ est impair si et seulement si n est un carré parfait (c'est-à-dire le carré d'un nombre entier).

Exercice 17 (Somme des diviseurs) 3

Pour tout entier naturel non nul n, on note $S(n)$ la somme de ses diviseurs naturels. Montrer que si m et n sont deux entiers naturels non nuls premiers entre eux, alors $S(mn) = S(m)S(n)$.

Exercice 18 (Nombre de diviseurs) 3

Démontrer que tout entier $n \geqslant 1$ a au moins autant de diviseurs de la forme $3k+1$ ($k \in \mathbb{N}$) que de diviseurs de la forme $3k-1$ ($k \in \mathbb{N}^*$)

7.3. Polynômes et algèbres

Exercice 19 (Calculs de restes) 0

1 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $a, b \in \mathbb{K}$, $a \neq b$. Quel est le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)$, par $(X-a)(X-b)$?

2 Trouver le reste de la division euclidienne de $X^6 - 5X^4 + 3X^3 - X^2 + X + 2$ par $(X-1)^3$.

3 Trouver par trois méthodes le reste de la division euclidienne de $P = X^5 + 4X^3 + 3X^2 - X + 6$ par $(X-1)^2(X+2)$.

4 Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Donner le reste de la division euclidienne de $(\cos\theta + X\sin\theta)^n$ par X^2+1.

5 Chercher le reste de la division euclidienne de $(X+1)^n - X^n - 1$ par $X^2 + X + 1$.

6 Soit $B = X^3 - X^2 + X - 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $A_n = (X^2+X+1)^n - X^{2n} - X^n - 1$.

i Donner une condition sur n pour que B divise A_n.

ii Donner le reste de la division euclidienne de A_n par B.

Exercice 20 (Bézout effectif) 0

Trouver les polynômes U et V tels que $AU + BV = A \wedge B$, où :

1 $A = X^5 + 1$ et $B = X^7 + X^6 + X^3 + 1$.

2 $A = X^5 - 1$ et $B = X^2 + X + 1$.

3 $A = (X^{10} - 1)$ et $B = (X^6 - 1)$.

Exercice 21 ((Centrale MP) Sous-espace de $\mathbb{R}_n[X]$) 0

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A = \{P \in \mathbb{R}_n[X], \sum_{k=1}^{n} P^{(k)}(1) = 0\}$. Quelle est la dimension de A ? Donner une base de A.

Exercice 22 ((Mines MP 08) Relations coefficients-racines) 0

Calculer : $\prod_{k=1}^{n-1}(1 - e^{2ik\pi/n})$ où $n \geqslant 2$.

Exercice 23 (Multiplicité de racines) 0

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que les racines complexes du polynôme $\prod_{k=0}^{n}(X-k) + a$ sont de multiplicité au plus 2.

Exercice 24 (Équation d'inconnue polynomiale) 1

Soit $\mathcal{A} = \{P \in \mathbb{C}[X], P \neq 0 \text{ et } P(X^2) = P(X)P(X-1)\}$.

1 Soit $P \in \mathcal{A}$. Montrer que les racines de P sont de module 1.

2 Déterminer A.

Exercice 25 (Théorème de Gauss-Lucas) 1

1 Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P.
2 Soit K un convexe fermé de $\mathbb{C}$ et $A = \{a \in \mathbb{C}, P^{-1}(\{a\}) \subset K\}$. Montrer que A est convexe.

Exercice 26 (Localisation des racines) 2

1 Soient $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ et $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n$. Montrer que les racines complexes de P ont un module majoré par $\max\{1, |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|\}$.
2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P(X) = nX^n - \sum_{k=0}^{n-1} X^k \in \mathbb{C}[X]$.
i Soit z une racine de P distincte de 1. Montrer que $|z| < 1$.
ii Montrer que les racines de P sont simples.

Exercice 27 (Polynômes stabilisant le cercle unité) 4

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.

Exercice 28 (Polynôme prenant aux entiers des valeurs entières) 4

Montrer qu'il n'existe pas de polynôme non constant $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, $P(n) \in \mathcal{P}$.

Exercice 29 (Identité polynomiale) 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{C}[X]$ unitaire de degré n, scindé à racines simples. On note $a_1, \dots, a_n$ les racines de P. Montrer que pour tout $Q \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{Q(a_i)}{P'(a_i)} = \frac{Q^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}.$$

Exercice 30 (Automorphismes de la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathbb{C}(X)$) 4

Déterminer les automorphismes de la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathbb{C}[X]$.

7.4. Anneaux

Exercice 31 (Sous-anneau engendré par 1/5) 0

Quel est le plus petit sous-anneau de $\mathbb{Q}$ contenant $1/5$? Quel est son groupe des inversibles ?

Exercice 32 (Nilradical d'un anneau commutatif) — 0

Soit $\mathcal{A}$ un anneau commutatif. Vérifier que l'ensemble $\mathcal{N}$ des éléments nilpotents de $\mathcal{A}$ est un idéal de $\mathcal{A}$.
On l'appelle *nilradical* de $\mathcal{A}$.

Exercice 33 (Anneau des entiers de Gauss) — 1

On pose $\mathbb{Z}[i] = \{z \in \mathbb{C}, \exists (a, b) \in \mathbb{Z}^2, \quad z = a + ib\}$. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau intègre pour les lois d'addition et de multiplication déduites de celles de $\mathbb{C}$. Déterminer les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.

Exercice 34 (Sous-anneau de $\mathbb{C}$ engendré par j) — 2

On note $j = e^{2i\pi/3}$ et on considère l'ensemble $\mathbb{Z}[i] = \{x + jy, (x, y) \in \mathbb{Z}^2\}$.
1 Montrer que $\mathbb{Z}[j]$ est un anneau.
2 Montrer que $u \in \mathbb{Z}[j]$ est inversible si et seulement si $|u| = 1$.
3 Montrer que l'ensemble des inversibles $\mathbb{Z}[j]^*$ est un groupe cyclique.

Exercice 35 (Puissances identiques dans un anneau fini) — 2

Soit A un anneau fini. Montrer l'existence d'entiers distincts m et n tels que, pour tout $x \in A$: $x^m = x^n$.

Exercice 36 (Idéaux maximaux) — 3

Un idéal propre $\mathcal{I}$ d'un anneau A est dit *maximal* si $\mathcal{I}$ et A lui-même sont les seuls idéaux de A contenant $\mathcal{I}$.
1 Donner les idéaux maximaux de $\mathbb{Z}$, de $K[X]$.
2 Donner les idéaux maximaux de $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.

Exercice 37 (Écriture de $(1 + \sqrt{2})^n$ comme somme de racines) — 4

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que
$$(1 + \sqrt{2})^n = \sqrt{p + 1} + \sqrt{p}.$$

7.5. Corps

Exercice 38 (Morphisme de corps) — 0

Montrer que tout morphisme de corps est injectif.

Exercice 39 (Condition suffisante pour être un corps) 3

Soit A un anneau commutatif fini non nul, et tel que, pour tout $x \in A$:

$$((x^2 = 0) \Rightarrow (x = 0)) \wedge ((x^2 = x) \Rightarrow (x \in \{0, 1\}))$$

Montrer que A est un corps.

Exercice 40 (Groupe d'automorphismes d'une extension quadratique de $\mathbb{Q}$) 3

On pose $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{z \in \mathbb{R}, \exists (a, b) \in \mathbb{Q}^2, \quad z = a + b\sqrt{3}\}$.

1 Établir que $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ est un corps pour les lois déduites de celles de $\mathbb{R}$.

2 Déterminer le groupe des automorphismes du corps $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

Exercice 41 (Une caractérisation des corps) 3

Soit A un anneau commutatif non nul dont tout idéal est premier, c'est-à-dire vérifie, pour tout $(x, y) \in A^2$:

$$xy \in I \Rightarrow x \in I \text{ ou } y \in I.$$

Montrer que A est un corps.

Exercice 42 (Corps algébriquement clos) 2 à 4

Un corps K est dit *algébriquement clos* si tout polynôme non constant à coefficients dans K admet une racine dans K.

1 Montrer qu'un corps algébriquement clos est de cardinal infini.

2 Donner un exemple de corps algébriquement clos.

3 Montrer que l'ensemble des nombres algébriques sur $\mathbb{Q}$ est un corps algébriquement clos.

8. Oraux

Exercice 43 (Décomposition en produit d'irréductibles) — 0

(CCP MP 08) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Factoriser en produit d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$: $X^{2n} - 2\cos(\theta)X^n + 1$.

Exercice 44 (2011 est-il la somme de deux carrés d'entiers ?) — 0

(CCP) Existe-t-il $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $a^2 + b^2 = 2011$?

Exercice 45 (Une base de $\mathbb{R}_n[X]$, dans laquelle on exprime la base canonique) — 0

(CCP) Soient $n \geqslant 2$ et, pour $k \in \{0, \dots, n\}$, $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$.
1 Montrer que $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2 Exprimer $1, X, \dots, X^n$ dans la base précédente.

Exercice 46 (D'un inverse à un autre) — 0

(Centrale PSI 10) Soit A un anneau, a et b dans A tels que $1 + ab$ est inversible. Montrer que $1 + ba$ est inversible d'inverse $1 - b(1+ab)^{-1}a$.

Exercice 47 (Parité du nombre d'idempotents dans un anneau) — 0

(Centrale PSI 10) Soit A un anneau non nul et $M = \{a \in A, a^2 = a\}$. On suppose que M est fini. Montrer que son cardinal est pair.

Exercice 48 (Inversibles de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ (Mines MP 08)) — 2

Déterminer le groupe des inversibles de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. Ce groupe est-il cyclique ?

Exercice 49 (Calcul de division euclidienne (Centrale MP 08)) — 2

Soit $n \geqslant 2$. Calculer le reste de la division euclidienne de $(n-1)!$ par n.

Exercice 50 (Nombre de carrés dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$) — 2

(Mines MP) Si p est un nombre premier, quel est le nombre de carrés de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?

Exercice 51 (Un polynôme irréductible sur $\mathbb{Q}$ de degré 3) — 2

1 Montrer que $X^3 - 2$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
On désigne par α une de ses racines complexes, et on pose

$$A = \{a + b\alpha + c\alpha^2, (a, b, c) \in \mathbb{Q}^3\}$$

2 Montrer que A est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

Exercice 52 (Pseudo division euclidienne) — 2

Soit $A = \{a + ib\sqrt{2};\ (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$.
1 Montrer que A est un anneau intègre.
2 Montrer qu'on peut définir une pseudo division euclidienne dans A (sans unicité) : pour tous $x \in A$ et $y \in A \setminus \{0\}$, il existe $(q, r) \in A^2$ tels que $x = qy + r$ et $|r| < |y|$.

Exercice 53 (Une curiosité polynomiale (Centrale PSI 10)) — 3

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ tel que $x + y + z = 0$. Montrer :

$$\frac{x^5 + y^5 + z^5}{5} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3}.$$

Exercice 54 (Polynôme scindé en prenant les parties réelles des coefficients) — 3

(Centrale PSI 10) Soit $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{C}[X]$. On suppose que toutes ses racines ont une partie imaginaire strictement négative. Montrer que le polynôme $Q(X) = \mathrm{Re}(a_0) + \mathrm{Re}(a_1)X + \cdots + \mathrm{Re}(a_n)X^n$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

Exercice 55 (Isomorphie de groupe d'unités (Mines MP 07)) — 3

Les groupes multiplicatifs $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^*$ et $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*$ sont-ils isomorphes ?

Exercice 56 (Anneau dont l'ensemble des inversibles est monogène) — 3

Soient A l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ et G l'ensemble des éléments inversibles de A.
1 Vérifier que G est un sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{R}^*$.
2 Soit $x + y\sqrt{7} \in G$. Donner, au signe près, une formule pour $\left(x + y\sqrt{7}\right)^{-1}$. En déduire un élément non trivial de G.
3 Pour $x + y\sqrt{7} \in G$, on pose $\Phi(x + y\sqrt{7}) = (\ln|x + y\sqrt{7}|, \ln|x - y\sqrt{7}|)$.
Montrer que Φ est un morphisme de G dans $(\mathbb{R}^2, +)$ dont on précisera le noyau. Montrer que $\mathrm{Im}\,\Phi$ est un sous-groupe discret de $\mathbb{R}^2$.
4 En déduire que $G = \{\pm(8 + 3\sqrt{7})^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Exercice 57 (Points sur le « cercle unité » dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$) 3

Soit p un nombre premier impair. Dénombrer les $(x,y)\in(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$ tels que : $x^2+y^2=1$.

Exercice 58 (Calculs dans une extension de $\mathbb{Q}$ de degré 3) 3

Soit θ l'unique racine réelle de $P=X^3-X+1$. Montrer que $\mathbb{Q}(\theta)$ est un corps. Calculer l'inverse de $\theta^2-2\theta-3$.

Exercice 59 (Irréductibles d'un anneau de matrices) 3

1 Décrire les inversibles de l'anneau $A=\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

2 Un élément M non inversible de A est dit irréductible si l'égalité $M=UV$ avec U et V dans A implique que l'une des deux matrices U,V est un inversible de A. Une matrice de A de déterminant nul peut-elle être irréductible ?

3 Caractériser les irréductibles de A.

Exercice 60 ($\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ sont-ils isomorphes en tant qu'algèbres ?) 4

(X MP 06) Existe-t-il un isomorphisme d'algèbres entre $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$?

Exercice 61 (Polynômes cyclotomiques (X MP 07)) 4

On définit par l'égalité

$$\Phi_n(X)\overset{def}{=}\prod_{k\wedge n}\left(X-e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$$

le *polynôme cyclotomique* d'ordre n, le produit portant sur les entiers $k\in[\![1,n]\!]$ premiers avec n.

1 Montrer que $\prod_{k|n}\Phi_d(X)=X^n-1$, le produit ne portant que sur les diviseurs positifs de n.

2 Montrer que $\Phi_n\in\mathbb{Z}[X]$.

CHAPITRE IX

Fonctions vectorielles

Sommaire

Au chapitre sur les evn, nous avons entre autres étendu la notion de continuité d'une application. En suivant le cours de MPSI, il est naturel de se demander comment étendre la notion de dérivation. Cela ne peut pas se faire de manière évidente pour une fonction définie sur une partie d'un evn, à valeurs dans un evn, puisqu'on ne voit pas comment définir l'équivalent d'un taux d'accroissement dans ce cadre général. Cependant, si la fonction considérée est *vectorielle*, c'est-à-dire à valeurs dans un evn mais à variable réelle, il est facile de définir un taux d'accroissement, puis la notion de dérivée.

Le fait de supposer en outre l'evn d'arrivée de dimension finie nous permettra de raisonner sur les fonctions composantes, et, partant, de nous ramener au cas déjà traité des fonctions à variable réelle et à valeurs numériques. Cela fait de la théorie des fonctions vectorielles une extension simple et naturelle de celle des fonctions numériques.

Nous verrons plus tard que « grossir » l'ensemble de départ, *i.e.* travailler avec des fonctions définies sur un evn et à valeurs dans un evn, va nécessiter beaucoup plus de travail pour définir de façon satisfaisante une extension de la notion de dérivée d'une application.

De même, nous aimerions définir l'intégrale d'une fonction sur son domaine. Là encore, si on travaille avec une fonction définie entre deux evn, l'extension de la définition ne va pas de soi. On va se ramener au cas déjà connu des fonctions numériques d'une variable réelle en nous limitant au cas des fonctions vectorielles à valeurs dans un evn de dimension finie.

Enfin, en interprétant les vecteurs comme des points (*i.e.* en passant d'une structure vectorielle à une structure affine), les fonctions vectorielles fournissent un cadre théorique d'étude de points mobiles, de trajectoires, et des notions associées : vecteurs vitesse et accélération par exemple. Cela fait l'objet de la dernière section (arcs paramétrés), mais vous pouvez avoir cette interprétation cinématique en tête tout au long de ce chapitre.

Sauf mention contraire, on fixe les notations suivantes :

– $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, I et J sont des intervalles d'intérieur non vide, a, b, t, t_0 et x seront des points de I. On note $|a,b|$ le segment d'extrémités a et b : si $a \leqslant b$, c'est $[a,b]$, et si $b \leqslant a$, c'est $[b,a]$. La notation $[a,b]$ indique implicitement que $a \leqslant b$.
– E, F, G, H sont des evn sur $\mathbb{K}$, de dimension finie (non nulle). On note $p \in \mathbb{N}^*$ la dimension de E, et on fixe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ de E.

– f et g seront des applications de I dans E.
– n est un entier naturel.

Ceux qui ne sont pas à l'aise avec les formes linéaires coordonnées pourront supposer, en première lecture, que $E = \mathbb{K}^p$, et que $\mathcal{B}$ est la base canonique de E (c'est le cas le plus souvent rencontré en pratique).

1. Généralités sur les fonctions vectorielles

1.1. Définition, fonctions coordonnées dans une base

Définition (Fonction vectorielle)

On appelle *fonction vectorielle* une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{R}$, et à valeurs dans un evn E.

1.a

Il est intéressant de voir les éléments de A comme mesurant des instants, et les éléments de E, qui sont des vecteurs, seront souvent interprétés comme représentant une position d'un point mobile à un instant donné.

En pratique, A est un intervalle d'intérieur non vide I, et E est de dimension finie.

L'ensemble des fonctions vectorielles de I dans E peut se noter $\mathcal{F}(I, E)$ ou E^I. Grâce à la structure d'espace vectoriel de E, on peut munir E^I d'une loi d'addition et d'une loi externe de multiplication, qui lui confèrent une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Si E est en outre une $\mathbb{K}$-algèbre, alors on en déduit une structure de $\mathbb{K}$-algèbre sur E^I. On rappelle que la loi de multiplication interne est alors continue (vue comme application de E^2 dans E), puisque bilinéaire en dimension finie.

Définition (Application norme d'une fonction vectorielle)

On appelle application *norme de f* et on note $\|f\|$ la fonction

$$\|f\| : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R}_+ \\ t & \mapsto & \|f(t)\| \end{array}$$

1.b

Il faut bien noter ici que $\|f\|$ désigne la composée $\|\cdot\| \circ f$, et non la norme d'un élément de E^I. Nous n'avons pas muni E^I d'une structure d'evn.

Définition (Fonctions coordonnées associées à une fonction vectorielle dans une base)

On appelle p-uplet des fonctions coordonnées de f dans la base $\mathcal{B}$, l'unique p-uplet $(f_1, \dots, f_p)$ de fonctions de I dans $\mathbb{K}$, tel que, pour tout $t \in I$:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{p} f_i(t) e_i$$

Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, f_i s'appelle la *i-ème fonction coordonnée de f* dans la base $\mathcal{B}$.

1.c

Nous fixons ces notations pour la suite de ce cours.

En principe, f_i dépend (évidemment de i, mais aussi) de $\mathcal{B}$, et une notation moins ambiguë pourrait être $f_{i,\mathcal{B}}$ par exemple.

Fonctions coordonnées

En termes savants, si on note $(e_1^*, \dots, e_p^*)$ la base duale de $\mathcal{B}$, on a, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$: $f_i = e_i^* \circ f$.

1.1

Exemple (Fonctions coordonnées)

Si E est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, et si $\mathcal{B} = (1, i)$, alors les fonctions coordonnées de f sont les fonctions $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ vues l'année dernière.

i

1.2. Continuité d'une fonction vectorielle

I étant une partie de l'evn $\mathbb{R}$, le cours sur les evn s'applique : on peut définir la *continuité* de f en un point, sur I tout entier. On peut même définir $\mathcal{C}(I, E)$, et constater que c'est un sous-espace vectoriel de E^I, et même une sous-algèbre si E est une $\mathbb{K}$-algèbre.

On sait aussi :

(1) que f est continue, que ce soit ponctuellement ou globalement, si et seulement si ses fonctions coordonnées (dans une base quelconque) le sont.

(2) que la continuité (ponctuelle ou globale) de f ne dépendra pas de la norme choisie sur E, puisqu'elles sont toutes équivalentes (on rappelle que E est de dimension finie).

1.3. Comparaison des fonctions vectorielles

On peut étendre sans difficulté au cadre des fonctions vectorielles les relations de comparaison sur les fonctions numériques vues en première année :

Définition (Relations de comparaison pour les fonctions vectorielles)

On considère ici des fonctions $f : I \to E$ et $g : I \to F$.

(1) On notera $f(t) = \mathrm{o}_{t \to t_0}(g(t))$, et on dira que *$f$ est négligeable devant g en t_0*, si $\|f(t)\| = \mathrm{o}_{t \to t_0}(\|g(t)\|)$, *i.e.* s'il existe une fonction ε, de I dans $\mathbb{R}_+$, de limite nulle en t_0, telle que $\|f(t)\| = \varepsilon(t)\,\|g(t)\|$ sur un voisinage relatif de t_0 dans I.

(2) (Ici, $F = E$, de façon à donner un sens à $f - g$) On notera $f(t) \sim_{t \to t_0} (g(t))$, et on dira que *$f$ est équivalente à g en t_0*, si $f(t) - g(t) = \mathrm{o}_{t \to t_0}(g(t))$.

(3) On notera $f(t) = \mathrm{O}_{t \to t_0}(g(t))$, et on dira que *$f$ est dominée par g en t_0*, si $\|f(t)\| = \mathrm{O}_{t \to t_0}(\|g(t)\|)$, *i.e.* s'il existe une fonction β, de I dans $\mathbb{R}_+$, bornée au voisinage de t_0, telle que $\|f(t)\| = \beta(t)\,\|g(t)\|$ sur un voisinage relatif de t_0 dans I.

1.d

On ne développe pas plus cette partie, mais le lecteur pourra réfléchir à ce qui, dans son cours de première année sur les relations de comparaison, s'étend (ou pas) à ce nouveau cadre.

2. Dérivation des fonctions vectorielles

2.1. Définition, dérivabilité à gauche et à droite

Définition (Fonction de taux d'accroissement d'une fonction en un point)

On appelle fonction *taux d'accroissement de f en t_0* et on note $\tau_{t_0}(f)$ l'application

$$\tau_{t_0}(f) \;:\; \begin{array}{rcl} I \setminus \{t_0\} & \to & E \\ t & \mapsto & \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} \end{array}$$

2.a

Cette fonction est bien définie, car la division par $t - t_0$ n'est que la multiplication par le *réel* $\frac{1}{t-t_0}$ (lui-même bien défini car $t - t_0$ est un élément non nul du corps $\mathbb{R}$).

Définition (Dérivabilité en un point d'une fonction vectorielle)

On dit que f est *dérivable* en t_0 si l'application $\tau_{t_0}(f)$ admet une limite finie l en t_0. Si tel est le cas, l est appelée *dérivée* de f en t_0, et notée $f'(t_0)$.

2.b

Dans le cas où $E = \mathbb{K}$, on retrouve la définition de la dérivabilité vue en première année.

Interprétation cinématique de la dérivée

Si on interprète f comme une fonction d'une variable temporelle t, et dont les valeurs représentent des positions, le taux d'accroissement de f entre t et t_0 peut être interprété comme la vitesse vectorielle moyenne entre les instants t_0 et t : en faisant tendre t vers t_0, on obtient la vitesse vectorielle instantanée en t_0.

2.1

Illustration

Proposition (Dérivabilité et développement limité à l'ordre un)

f est dérivable en t_0 si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en t_0, *i.e.* il existe $\gamma \in E$ tel que

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)\gamma + o_{t \to t_0}(t - t_0).$$

Si tel est le cas, on a $\gamma = f'(t_0)$.

2.a

Démonstration

$\square$

Dérivabilité et approximation affine

Ainsi, f est dérivable en t_0 si et seulement si elle est égale à une fonction affine [a], à un négligeable devant $t \mapsto (t - t_0)$ en t_0 près.

a. *i.e.* la somme d'une fonction constante et d'une fonction linéaire.

2.2

Illustration

Corollaire (Lien entre dérivabilité et continuité d'une fonction vectorielle)

Si f est dérivable en t_0, alors elle est continue en t_0.

2.b

Bien évidemment, la réciproque est fausse.

Traduction de la dérivabilité à l'aide des coordonnées

La fonction f est dérivable en t si et seulement si pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, les fonctions coordonnées f_i sont dérivables en t, et on a alors :

$$f'(t) = \sum_{i=1}^{p} f_i'(t) e_i$$

La dérivabilité d'une fonction vectorielle s'écrit donc comme une conjonction de dérivabilités de fonction numériques, et il nous sera donc possible de recourir au cours de première année.

2.3

Dans le cas banal où $E = \mathbb{K}^p$ et $\mathcal{B}$ est la base canonique de E, on a

(1) $f = (f_1, \ldots, f_p)$.

(2) Équivalence entre la dérivabilité de f en t et celle de chaque f_i.

(3) Le cas échéant :

$$f'(t) = (f_1'(t), \ldots, f_p'(t))$$

Exercice (Sous-groupe à un paramètre de matrices)

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on introduit l'application

$$\exp_A : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ t & \mapsto & \exp(tA) \end{array}$$

1 Montrer que pour tout réel t, $\exp(tA)$ et A commutent.

2 Montrer que $\exp_A$ est dérivable en 0, et que

$$\exp_A'(0) = A$$

3 En admettant que pour tous réels s et t, $\exp_A(s+t) = \exp_A(s)\exp_A(t)$, vérifier que $\exp_A$ est dérivable en tout réel t, et que :

$$\exp_A'(t) = A\exp(tA) = \exp(tA)A.$$

4 (Question facultative) Montrer directement le résultat précédent (sans admettre de résultat).

1

Définition (Dérivabilité à droite et à gauche d'une fonction en un point)

On dit que f est *dérivable à gauche* en t_0 si $\tau_a(f)$ admet une limite finie l_g à gauche en t_0. On appelle alors *dérivée à gauche* de f en t_0, et on note $f_g'(t_0)$, le vecteur

$$f_g'(t_0) \overset{def}{=} l_g$$

On définit de même la *dérivabilité à droite* de f en t_0 (ainsi que la *dérivée à droite* en t_0 et la notation $f_d'(t_0)$).

2.c

Lorsque $t_0 \in \overset{\circ}{I}$, on a équivalence entre :

(1) f est dérivable en t_0.

(2) f est dérivable à gauche et à droite en t_0, et $f_g'(t_0) = f_d'(t_0)$.

Le fait que f soit dérivable à gauche et à droite en t_0 n'est pas une condition suffisante pour que f soit dérivable en t_0 (en revanche, c'est une condition suffisante de continuité en t_0) :

Illustration

C'est l'occasion de reprendre un exercice de cours sur la convexité :

Exercice (Régularité des fonctions convexes) 2

Montrer qu'une fonction convexe f sur I est continue sur $\mathring{I}$ (l'intérieur de I, *i.e.* l'ensemble des points dont I est un voisinage), dérivable à gauche et à droite en tout point a de $\mathring{I}$, et $f'_g(a) \leqslant f'_d(a)$.
Montrer qu'elle n'est pas nécessairement continue en les extrémités de I, et que si elle l'est, elle n'y est pas forcément dérivable.

2.2. Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition (Combinaison linéaire de fonctions dérivables) 2.c

L'ensemble Ω des fonctions de I dans E, dérivables en a est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et l'application

$$\begin{array}{rccc} \Delta : & \Omega & \to & E \\ & f & \mapsto & f'(a) \end{array}$$

est linéaire.

Démonstration

$\square$

Il n'y a pas de formule générale pour la dérivation d'une composée, car la notion de dérivée n'a de sens pour le moment que pour une fonction d'une variable réelle : on peut cependant proposer des formules lorsqu'on compose à gauche par des applications linéaires (proposition 2.d), voire multilinéaires (proposition 2.e et l'exercice 4 de cours), ou quand on compose à droite par une fonction réelle d'une variable réelle (proposition 2.f).

Proposition (Dérivation et composition par une application linéaire) 2.d

Si f est dérivable en a, et si $L \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $L \circ f$ est dérivable en a, et

$$(L \circ f)'(a) = L(f'(a))$$

Démonstration

□

Exemple (Dérivation et composition par une application linéaire)

Si $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une application dérivable en a, et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et si on note ψ la fonction $t \mapsto \operatorname{tr}(BA(t))$, alors ψ est dérivable en a, et :

$$\psi'(a) = \operatorname{tr}(BA'(a))$$

i

Proposition (Dérivation et composition avec une application bilinéaire)

Si $f : I \to E$ et $g : I \to F$ sont dérivables en a, et si $B : E \times F \to G$ est bilinéaire, alors $B(f, g)$ est dérivable en a, et

$$(B(f, g))'(a) = B(f(a), g'(a)) + B(f'(a), g(a)).$$

2.e

Démonstration

□

Exemple (Opérations sur les fonctions dérivables)

On suppose f et g dérivables en a.

(1) Dans le cas particulier E est une $\mathbb{K}$-algèbre, et pour $B : (u,v) \mapsto uv$, on a
$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$
En particulier, dans le cas où $E = \mathbb{K}$, on retrouve la formule de dérivation d'un produit vue en première année.

(2) Dans le cas particulier où $(E, (\cdot|\cdot))$ est un espace préhilbertien réel, $(f|g)$ est dérivable en a, et
$$(f|g)'(a) = (f'(a)|g(a)) + (f(a)|g'(a))$$

(3) Dans le cas particulier où E est un plan vectoriel, $\det(f,g) : t \mapsto \det(f(t),g(t))$ est dérivable en a (où det désigne le déterminant dans une base fixée de E), et
$$(\det(f,g))'(a) = \det(f'(a),g(a)) + \det(f(a),g'(a))$$

(4) Dans le cas particulier de $B : (\alpha,u) \in \mathbb{K} \times E \mapsto \alpha u$, et si $\lambda : I \to \mathbb{K}$ est dérivable en a, alors λf est dérivable en a, et :
$$(\lambda f)'(a) = \lambda'(a)f(a) + \lambda(a)f'(a)$$

ii

Exemple (Dérivée d'un produit de fonctions à valeurs matricielles)

Si A et B sont des fonctions de I dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, dérivables en a, alors AB est dérivable en a et
$$(AB)'(a) = A'(a)B(a) + A(a)B'(a)$$

iii

Exercice (Trajectoire sur une sphère)

On suppose que la norme de E est issue d'une norme euclidienne, que f est dérivable en a, et que toutes les valeurs de f sont situés sur une même sphère centrée en 0_E. Montrer que le vecteur vitesse $f'(a)$ est orthogonal au vecteur position $f(a)$.

3

Exercice (Dérivation et composition par une application multilinéaires)

Proposer et établir une extension de la proposition 2.e aux applications multilinéaires.

4

Proposition (Composée d'applications dérivables)

Soit $\varphi : J \to I$ une fonction dérivable en $b \in J$. On suppose f dérivable en $a \overset{def}{=} \varphi(b)$. La fonction $f \circ \varphi$ est alors dérivable en b, et
$$(f \circ \varphi)'(b) = \varphi'(b)f'(\varphi(b)) = \varphi'(b)f'(a)$$

2.f

Démonstration

On a

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\gamma(x),$$

où γ est une fonction de limite nulle en a, et

$$\varphi(t) = \varphi(b) + (t-b)\varphi'(b) + (t-b)\delta(t) = a + (t-b)\varphi'(b) + (t-b)\delta(t),$$

où δ est de limite nulle en b, de sorte que

$$\begin{array}{rcl} f(\varphi(t)) & = & f(\varphi(b)) + ((t-b)\varphi'(b) + (t-b)\delta(t))f'(a) \\ & + & ((t-b)\varphi'(b) + (t-b)\delta(t))\gamma(\varphi(t)) \end{array}$$

soit

$$f(\varphi(t)) = f(\varphi(b)) + (t-b)\varphi'(b)f'(a) + \mathrm{o}_{t \to b}(t-b)$$

d'où le résultat.

□

2.3. Dérivabilité globale

Définition (Dérivabilité globale)

On dit que f est *dérivable sur* I si elle est dérivable en chaque point de I. On peut alors définir l'*application dérivée* de f de I dans E, notée f'.
On note $\mathcal{D}(I,E)$ l'ensemble des applications dérivables de I dans E.

2.d

Les résultats ci-dessus sur la dérivabilité ponctuelle fournissent de nombreux résultats naturels sur la notion de dérivabilité globale : si f est dérivable sur I, alors elle est continue sur I. L'application

$$\Delta \ : \ \begin{array}{rcl} \mathcal{D}(I,E) & \to & E^I \\ f & \mapsto & f' \end{array}$$

est linéaire, et, si E est une $\mathbb{K}$-algèbre, alors $\mathcal{D}(I,E)$ est une sous-algèbre de E^I, et, pour tout $(f,g) \in \mathcal{D}(I,E)$:

$$(fg)' = f'g + fg'$$

De même pour la dérivée de $B(f,g)$ si B est bilinéaire, etc.

Exercice (Paramétrage de matrices orthogonales)

Soit $f \ : I \to \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ une application dérivable.
1 En exploitant le fait que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ soit inclus dans une sphère centrée en 0_n pour la structure euclidienne canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, vérifier que pour tout $t \in I$, $f'(t)(f(t))^T$ est [a] de trace nulle.
2 En revenant à la définition d'une matrice orthogonale, vérifier que $f'(t)(f(t))^T$ est en fait antisymétrique [b].

a. On a ici noté A^T la tranposée d'une matrice A, pour des raisons évidentes.
b. Au fait, pourquoi est-ce bien plus fort ?

5

2.4. Dérivées successives

Définition (Dérivabilité à l'ordre k d'une fonction vectorielle)

On appelle *dérivée à l'ordre* 0 de f et on note $f^{(0)}$ l'application f elle-même.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, si la dérivée $f^{(k-1)}$ de f à l'ordre $k-1$ de f existe et est dérivable, alors on dit que f est k *fois dérivable*, et on appelle *dérivée à l'ordre* k de f et on note $f^{(k)}$ la fonction

$$f^{(k)} \stackrel{def}{=} (f^{(k-1)})'$$

On note $\mathcal{D}^k(I, E)$ l'ensemble des fonctions de I dans E, k fois dérivables.

2.e

Plus finement, si f est k fois dérivable, et si $f^{(k)}$ est dérivable en a, alors on définit la dérivée de f en a à l'ordre $k+1$, et on note $f^{(k+1)}(a)$, le vecteur $(f^{(k)})'(a)$.

Si f est k fois dérivable, alors, pour tous entiers naturels i et j de somme k : $(f^{(i)})^{(j)} = f^{(k)}$.

La linéarité de la dérivation permet d'obtenir immédiatement :

Proposition (Dérivation à l'ordre k)

Soit $k \in \mathbb{N}$. La fonction

$$\varphi_k \ : \ \begin{array}{ccc} \mathcal{D}^k(I, E) & \to & E^I \\ f & \mapsto & f^{(k)} \end{array}$$

est linéaire.

2.g

Si E est une $\mathbb{K}$-algèbre, on a la formule de Leibniz :

Proposition (Formule de Leibniz)

Soit $k \in \mathbb{N}$. Si f et g sont k fois dérivables, alors fg est k fois dérivable, et

$$(fg)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)} g^{(k-i)}$$

2.h

En fait, on a une formule plus générale, que l'on peut encore appeler formule de Leibniz :

Proposition (Formule de Leibniz généralisée)

Soit $B \ : E \times F \to G$ une application bilinéaire. Si $f \ : I \to E$ et $g \ : I \to F$ sont k fois dérivables, alors $B(f, g)$ l'est également, et

$$(B(f, g))^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} B(f^{(i)}, g^{(k-i)})$$

2.i

Démonstration

$\square$

Exemple (Formule de Leibniz généralisée) iv

Cette formule s'applique notamment au cas de λf, où $\lambda : I \to \mathbb{K}$ est une fonction numérique k fois dérivable.

Proposition (Composition de fonctions k fois dérivables) 2.j

Soit $\varphi : J \to I$ une application. On suppose que f et φ sont k fois dérivables. L'application $f \circ \varphi$ est alors k fois dérivable.

Démonstration

$\square$

En revanche, on ne donne pas de formule simple pour la dérivée k-ième d'une composée.

Définition (Applications continûment dérivables) 2.f

Soit $k \in \mathbb{N}$. On dit que f est de *classe* $\mathcal{C}^k$, ou que f est k *fois continûment dérivable*, si f est k fois dérivable et si $f^{(k)}$ est continue.
On dit que f est de *classe* $\mathcal{C}^\infty$, ou que f est *indéfiniment dérivable*, si f est k fois dérivable pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, on note $\mathcal{C}^k(I, E)$ l'ensemble des fonctions de I dans E, de classe $\mathcal{C}^k$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{D}^{k+1}(I, E) \subset \mathcal{C}^k(I, E) \subset \mathcal{D}^k(I, E)$$

et

$$\mathcal{C}^\infty(I, E) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^n(I, E) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{D}^n(I, E).$$

Proposition (Opérations sur les applications continûment dérivables)

Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. L'ensemble $\mathcal{C}^k(I, E)$, muni des lois usuelles, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. C'est même une $\mathbb{K}$-algèbre si E est une $\mathbb{K}$-algèbre.

2.k

Démonstration

$\square$

Vecteur accélération

Si f est deux fois dérivable, et si elle a un argument temporel et des valeurs donnant une position, alors le taux d'accroissement de f' entre t_0 et t (supposés distincts) s'interprète comme l'accélération moyenne de f entre t_0 et t, et la limite de ce taux lorsque t tend vers t_0 est l'accélération instantanée de f en t_0.

2.4

3. Intégration sur un segment

3.1. Définition, sommes de Riemann

On rappelle que $f = \sum_{i=1}^{n} f_i e_i$.

Définition (Continuité par morceaux d'une fonction vectorielle)

On dit que f est *continue par morceaux* si chacune de ses fonctions coordonnées (dans une base quelconque) l'est.

3.a

Définition (Intégrale d'une fonction vectorielle continue par morceaux sur un segment)

On appelle *intégrale de f sur* $[a, b]$ et on note $\int_{[a,b]} f$ ou $\int_a^b f$ ou $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ le vecteur

$$\int_{[a,b]} f \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b f_i(t)\mathrm{d}t \right) e_i$$

3.b

Démonstration

Du fait que cette définition ne dépende pas de la base choisie : considérons une base $(e'_1, \dots, e'_n)$, et notons $M = (m_{i,j})$ la matrice de cette base dans $(e_1, \dots, e_n)$. On a donc, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$:

$$e'_j = \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} e_i$$

On sait aussi que si $(x_1, \dots, x_n)$ et $(x'_1, \dots, x'_n)$ sont les n-uplets de coordonnées d'un vecteur x de E dans $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ respectivement, alors, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} x'_j$$

Ainsi, si on note $(g_1, \dots, g_n)$ le n-uplet des fonctions coordonnées de f dans $\mathcal{B}'$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \left(\int_a^b g_j(t)\mathrm{d}t \right) e'_j &= \sum_{j=1}^{n} \left(\int_a^b g_j(t)\mathrm{d}t \right) \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} e_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\int_a^b g_j(t)\mathrm{d}t \right) m_{i,j} e_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b \left(\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} g_j(t)\mathrm{d}t \right) \right) e_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b f_i(t)\mathrm{d}t \right) e_i
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

$\square$

Vous avez déjà calculé ce genre d'intégrales en physique et en SI, par exemple lors de l'intégration d'un champ de vecteurs en mécanique et électromagnétisme.

Grâce aux propriétés de l'intégrale d'une fonction numérique continue par morceaux sur un segment, on obtient immédiatement les propriétés suivantes :

Proposition (Linéarité de l'intégrale) 3.a

L'application

$$\begin{array}{rccc} \Delta : & \mathcal{C}_{pm}([a, b], E) & \to & E \\ & f & \mapsto & \int_{[a,b]} f \end{array}$$

est linéaire.

Proposition (Relation de Chasles) 3.b

Pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in [a, b]$, tout $f \in \mathcal{C}([a, b], E)$, on a :

$$\int_{\alpha}^{\gamma} f(t)\mathrm{d}t = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)\mathrm{d}t + \int_{\beta}^{\gamma} f(t)\mathrm{d}t.$$

Définition (Sommes de Riemann associées à une subdivision régulière)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle *somme de Riemann* de f associée à la subdivision régulière de $[a,b]$ de pas $\frac{b-a}{n}$ pointée à droite et on note $S_{n,d}(f)$ le vecteur

$$S_{n,d}(f) \overset{def}{=} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)$$

On appelle *somme de Riemann* de f associée à la subdivision régulière de $[a,b]$ de pas $\frac{b-a}{n}$ pointée à gauche et on note $S_{n,g}(f)$ le vecteur

$$S_{n,g}(f) \overset{def}{=} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)$$

3.c

Illustration

En reprenant le cours de première année, et la définition de l'intégrale d'une fonction vectorielle, on a immédiatement :

Proposition (Convergence des sommes de Riemann)

Si $f \in \mathcal{C}^0(I,E)$, alors pour tout $(a,b) \in I^2$, où $a \leqslant b$, les suites $(S_{n,g}(f))$ et $(S_{n,d}(f))$ convergent vers $\int_a^b f$.

3.c

Proposition (Inégalité triangulaire intégrale)

Pour tout $f \in \mathcal{C}^{pm}(I,E)$:

$$\left\| \int_{[a,b]} f \right\| \leqslant \int_{[a,b]} \|f\| .$$

3.d

Démonstration

Utiliser les sommes de Riemann. □

En revanche, il n'y a pas lieu, dans ce contexte généralisé où E n'est pas supposé ordonné, d'étudier la positivité ou la croissance de l'intégrale, ni la stricte croissance pour les fonctions continues.

Exercice (Inégalité de Jensen) 6

On suppose $E = \mathbb{R}$, f continue, et on considère une fonction continue convexe φ, définie sur $f(I)$. Montrer que pour tout $a, b \in I$ distincts :

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(f(t))\mathrm{d}t.$$

C'est l'inégalité de Jensen, qui est la version intégrale de l'inégalité de convexité généralisée.

3.2. Intégrale fonction de sa borne supérieure

Définition (Primitive d'une fonction vectorielle continue) 3.d

On suppose f continue. On appelle *primitive* de f (sur I) toute fonction F de I dans E, dérivable sur I, de dérivée f.

Si F est une fonction dérivable de I dans E, et si on note $(F_1, \ldots, F_p)$ le p-uplet de ses fonctions composantes dans $\mathcal{B}$, F est une primitive de f si et seulement si F_i est une primitive de f_i pour tout $i \in [\![1, p]\!]$.

Proposition (Deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante) 3.e

Deux primitives F et G de f sur I diffèrent d'un vecteur constant.
En particulier, si deux primitives F et G de f sur I coïncident en un point, alors elles sont égales.

Démonstration

Cela résulte immédiatement de la propriété analogue pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$ (établie dans le cours de MPSI). □

Théorème fondamental de l'analyse (vectoriel) 3.f

On suppose f continue. La fonction

$$F : \begin{array}{ccc} I & \to & E \\ x & \mapsto & \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \end{array}$$

est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a.

Démonstration

L'unicité est claire d'après la proposition précédente. Soit $x \in I$ et $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $x + h \in I$. On a

$$\begin{aligned} \left\| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right\| &= \left\| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t - f(x) \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x))\mathrm{d}t \right\| \\ &\leqslant \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \|f(t) - f(x)\| \,\mathrm{d}t \right| \end{aligned}$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $t \in I$ tel que $|t - x| \leqslant \delta$, on ait :

$$\|f(t) - f(x)\| \leqslant \varepsilon$$

Ainsi, pour tout $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $|h| \leqslant \delta$ et $x + h \in I$, on a :

$$\left\| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right\| \leqslant \varepsilon$$

d'où le résultat (on a clairement $F(a) = 0$).

□

Primitive et fonction continue par morceaux (lecture facultative) 3.1

A priori, nous pourrions définir la notion de primitive d'une fonction continue par morceaux f comme une fonction dérivable F telle que $F' = f$. Nous venons de voir que dans le cas particulier où f est continue, il existait une telle primitive. Qu'en est-il pour les fonctions supposées seulement continues par morceaux ? Soit f une fonction continue par morceaux. On sait que f peut s'écrire comme somme d'une fonction continue g et d'une fonction en escalier h. Si f admet une primitive, alors h également. Or il est relativement facile de voir qu'une fonction en escalier qui admet une primitive est nécessairement continue [a], donc f est en fait continue : il n'est donc pas envisageable d'étendre la notion de primitive des fonctions continues aux fonctions continues par morceaux.
Cependant, on peut trouver des fonctions dérivables de dérivée non continue, et on pourrait donc parler de primitives de certaines fonctions non continues (mais qui ne sont pas non plus continues par morceaux).

a. On peut aussi le voir avec le théorème de Darboux, mais c'est plus sophistiqué

Théorème (Inégalité des accroissements finis) 3.g

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b], E)$. On suppose avoir un majorant M de la fonction $\|f'\|$. On a alors

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant M(b - a).$$

Démonstration

D'après le théorème fondamental de l'analyse,

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\mathrm{d}t$$

donc

$$\|f(b) - f(a)\| = \left\|\int_a^b f'(t)\mathrm{d}t\right\| \leqslant \int_a^b \|f'(t)\|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b M\mathrm{d}t = M(b-a)$$

□

On peut prendre $M = \sup\{\|f'(t)\|\,, t \in [a,b]\}$, et on peut noter que ce sup est un max.

Affaiblissement des hypothèses pour l'inégalité des accroissements finis 3.2

Le lecteur connaissant son cours de MPSI sur le bout des ongles sait que l'inégalité ici proposée est valable dans un cadre beaucoup moins exigeant dans le cas des fonctions à valeurs réelles : il suffit de supposer f continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$.
On peut se rapprocher d'un tel énoncé en supposant f continue de $[a,b]$ dans E, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b[$.

Dérivée bornée et caractère lipschitzien 3.3

Soit $f \in \mathcal{C}^1(I,E)$, $K \in \mathbb{R}_+$. La fonction f est K-lipschitzienne si et seulement si la fonction $\|f'\|$ est majorée par K.

Théorème du prolongement continûment dérivable pour les fonctions vectorielles 3.4

Si $f\ :]a,b] \to E$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et si f et f' sont prolongeables par continuité en a, alors f est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.

Exercice (Un raffinement de l'inégalité des accroissements finis) 7

On suppose g à valeurs réelles, f et g continues sur $[a,b]$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b[$, et telles que, pour tout $t \in]a,b[$, $\|f'(t)\| \leqslant g'(t)$. Montrer que :

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant (g(b) - g(a)).$$

Il n'y a pas de théorème de Rolle vectoriel

On rappelle qu'il n'y a pas de prolongement du théorème de Rolle aux fonctions vectorielles, et donc pas de prolongement non plus de l'égalité des accroissements finis.

On rappelle également qu'en première année, l'inégalité des accroissements finis est vue comme une conséquence de l'égalité correspondante.
Pourtant, l'inégalité des accroissements finis reste essentiellement valable dans le cadre des fonctions vectorielles : c'est une belle illustration de l'adage « une invalidité de preuve n'est pas une preuve d'invalidité ».

3.5

3.3. Techniques de calcul d'intégrales et de primitives

Nous avons revu en début d'année les techniques de calcul de primitives.

La définition de l'intégrale permet d'établir des formules de changement de variable, et d'intégration par parties, dans le cadre des fonctions vectorielles :

Proposition (Intégration par parties pour les fonctions vectorielles)

Soit $B : E \times F \to G$ une application bilinéaire, $g : I \to F$. Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$, alors, pour tous $a, b \in I$:

$$\int_a^b B(f'(t), g(t))\mathrm{d}t = [B(f(t), g(t))]_a^b - \int_a^b B(f(t), g'(t))\mathrm{d}t$$

3.h

Démonstration

Il suffit d'intégrer sur le segment $[a, b]$ la relation

$$(B(f, g))' = B(f', g) + B(f, g')$$

$\square$

L'intégration par parties sert :

(1) à se débarrasser des fonctions telles que ln, arctan, voire arcsin.

(2) à analyser un comportement asymptotique ou une limite (par exemple, pour montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ est convergente).

Proposition (Changement de variable pour les fonctions vectorielles)

Soit $\varphi : J \to I$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. La fonction f est supposée continue. On a alors, pour tous $a, b \in J$:

$$\int_a^b \varphi'(t) f(\varphi(t))\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\mathrm{d}u$$

3.i

Démonstration

$\square$

Enfin, on a :

Proposition (Image d'une intégrale par une application linéaire)

On suppose f continue. Soit $L \in \mathcal{L}(E, F)$. On a :

$$L\left(\int_a^b f\right) = \int_a^b L \circ f$$

3.j

Démonstration

Considérons les applications $x \in [a, b] \mapsto L\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)$ et $x \in [a, b] \mapsto \int_a^x (L \circ f)(t)\mathrm{d}t$. Ces deux applications sont dérivables, de même dérivée $L \circ f$, et égales en a : elles sont donc égales sur l'intervalle $[a, b]$ (en particulier en b).

$\square$

4. Formules de Taylor

Théorème (Formule de Taylor avec reste intégral)

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, E)$. On a :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$$

4.a

Démonstration

On montre ce résultat par récurrence en effectuant une intégration par parties dans l'hérédité.

$\square$

Cette formule est difficile à retenir, surtout le terme intégral. Pour ne pas se tromper, on pensera à la vérifier pour $n = 0$. Se rappeler que la puissance n-ième est associée à $n!$. On peut également penser à l'appliquer à $x \mapsto \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$.

Ne pas oublier non plus l'hypothèse f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ qui est naturelle, puisqu'on intègre la fonction $x \mapsto \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)$.

De ce théorème découlent toutes les autres formules de Taylor : il est donc à la fois le plus précis et le plus puissant. Comme il s'agit d'une égalité, il n'y a aucune approximation, et donc aucune perte d'information.

Exemple (Formule de Taylor avec reste intégral)

i

(1) Cas de la fonction exponentielle. Pour tout réel x :

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \mathrm{d}t.$$

(2) Cas de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$. Pour tout $x \in]-1, +\infty[$:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + (-1)^n \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}} \mathrm{d}t.$$

Théorème (Inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n)

4.b

Soit $f \in \mathcal{C}^n(I, E)$. On suppose la fonction $\left\| f^{(n)} \right\|$ majorée par un réel M. On a alors :

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leqslant \frac{|b-a|^n}{n!} M$$

Démonstration

On applique la formule de Taylor avec reste intégral :

$$\begin{aligned}
\left\| f(b) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| &= \left\| \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) \mathrm{d}t \right\| \\
&\leqslant \left| \int_a^b \frac{|b-t|^{n-1}}{(n-1)!} \left\| f^{(n)}(t) \right\| \mathrm{d}t \right| \\
&\leqslant \left| \int_a^b \frac{|b-t|^{n-1}}{(n-1)!} M \mathrm{d}t \right| \\
&= \left| \int_a^b \frac{(t-b)^{n-1}}{(n-1)!} M \mathrm{d}t \right| \\
&= \frac{|b-a|^n}{n!} M
\end{aligned}$$

□

On peut prendre $M = \sup\{ \left\| f^{(n)}(t) \right\|, t \in |a, b| \}$.
À l'ordre 1, on retrouve bien l'inégalité des accroissements finis.

Exemple (Inégalité de Taylor-Lagrange, cas de l'exponentielle)

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^x.$$

En particulier, pour $x = 1$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_-$, on a :

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

ii

Exemple (Inégalité de Taylor-Lagrange)

Cas de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\left| \ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} \right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

En particulier, pour $x = 1$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2).$$

Pour tout $x \in]-1, 0]$, on a :

$$\left| \ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} \right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1+x)^{n+1}}.$$

iii

Exercice (Inégalité de Taylor-Lagrange)

1 Montrer que pour tout réel x,

$$x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24} \leqslant \sin(x) \leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$$

et que

$$x - \frac{x^3}{6} - \frac{|x|^5}{5!} \leqslant \sin(x) \leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{|x|^5}{5!}.$$

2 Quelle inégalité préférez-vous ? (on pourra tracer des graphes pour comparer les encadrements)

3 Trouver une approximation rationnelle de $\sin(1)$ à 10^{-2} près, puis à 10^{-5} près.

8

Théorème (Formule de Taylor-Young à l'ordre n)

Soit $f \in \mathcal{C}^n(I, E)$. On a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o_{x \to a}((x-a)^n)$$

4.c

Démonstration

On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction auxiliaire

$$g\ :x\mapsto f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)$$

g est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, ses dérivées en a jusqu'à l'ordre n compris sont nulles en a, et sa dérivée n-ième sur $|a,x|$ est majorée par $\sup\{\left\|g^{(n)}(t)\right\|, t\in|a,x|\}$, donc l'inégalité de Taylor-Lagrange fournit

$$\|g(x)\|\leqslant\frac{|x-a|^n}{n!}\sup\left\{\left\|g^{(n)}(t)\right\|, t\in|a,x|\right\}$$

On montre ensuite, en revenant à la définition formelle de la continuité, que $\sup\{\left\|g^{(n)}(t)\right\|, t\in|a,x|\}$ tend vers 0 lorsque x tend vers a (car $g^{(n)}$ est continue et nulle en a), obtenant le résultat voulu.

□

Hiérarchie des formules de Taylor

La formule de Taylor-Young est une conséquence de l'inégalité de Taylor-Lagrange, elle-même issue de la formule de Taylor avec reste intégral : c'est donc cette dernière qui est la plus forte et la plus fine. Elle l'est d'ailleurs tellement que l'on n'y recourt pas si souvent que cela. 4.1

Nature des formules de Taylor

La formule de Taylor avec reste intégral est la seule à être une égalité (la formule de Taylor-Young fournit la description d'un comportement local, pas une égalité exploitable globalement). 4.2

Formules de Taylor : aspect local-global

La formule de Taylor-Young donne une information *locale* sur le comportement de f : elle ne présente pas d'intérêt si on étudie le comportement global de f (on rencontre très souvent cette erreur). 4.3
En revanche, la formule de Taylor avec reste intégral et l'inégalité de Taylor-Lagrange donnent des renseignements globaux sur la fonction étudiée.

Exercice (Majoration de la vitesse par la position et l'accélération)

Soit $f\ :\mathbb{R}\to E$ de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose f et f'' bornées, et on note $M_0=\|f\|_\infty\overset{def}{=}\sup\{\|f(x)\|, x\in\mathbb{R}\}$ et $M_2=\|f''\|_\infty$.

1 En écrivant une formule de Taylor pour $x\in\mathbb{R}$ et $x+h$, pour une valeur bien choisie de h, montrer que f' est également bornée, et que si $M_1=\|f'\|_\infty$: 9

$$M_1\leqslant 2\sqrt{M_0M_2}$$

2 En reprenant la démonstration précédente, et en utilisant aussi $f(x-h)$, montrer qu'en fait :

$$M_1\leqslant\sqrt{2M_0M_2}$$

5. Arcs paramétrés

Définition (Arc paramétré) 5.a

On appelle *arc paramétré* sur E toute fonction de classe $\mathcal{C}^1$ à valeurs dans E.
On appelle *support* de l'arc f, l'image de f.

Un arc paramétré est essentiellement une fonction vectorielle, mais dont on voit les valeurs plus comme des points que des vecteurs. On note d'ailleurs souvent $M(t)$ le point mobile à l'instant t pour un arc donné.

Un arc ne se confond pas avec son support, de même que la fonction sinus ne se confond pas avec son image $[-1,1]$. En pratique, on n'étudie que des arcs plans, et on représente graphiquement leur support (qui est une partie de $\mathbb{R}^2$), pas leur graphe (qui est une partie de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$).

Définition (Arc paramétré régulier) 5.b

Soit $f\ : I \to E$ un arc paramétré. On dit que $t_0 \in I$ est un *paramètre régulier (pour l'arc f)* (resp. un *paramètre singulier, ou stationnaire*) si $f'(t_0) \neq 0$ (resp. si $f'(t_0) = 0$). On dit que l'arc f est *régulier* si tout point de I est un paramètre régulier pour f.

Interprétation géométrique de la dérivée 5.1

Si t est un paramètre régulier, la tangente au support à l'instant t est dirigée par le vecteur vitesse $f'(t)$. Dans le cas d'un arc plan, la normale au support à ce même instant est la droite admettant $f'(t)$ pour vecteur normal, et passant par $M(t)$.

Illustration

Une étude d'arc paramétré pourra s'organiser ainsi :

(1) Détermination du domaine de définition de l'arc paramétré, puis réduction éventuelle de celui-ci pour obtenir, par des considérations de symétrie ou de périodicité, le « domaine utile » ;

(2) Étude sur ce dernier domaine de la courbe paramétrée, c'est-à-dire de ses fonctions coordonnées (classe, variations et, dans une moindre mesure, signe) ;

(3) Tracé (du support) de la courbe.

Pour rendre le tracé plus précis, on pourra éventuellement s'intéresser aux points suivants (et pour chacun d'entre eux, on déterminera la tangente) :

(1) Points stationnaires.

(2) Points situés sur un des axes de coordonnées ($x(t) = 0$ ou $y(t) = 0$).

(3) Points réguliers où la tangente est verticale ($x'(t) = 0$) ou horizontale ($y'(t) = 0$). Cela comprend notamment les points réguliers où abscisse ou ordonnée présente un extremum local.

(4) Points multiples, *i.e.* les points physiques auxquels on se trouve en deux instants distincts ou plus. Pour éviter les points multiples non pertinents, on aura d'abord restreint le domaine de mnaière à obtenir tout le support, mais pour lequel les points multiples sont en nombre fini. Par exemple, si l'arc est périodique, alors tout point est multiple.

Pour déterminer la tangente en un point stationnaire $M(t_0)$ (en principe hors programme), on peut :

(1) Étudier la pente
$$\frac{y(t) - y(t_0)}{x(t) - x(t_0)}$$
lorsque t tend vers t_0. Si cette quantité a une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors le support présente en $M(t_0)$ une tangente de pente l.

(2) Trouver le plus petit $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^{(m)}(t_0) \neq \overrightarrow{0}$ (ce vecteur dirigera alors la tangente).

(3) Effectuer des développements limités de x et y en t_0, pour voir « les forces en présence ».

Exercice (Exemples simples d'arcs paramétrés plans) 10

Faire l'exercice 7 de TD.

Exercice (Arcs paramétrés plans) 11

On considère un arc régulier $f\ : [a, b] \to E$. Montrer l'existence de $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a)$ soit colinéaire à $f'(c)$.

6. Feuille de TD 9 : Fonctions vectorielles

6.1. Fonctions vectorielles

Exercice 1 (Dérivée de l'inverse d'une fonction inversible) 2

On suppose que E est une $\mathbb{K}$-algèbre normée de dimension finie, et que $f\ : I \to E$ est dérivable, à valeurs dans l'ensemble des éléments inversibles de E.
On introduit la fonction $g\ : I \to E$, qui, à tout $t \in I$, associe $(f(t))^{-1}$.
Vérifier que g est dérivable sur I, et que, pour tout $t \in I$:

$$g'(t) = -g(t)f'(t)g(t)$$

Exercice 2 (Différence entre deux exponentielles matricielles) 2

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\exp(A) - \exp(B) = \int_0^1 \exp(sA)(A-B)\exp((1-s)B)\mathrm{d}s.$$

Exercice 3 (Calcul d'un déterminant par dérivation) 2

Pour tout $(n, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$, on pose :

$$\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & & & 0 \\ \frac{x^2}{2!} & x & 1 & & \\ \frac{x^3}{3!} & \frac{x^2}{2!} & x & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ \frac{x^n}{n!} & \dots & \dots & \frac{x^2}{2!} & x \end{vmatrix}$$

Calculer $\Delta_n(x)$.

6.2. Formules de Taylor

Exercice 4 (Égalité de Taylor-Lagrange) 1

Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$, à valeurs réelles, dérivable $n+1$ fois sur $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Exercice 5 (Fonction nulle sur un voisinage de $+\infty$) 2

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f(0) = 1$, et : $\forall x \geqslant \frac{1}{2},\ f(x) = 0$.

1 Montrer que $\sup\limits_{\mathbb{R}^+} \left|f^{(n)}\right| \geqslant 2^n n!$.

2 Montrer que pour $n \geqslant 1$, $\sup\limits_{\mathbb{R}^+} \left|f^{(n)}\right| > 2^n n!$

Exercice 6 (Fonction dont les dérivées sont nulles en 0) 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que :

(1) $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = 0$.

(2) $\exists \lambda > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \sup_{\mathbb{R}} \left| f^{(n)} \right| \leqslant \lambda^n n!$.

1 Montrer que f est nulle sur l'intervalle $]-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}[$, puis sur $\mathbb{R}$.
2 Montrer que la première condition n'est pas suffisante pour que f soit nulle.

6.3. Arcs paramétrés

Exercice 7 (Étude d'arcs paramétrés classiques) 1

Étude et représentation
1 de la *cycloïde*

$$f \ : t \mapsto (t - \sin t, 1 - \cos t)$$

2 de la *cardioïde*

$$f \ : t \mapsto (2\cos t - \cos 2t, 2\sin t - \sin 2t)$$

3 de l'*astroïde*

$$f : t \mapsto \left(\cos^3 t, \sin^3 t\right).$$

Exercice 8 (Étude d'arcs paramétrés rationnels) 2

Étude et représentation de
1 $f_0 \ : t \mapsto \left(\frac{t^3}{t^2-1}, \frac{t^2-2t}{t-1}\right)$.
2 $f_1 \ : t \mapsto \left(\frac{t^2}{(t-2)(t+1)}, \frac{t^2(t+2)}{t+1}\right)$.
3 $f_2 \ : t \mapsto \left(\frac{t^3}{t^2-1}, \frac{1}{t^3-t}\right)$.

Exercice 9 (Étude d'arcs paramétrés trigonométriques) 2

Étude et représentation
1 de la *courbe de Lissajous* $f : t \mapsto (\cos 3t, \sin 2t)$.
2 de $g \ : t \mapsto (2\,\cos(t), \sin(2t))$.
3 (Mines MP 10) de la *deltoïde* $h \ : t \mapsto (2\,\cos(t) + \cos(2t), 2\,\sin(t) - \sin(2t))$.

Exercice 10 (Astroïde) 0

1 Tracer la courbe paramétrée : $(x(t), y(t)) = (\sin^3(t), \cos^3(t))$.
2 Exprimer l'équation de la tangente en un point $M(t_0)$ de la courbe.

Exercice 11 (Propriété des coefficients d'un polynôme simplement scindé) 2

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples. Montrer que P ne peut avoir deux coefficients consécutifs nuls.

Exercice 12 (Dérivée d'une fonction définie par un déterminant) 2

(Mines-Ponts PSI 10) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ pair, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tA = -A$, $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1. Calculer $\det(A + tJ)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 13 (Fonction à valeurs dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ *(X MP 08)*) 3

Soit $n \in \mathbb{N}$ impair et $\Phi\ : \mathbb{R} \to \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ une fonction dérivable. Montrer que pour tout réel t, $\Phi'(t) \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 14 (Droites tangentes et normales à une même courbe) 3

(Centrale MP 08, Mines PC 10) Trouver les droites à la fois tangentes et normales à la courbe $\Gamma\ : x(t) = 3t^2, y(t) = 2t^3$.

Exercice 15 (Étude poussée d'un arc paramétré) 3

(Centrale MP 08)
Soit C l'arc paramétré : $x(t) = \frac{t}{1+t^4}, y(t) = \frac{t^3}{1+t^4}$.
1 Tracer cette courbe.
2 Montrer que C est un arc simple (*i.e.* injectif).
3 Donner l'équation de la tangente D_t à C au point $M(t) = (x(t), y(t))$.
4 Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur t pour que D_t coupe C en deux points $M(t_1)$ et $M(t_2)$ distincts de $M(t)$. Calculer $t_1 + t_2$ et $t_1 t_2$.
5 Donner les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle $OM(t_1)M(t_2)$.

Exercice 16 (Suite de valeurs de la dérivée tendant vers l'infini) 4

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ de classe C^1. Montrer qu'il existe une suite (x_n) de réels telle que $(f'(x_n))$ tende vers 0.

CHAPITRE X

Suites et séries de fonctions

Sommaire

L'étude assez générale et théorique menée dans le chapitre sur les espaces vectoriels normés peut s'adapter à l'étude de suites et de séries de fonctions.

Le contexte sera le suivant : on considère une suite (f_n) de fonctions ou une série de fonctions $\sum u_n$, où les u_n et f_n sont définies sur une partie A d'un espace vectoriel normé H de dimension finie et à valeurs dans un espace vectoriel normé E de dimension finie.

On a muni A d'une topologie afin de pouvoir se poser des questions sur la régularité des f_n et u_n, et surtout des éventuelles limites de (f_n) et $\sum u_n$ (en un sens à préciser).

On verra dans un premier temps que la notion la plus évidente de convergence, la convergence simple, est trop peu exigeante : le fait que les f_n vérifient certaines propriétés ne garantit aucunement que leur limite les vérifie aussi.

On introduira alors la notion de convergence uniforme, beaucoup plus adaptée : par exemple, la continuité « passera » à la limite uniforme.

Le plus souvent, A sera un intervalle réel (on pourra alors s'intéresser à la dérivabilité de f), et E sera égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Outre ces question de régularité, on se posera souvent la question de la légitimité de l'interversion de limites. Par exemple, sous quelles conditions (suffisantes) peut-on affirmer que

$$\lim_{n \to \infty} \lim_{x \to a} f_n(x) = \lim_{x \to a} \lim_{n \to \infty} f_n(x),$$

que

$$\lim_n \int_{[0,1]} f_n(t)\mathrm{d}t = \int_{[0,1]} \lim_n f_n(t)\mathrm{d}t$$

ou, pour les séries de fonctions, que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x \to a} u_n(x) = \lim_{x \to a} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$$

et que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{[a,b]} u_n(t)\mathrm{d}t = \int_{[a,b]} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\mathrm{d}t$$

Pour toute partie non vide B de A, et toute fonction g de A dans E telle que $g_{|B}$ soit bornée, nous noterons

$$\|g\|_{\infty,B} \stackrel{def}{=} \sup\{\|g(x)\|, x \in B\}$$

Lorsqu'en outre $B = A$, nous noterons simplement $\|g\|_{\infty}$ le réel $\|g\|_{\infty,A}$.

1. Convergence simple, convergence uniforme

1.1. La convergence simple

Définition (Convergence simple sur A)

On dit que la suite de fonctions (f_n) *converge simplement* vers une fonction f (de A dans E) si, pour tout $x \in A$, la suite $(f_n(x))$ converge vers $f(x)$. On dit alors que f est *limite simple* de (f_n).

1.a

La convergence simple est donc une accumulation de convergences ponctuelles, sans lien entre elles.

Illustration

Il y a unicité de la limite simple d'une suite de fonctions, mais pas toujours existence.

Exemple (Convergence simple)

(1) On considère la suite (g_n) de fonctions $g_n \ : x \in [0,1] \mapsto x^n$. Cette suite converge simplement vers la fonction $g \ : [0,1] \to \mathbb{R}$, nulle sur $[0,1[$, et valant 1 en 1.

(2) La suite (h_n) de fonctions $h_n \ : x \in \mathbb{R} \mapsto n\sin\left(\frac{x}{n}\right)$ converge simplement vers $h = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ sur $\mathbb{R}$.

i

Le premier exemple montre que la continuité ne passe pas à la convergence simple : chaque fonction g_n est continue en 1, mais la limite simple g ne l'est pas. Il est naturel de se demander si certaines propriétés sont malgré tout conservées par passage à la limite simple, *i.e.* si, lorsque chaque fonction f_n vérifie une propriété $\mathcal{P}$, alors la limite simple f de (f_n) vérifie également cette propriété. C'est le cas de :

(1) La croissance, la décroissance, la monotonie.

(2) La positivité, le fait d'être minoré (ou majoré) par un réel donné [1], d'avoir une image incluse dans une partie fermée donnée.

(3) Le fait d'être inférieure ou égale (ou supérieure ou égale) à une fonction donnée.

1. Le même pour toutes les fonctions f_n.

(4) La convexité, la concavité.

(5) Le fait d'être K-lipschitzien (où K est un réel positif donné).

(6) La linéarité.

En revanche, les propriétés suivantes ne passent pas à la limite simple :

(1) La continuité (ponctuelle ou globale), la dérivabilité (ponctuelle ou globale).

(2) L'injectivité, la surjectivité.

(3) La stricte croissance, la stricte décroissance, la stricte monotonie, etc. Plus généralement, on se souviendra que les inégalités strictes deviennent larges par passage à la limite.

(4) Le fait d'être majoré, minoré, borné, et le fait de ne pas l'être.

(5) Le fait d'être lipschitzien.

Illustration

On retiendra que la limite simple ne conserve que les propriétés qu'elle conserve de manière évidente, *i.e.* celles dont on prouve la conservation par une analyse immédiate de la question.

On peut aussi se demander si la notion de limite simple se comporte bien avec certains opérateurs, et notamment l'intégrale sur un segment. La réponse est non. Par exemple, on peut trouver une suite (f_n) de fonctions continues sur $[0,1]$, convergeant simplement vers la fonction nulle, et vérifiant pourtant $\int_{[0,1]} f_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a donc dans ce cas :

$$\lim_n \int_{[0,1]} f_n(t)\mathrm{d}t \neq \int_{[0,1]} \lim_n f_n(t)\mathrm{d}t$$

Illustration

La notion de limite simple d'une suite de fonctions ne transmet pas suffisamment de propriétés pour se suffire à elle-même : cela motive l'introduction d'un nouveau mode de convergence.

Exercice (Limite simple de suites de fonctions)

Faire l'exercice 1 de TD (étude de la limite simple).

1

1.2. La convergence uniforme

Définition (Convergence uniforme sur A, sur une partie de A)

On dit que la suite de fonctions (f_n) *converge uniformément (sur A)* vers une fonction f (de A dans F) si la suite $(\|f - f_n\|_\infty)$ est définie à partir d'un certain rang [a] et tend vers 0.
On dit alors que f est *limite uniforme* de (f_n).
Plus généralement, si B est une partie de A, on dit que (f_n) *converge uniformément vers f sur B* si la suite des restrictions des f_n à B converge uniformément vers la restriction de f à B, *i.e.* la suite $(\|f - f_n\|_{\infty,B})$ est définie à partir d'un certain rang, et tend vers 0.

a. *i.e.* $f - f_n$ est bornée, sauf éventuellement pour un nombre fini de valeurs de n.

1.b

Lorsqu'on évoque une convergence uniforme, il est important de préciser sur quel domaine elle a lieu. Bien sûr, si (f_n) converge uniformément sur A, alors elle converge uniformément sur toute partie de A.

Convergence uniforme et convergence simple

Le fait que (f_n) converge simplement vers f s'écrit

$$\forall x \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \|f_n(x) - f(x)\| \leqslant \varepsilon$$

alors que le fait que (f_n) converge uniformément vers f s'écrit

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \forall x \in A, \|f_n(x) - f(x)\| \leqslant \varepsilon$$

Clairement, la convergence uniforme (vers f) entraîne la convergence simple (vers la même fonction f), mais la réciproque est fausse :

1.1

Illustration

Dans le cas où (f_n) converge uniformément vers f, les fonctions f_n sont bornées à partir d'un certain rang si et seulement si f est bornée.

Pour des fonctions bornées (ce qui sera souvent le cas en pratique), (f_n) converge uniformément vers f si et seulement si $(\|f_n - f\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

La convergence uniforme rentre donc partiellement dans le cadre général de la convergence d'une suite dans un evn, voire dans une $\mathbb{K}$-algèbre normée.

On a donc immédiatement équivalence entre la convergence uniforme de (f_n) vers f et la convergence uniforme de chacune des suites de fonctions coordonnées des f_n dans une base donnée vers la fonction coordonnée correspondante de f.

De plus, en supposant que (f_n) et (g_n) convergent uniformément vers f et g respectivement, on a :

(1) Pour tout scalaires λ et μ, $(\lambda f_n + \mu g_n)$ converge uniformément vers $\lambda f + \mu g$.

(2) Si les fonctions f_n et g_n sont en outre bornées (pour tout n, ou du moins à partir d'un certain rang), et dans le cas où E est une $\mathbb{K}$-algèbre normée, alors $(f_n g_n)$ converge uniformément vers fg.

(3) Sans cette hypothèse supplémentaire, la suite $(f_n g_n)$ ne converge pas toujours uniformément.

Montrer une non convergence uniforme

Pour montrer que la suite (f_n) de fonctions ne converge pas uniformément vers f, et si le calcul de $\|f - f_n\|_\infty$ n'est pas évident, on pourra trouver une suite (x_n) de points de A telle que la suite de terme général $\|f(x_n) - f_n(x_n)\|$ ne converge pas vers 0. Dans le cas où f est la limite simple de (f_n), les suites (x_n) stationnaires ne permettront pas de conclure : en général, les suites (x_n) choisies tendront vers un point adhérent à A mais non dans A, ou vers $\pm\infty$ (dans le cas où A est un intervalle, non majoré ou non minoré).

1.2

Exemple (Convergence uniforme)

(1) Dans l'exemple de la suite (g_n) ci-dessus, la convergence n'est pas uniforme car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|g - g_n\|_\infty = 1$.
(2) Dans l'exemple de la suite (h_n) ci-dessus, la convergence n'est pas uniforme.

ii

Convergence uniforme sur tout compact et convergence uniforme

Il est évident que si (f_n) converge uniformément, alors elle converge uniformément sur tout compact inclus dans A, mais la réciproque est fausse :

1.3

Exercice (Limite uniforme de suites de fonctions)

Faire l'exercice 1 de TD (étude de la limite uniforme).

2

1.3. Opérations sur les domaines où la convergence est uniforme

Considérons une suite de fonctions (f_n) de A dans E, convergeant simplement sur A vers une fonction f. On s'intéresse à l'ensemble Ω des parties de A sur lesquels la convergence est uniforme.

(1) Si B appartient à Ω, alors toute partie de B appartient à Ω.

(2) Si B et C appartiennent à Ω, alors $B \cup C$ appartient à Ω (plus généralement, s'il y a CVU sur $B_1, \dots, B_n$, alors il y a CVU sur $B_1 \cup \cdots \cup B_n$).

(3) Tout singleton de A appartient à Ω (et donc toute partie finie de A appartient à Ω).

On en déduit la remarque importante suivante :

Enlever un point au domaine n'aide pas à la CVU

Supposons que B soit une partie stricte de A, et que c soit un point de $A \setminus B$.
La suite (f_n) CVU sur $B \cup \{c\}$ si et seulement si (f_n) CVU sur B.
Ainsi, il est illusoire d'enlever un point à un domaine sur lequel il n'y a pas CVU pour espérer obtenir la CVU : en pratique, on enlèvera un voisinage relatif de ce point.
Par exemple, la suite (g_n) ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$ (la continuité n'a pas été transmise à la limite simple), mais pas non plus sur $[0, 1[$.

1.4

Ω est stable par union finie, mais pas par union infinie (si tel était le cas, la convergence simple entrainerait la convergence uniforme, en écrivant A comme union de singletons).

2. Conservation de propriétés par limite uniforme

2.1. Généralités

Bien évidemment, la convergence uniforme conserve toute propriété conservée par convergence simple, comme la convexité, ou la positivité par exemple.

Elle conserve également le fait d'être majoré, minoré, ou borné.

2.2. Continuité

On s'attend également à ce que la convergence uniforme, bien plus exigeante que la convergence simple, conserve d'autres propriétés, notamment la continuité. C'est bien le cas :

Théorème (Continuité ponctuelle et convergence uniforme) 2.a

Si les f_n sont continues en a et si (f_n) converge uniformément vers f sur un voisinage de a (relatif à A), alors f est continue en a.

Démonstration

$\square$

Autrement dit, sous les hypothèses de l'énoncé :

$$\lim_{n\infty} \lim_{x \to a} f_n(x) = \lim_{x \to a} \lim_{n\infty} f_n(x)$$

Corollaire (Limite uniforme de fonctions continues) 2.b

Toute limite uniforme de fonctions continues sur A est continue sur A.

Exemple (Continuité d'une limite uniforme) i

Cela prouve que $g_n \ : x \mapsto x^n$ ne converge pas uniformément vers g sur $[0, 1]$, puisque g n'a pas hérité de la continuité des g_n.

Voici une remarque absolument pas facultative, qui explique pourquoi le théorème 2.a suppose une convergence uniforme *au voisinage de a* :

Convergence uniforme au voisinage de tout point et continuité 2.1

Considérons une suite (f_n) de fonctions continues sur A, convergeant simplement vers f.
Nous aimerions nous assurer de la continuité de f : la convergence simple ne suffit pas. La convergence uniforme suffit, mais n'est pas toujours satisfaite.
Grâce au caractère local de la continuité, pour prouver la continuité de f, il suffit que pour tout $a \in A$, la suite (f_n) converge uniformément vers f sur un voisinage de a (relatif dans A).
Par exemple, si I est un intervalle, et s'il y a convergence uniforme sur tout segment inclus dans I, alors la fonction f sera continue.
Ne pas oublier toutefois que cette convergence sur tout segment inclus dans I n'entraîne pas, en général, la convergence uniforme sur I.

Ces résultats seront surtout utilisés dans leur version « séries de fonctions », car, le plus souvent la somme de la série de fonctions ne sera pas facile à expliciter, et sa continuité ne se lira donc pas aisément.

Exercice (Convergence uniforme sur tout compact)

Montrer que si la suite de fonctions continues (f_n) converge uniformément vers f sur tout compact K inclus dans A, alors f est continue.

3

À quel point la convergence uniforme conserve-t-elle la régularité ?

Nous venons de voir que la convergence uniforme conservait la continuité. On peut vérifier qu'elle conserve également l'uniforme continuité. Conserve-t-elle par exemple aussi la dérivabilité, ou le fait d'être de classe $\mathcal{C}^k$? En fait, nous répondrons négativement à cette question dans la section 3. Nous verrons cependant (théorème 2.e) qu'en imposant des modes de convergence pour (f_n) *et aussi* pour la suite (f'_n), on peut conserver la dérivabilité.

2.2

Exercice (Non conservation de la dérivabilité par convergence uniforme)

Expliciter une suite de fonctions (f_n) dérivables sur $[-1, 1]$, convergeant uniformément vers la fonction valeur absolue sur $[-1, 1]$.

4

2.3. Double limite

La continuité étant un cas particulier de limite, il est naturel de se demander si on peut étendre le théorème 2.a. Le théorème suivant apporte une réponse positive à cette interrogation :

Théorème de la double limite

Soit (f_n) une suite de fonctions de A dans E, et soit a un point adhérent à A. On suppose que

(1) (f_n) converge uniformément vers f sur A.

(2) pour tout n, f_n admet une limite finie $\ell_n \in E$ en a.

La suite (ℓ_n) admet alors une limite ℓ, f admet une limite en a, et ces limites sont égales :

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell.$$

2.c

Démonstration

Quitte à considérer la suite (f_n) à partir d'un certain rang, on peut supposer que la suite $(f_n - f)$ est bornée.
Le plus difficile consiste à montrer la convergence de (l_n). Pour tous entiers p et q, tout $x \in A$, on a :

$$\|f_q(x) - f_p(x)\| \leqslant \|f_q - f_p\|_\infty$$

d'où, en faisant tendre x vers a :

$$\|l_q - l_p\| \leqslant \|f_q - f_p\|_\infty$$

Or la suite $(\|f_n - f\|_\infty)$ est majorée par un certain réel M, donc, par inégalité triangulaire,

$$\|l_q - l_p\| \leqslant 2M$$

La suite $(l_q)_{q\in\mathbb{N}}$ est donc bornée (fixer $p = 0$ par exemple), il en existe donc une suite extraite convergente via une extractrice φ, vers un certain élément l de E.
On a donc, pour tout $q \in \mathbb{N}$:

$$\left\|l_{\varphi(q)} - l_q\right\| \leqslant \left\|f_{\varphi(q)} - f_q\right\|_\infty$$

donc la suite de terme général $l_{\varphi(q)} - l_q$ converge vers 0, puis la suite (l_q) converge vers l.
Une fois ceci établi, la démonstration est similaire à celle du théorème 2.a

□

On peut donc écrire, sous les hypothèses du théorème (*i.e.*[2] la convergence uniforme, et l'existence, pour tout n, de $\lim\limits_{x\to a} f_n(x)$) :

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a}\lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

d'où le nom donné à ce théorème. Il est d'ailleurs aussi appelé *théorème d'interversion des limites.*

Il faut noter que le fait que (ℓ_n) admette une limite fait partie de la conclusion, et non des hypothèses. De même pour le fait que f admette une limite en a.

Dans le cas où $a \in A$, on retrouve 2.a

Lorsque A est une partie de $\mathbb{R}$, voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$), ce théorème admet une adaptation évidente (figurant au programme), au cas où $a = +\infty$ (resp. $a = -\infty$). Cela s'applique notamment au cas où $A = \mathbb{N}$ (pour lequel on considère des suites de suites).

Voici un exercice illustrant cette remarque (à faire en fin de chapitre).

Exercice (Application topologique du théorème de la double limite)

On munit l'espace $l^\infty(\mathbb{R})$ des suites réelles bornées de la norme infinie.

1 L'ensemble des suites convergentes est-il un fermé de $l^\infty(\mathbb{R})$?

2 Même question pour l'ensemble des suites qui sont le terme général d'une série absolument convergente.

5

Il faut bien noter que l'hypothèse de convergence uniforme est cruciale (et d'ailleurs, ce théorème donne une manière de montrer qu'une convergence n'est pas uniforme) :

2. Ou encore : la convergence uniforme, et l'existence des limites internes.

Exercice (Théorème de la double limite)

1 Montrer avec le théorème de la double limite que la suite de fonctions (f_n) définie par

$$f_n(x) = \frac{n\sin(x)e^{-nx}}{1-e^{-nx}}$$

ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$.
Pour prolonger l'exercice :

2 Montrer la non convergence uniforme par une autre technique.

3 Montrer cependant la convergence uniforme sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.

6

2.4. Intégration d'une limite uniforme sur un segment

Nous avons vu que la convergence simple ne permettait pas d'intervertir limite et intégrale sur un segment. La convergence uniforme, elle, le permet :

Théorème (Intégration d'une limite uniforme sur un segment)

Soit (f_n) une suite de fonctions continues définies sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans E, a un point de I.
On suppose qu'il existe une fonction $f : I \to E$ vers laquelle (f_n) converge (simplement, et) uniformément sur tout segment de I.
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$ soit

$$F_n(x) = \int_a^x f_n \quad \text{et} \quad F(x) = \int_a^x f.$$

Alors (F_n) converge uniformément vers F sur tout segment de I.
En particulier, si (f_n) converge uniformément vers f sur le segment $[a,b]$, alors :

$$\int_{[a,b]} f_n \to_n \int_{[a,b]} f.$$

2.d

Démonstration

Tout d'abord, F est bien définie, car f est continue (comme limite uniforme sur tout segment d'une suite de fonctions continues).
Montrons la CVU sur tout segment dont une extrémité est a (tout segment inclus dans I est l'union de deux tels segments) : soit $b \in I$, et soit x dans le segment S d'extrémités a et b. On a

$$\begin{aligned} \|F_n(x) - F(x)\| &= \left\| \int_a^x (f_n - f)(t) \right\| \mathrm{d}t \\ &\leqslant \left| \int_a^x \|(f_n - f)(t)\| \,\mathrm{d}t \right| \\ &\leqslant |x-a| \, \|f_n - f\|_{\infty,S} \\ &\leqslant |b-a| \, \|f_n - f\|_{\infty,S} \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in S$:

$$\|F_n(x) - F(x)\| \leqslant |b-a| \, \|f_n - f\|_{\infty,S} \,,$$

et donc

$$\|F_n - F\|_{\infty,S} \leqslant |b-a| \, \|f_n - f\|_{\infty,S}$$

ce qui prouve la convergence uniforme de (F_n) vers F sur S.
En particulier, si (f_n) CVU vers f sur $[a,b]$, alors $(F_n(b))$ tend vers $F(b)$, *i.e.*

$$\int_{[a,b]} f_n \to_n \int_{[a,b]} f.$$

□

Contrairement à la convergence simple, la convergence uniforme se comporte donc aussi bien avec l'intégration sur un segment qu'il était permis d'espérer. Bien sûr, on prendra bien garde d'étalonner les primitives des f_n et de f : ici, elles sont toutes nulles en a, ce qui assurait de la convergence de $(F_n(a))$ vers $F(a)$. Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, G_n est une primitive de f_n, il n'y a aucune raison *a priori* pour que la suite (G_n) converge ne serait-ce que simplement (et même pour qu'il existe $a \in I$ tel que la suite $(G_n(a))$ converge).

Intégration d'une limite uniforme sur tout segment

Pourquoi ce théorème fait-il référence à une convergence uniforme sur tout segment de I ? Ne peut-on pas supposer directement la convergence uniforme sur I, et obtenir la convergence uniforme de (F_n) vers F sur I ?
La réponse est non :

2.3

Ainsi, la seule conclusion raisonnable était la convergence uniforme de (F_n) vers F sur tout segment de I : il est donc naturel d'avoir affaibli les hypothèses du théorème (et donc renforcé le théorème) en supposant seulement la convergence uniforme de (f_n) vers f sur tout segment de I.

À nouveau, ce théorème permet de montrer qu'une convergence d'une suite de fonctions n'est pas uniforme.

Exercice (Intégration d'une limite uniforme sur un segment)

Montrer que la suite (f_n) définie par

$$f_n(x) = n\cos(x)\sin(x)^n$$

ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

7

2.5. Dérivation d'une suite de fonctions

Nous avons déjà vu en dans l'exercice 4 de cours, que la convergence uniforme ne conservait pas la dérivabilité. Il existe cependant un théorème qui, sous des conditions assez restrictives, fournit la dérivabilité d'une limite d'une suite de fonctions :

Théorème de dérivation d'une suite de fonctions

On suppose que A est un intervalle I de $\mathbb{R}$, et que

(1) Chaque f_n est de classe $\mathcal{C}^1$.

(2) (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f.

(3) (f'_n) converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction g.

La suite (f_n) converge alors uniformément vers f sur tout segment de I, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f' = g$.

2.e

Démonstration

Nous partons de la relation fondamentale

$$(*) \quad f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n(t)\mathrm{d}t,$$

valable pour tout $x \in I$ et tout $n \in \mathbb{N}$ (d'après le point (1)).
La suite de fonctions de terme général $x \mapsto \int_a^x f'_n(t)\mathrm{d}t$ converge uniformément sur tout segment de I vers la fonction $x \mapsto \int_a^x g(t)\mathrm{d}t$, d'après le théorème 2.d et (3).
Par ailleurs, la suite de fonctions constantes de terme général $x \mapsto f_n(a)$ converge uniformément vers $x \mapsto f(a)$ sur tout segment de I (et même sur I tout entier), d'après (2).
Ainsi, d'après $(*)$, la suite (f_n) CVU sur tout segment vers $x \mapsto f(a) + \int_a^x g(t)\mathrm{d}t$.
Or cette suite converge simplement vers f (d'après (2)), et donc, pour tout $x \in I$:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\mathrm{d}t,$$

d'où les affirmations voulues.

$\square$

Ce théorème est donc une conséquence assez directe du théorème 2.d : c'est le résultat intégral qui permet de déduire un résultat sur les dérivées (un peu comme pour la dérivation d'un développement limité, cf. votre cours de MPSI). Cela explique d'ailleurs pourquoi on suppose la convergence uniforme sur tout segment. Il faut aussi noter que l'hypothèse forte (celle de convergence *uniforme*) porte sur la suite dérivée (f'_n) et non la suite (f_n).

Dérivations successives d'une suite de fonctions

Ce résultat s'étend immédiatement aux suites de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ (où $k \in \mathbb{N}^*$), sous l'hypothèse de convergence simple de $(f_n^{(j)})$ pour $0 \leqslant j \leqslant k-1$ et de convergence uniforme de $(f_n^{(k)})$ sur tout segment de I.
De même, on adaptera cet énoncé pour montrer qu'une suite de fonctions est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

2.4

Exercice (Léger raffinement du théorème de dérivation d'une série de fonctions)

Montrer comment on peut affaiblir l'hypothèse (2) du théorème ci-dessus par l'existence d'un $x_0 \in I$ pour lequel $(f_n(x_0))$ converge.

8

3. Approximation uniforme

Quand on travaille dans l'espace $\mathcal{B}([a,b],\mathbb{K})$ des fonctions bornées sur un segment $[a,b]$, à valeurs dans $\mathbb{K}$, muni de la norme infinie, on peut chercher, étant donné une fonction f d'un certain type (continue, par exemple) une suite de fonctions d'un type plus restreint, de limite f.

On dipose à cet effet de deux théorèmes, le premier provenant de votre cours de MPSI :

Théorème (Approximation uniforme par des fonctions en escalier) 3.a

Toute fonction continue par morceaux f sur un segment $[a,b]$ est limite uniforme de fonctions en escalier.

Théorème de Weierstrass 3.b

Toute fonction continue sur un segment y est limite uniforme de fonctions polynomiales.

Démonstration

Non exigible. □

Exercice (Une application du théorème de Weierstrass) 9

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t = 0$$

Montrer que f est nulle.

Exercice (Suite polynomiale convergeant uniformément vers une fonction non polynomiale) 10

Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$, non polynomiale.
Soit (P_n) une suite de polynômes convergeant uniformément vers f sur $[a,b]$. On peut sans perte de généralité supposer les P_n tous non nuls.
Montrer que la suite des degrés des P_n tend vers l'infini.

4. Séries de fonctions

4.1. Généralités

On considère ici une suite de fonctions (u_n) de A dans E. La *série de fonctions* $\sum u_n$ de terme général correspond à la suite de fonctions (S_n), où, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n \overset{def}{=} \sum_{k=0}^{n} u_k,$$

S_n étant appelée *somme partielle* d'ordre (ou d'indice) n de la série de fonctions $\sum u_k$.

Définition (Convergence simple, uniforme, d'une série de fonctions)

La *convergence simple* (resp. la *convergence uniforme*) de la série de fonctions $\sum u_n$, est la convergence simple (resp. uniforme) de la suite (S_n) des sommes partielles.
En cas de convergence simple, on peut définir la *somme* S de cette série de fonctions, notée $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$, définie par

$$\forall\, x \in A, \quad \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)(x) \overset{def}{=} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$$

et le *reste* R_n d'ordre (ou d'indice) n, noté $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$, défini par

$$\forall\, x \in A, \quad R_n(x) \overset{def}{=} \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$$

4.a

Ainsi, en cas de convergence simple, on a

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} u_k = S_n + R_n$$

Supposons que $\sum u_n$ converge simplement. Cette série de fonctions converge uniformément si et seulement si la suite de ses restes converge *uniformément* vers 0.

Si la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement (resp. uniformément), alors le terme général u_n converge simplement (resp. uniformément) vers la fonction nulle lorsque n tend vers l'infini. Cette condition nécessaire de convergence de $\sum u_n$ n'est évidemment pas suffisante, elle sert le plus souvent à donner une condition suffisante de divergence (la *divergence grossière*).

4.2. Convergence normale d'une série de fonctions

Dans le cas des séries de fonctions, on peut définir un nouveau mode de convergence, qui entraîne la convergence uniforme, et dont l'étude nous ramène au cas des séries numériques :

Définition (Convergence normale)

On dit que la série de fonctions $\sum u_n$ *converge normalement* si la série numérique $\sum \|u_n\|_\infty$ converge.
Plus généralement, pour toute partie B de A, on dit que $\sum u_n$ *converge normalement sur* B si la série numérique $\sum \|u_n\|_{\infty,B}$ converge.

4.b

Bien sûr, la convergence normale entraîne la convergence absolue en tout point, et donc la convergence simple.

Comment montrer la convergence normale en pratique ?

Pour montrer que $\sum u_n$ est normalement convergente, il n'est pas nécessaire de calculer explicitement les $\|u_n\|_\infty$ (ce qui pourrait s'avérer ardu) : il suffit de trouver une *suite majorante* (α_n) de $(\|u_n\|_\infty)$, *i.e.* telle que $\|u_n\|_\infty \leqslant \alpha_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et telle que $\sum \alpha_n$ converge.

4.1

Exercice (Convergence normale) 11

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit la fonction

$$u_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\sin(n^2x+x^2)e^{-n(x+\ln(1+x))}}{n^2} \end{array}$$

Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$.

Théorème (La convergence normale implique la convergence uniforme) 4.a

On suppose que $\sum u_n$ converge normalement. Cette série de fonctions converge alors uniformément.

Démonstration

Tout d'abord, on rappelle que la convergence normale entraîne la convergence simple : la somme $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est donc bien définie.
Reste à vérifier que la suite des restes converge uniformément vers 0. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout entier $p > n$, et tout $x \in A$:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=n+1}^{p} u_k(x) \right\| &\leqslant \sum_{k=n+1}^{p} \|u_k(x)\| \\ &\leqslant \sum_{k=n+1}^{p} \|u_k\|_\infty \\ &\leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \|u_k\|_\infty \end{aligned}$$

En faisant tendre p vers l'infini (c'est possible par convergence simple), il vient :

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \|u_k\|_\infty$$

Ceci valant pour tout $x \in A$, on obtient

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \right\|_\infty \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \|u_k\|_\infty$$

d'où le résultat puisque $\sum_{k=n+1}^{\infty} \|u_k\|_\infty$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini par convergence normale de $\sum u_n$.

□

On peut dire que la convergence normale sert à cela : prouver une convergence uniforme. Il n'y a pas d'autre théorème que celui-ci pour lequel la convergence normale figure parmi les hypothèses.

On peut aussi observer (en reprenant la démonstration du théorème) que, si $\sum u_n$ converge normalement, alors

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} u_n \right\|_\infty \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|_\infty$$

et plus généralement que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \right\|_\infty \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \|u_k\|_\infty$$

Exemple (Convergence normale et fonction zêta de Riemann)

La *fonction zêta de Riemann* est définie par

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

pour tout nombre complexe s pour lequel la série $\sum \frac{1}{n^s}$ converge.
On peut montrer que l'ensemble de définition de la fonction zêta de Riemann est

$$\mathcal{D} \overset{def}{=} \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(z) > 1\}$$

On peut aussi montrer que la convergence est normale sur tout $\mathcal{D}_a$, où $a > 1$ et

$$\mathcal{D}_a \overset{def}{=} \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(z) \geqslant a\}$$

i

4.3. Ne pas confondre la convergence normale et la convergence absolue en tout point

Il ne faut pas confondre la convergence absolue en tout point et la convergence normale : la convergence absolue en tout point équivaut à

$$\forall x \in A, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p \geqslant N, \sum_{n=p+1}^{\infty} \|u_n(x)\| \leqslant \varepsilon,$$

ou encore à

$$\forall x \in A, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \sum_{n=N+1}^{\infty} \|u_n(x)\| \leqslant \varepsilon,$$

alors que la convergence normale équivaut à

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p \geqslant N \sum_{n=p+1}^{\infty} \|u_n\|_\infty \leqslant \varepsilon,$$

ou encore à

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \sum_{n=N+1}^{\infty} \|u_n\|_\infty \leqslant \varepsilon.$$

La convergence normale implique donc la convergence uniforme de $\sum \|u_n\|$ (attention, il s'agit de la norme sur E, pas de la norme infinie), soit

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall x \in A, \forall p \geqslant N \sum_{n=p+1}^{\infty} \|u_n(x)\| \leqslant \varepsilon,$$

ou encore

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall x \in A, \sum_{n=N+1}^{\infty} \|u_n(x)\| \leqslant \varepsilon$$

D'une certaine façon, l'« écart » entre convergence normale et la convergence absolue en tout point est encore plus grand qu'entre la convergence uniforme et la convergence simple.

4.4. Convergence uniforme et série de fonctions

Le travail effectué pour les suites de fonctions s'adapte sans difficulté au cas des séries de fonctions.

Théorème (Continuité ponctuelle et convergence uniforme pour une série de fonctions)

Si les u_n sont continues en a et si $\sum u_n$ converge uniformément vers S sur un voisinage de a (relatif à A), alors S est continue en a.

4.b

Comme dit précédemment, la transmission de la continuité sous hypothèse de convergence uniforme a surtout servi à montrer une non convergence uniforme (par contraposition) pour les suites de fonctions. Cette même transmission, pour les séries de fonctions, sert avant tout à montrer la continuité de la somme.

Corollaire (Limite uniforme d'une série de fonctions continues)

Si toutes les u_n sont continues sur A, et si la convergence de $\sum u_n$ est uniforme, alors la fonction somme $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ est continue sur A.

4.c

Exemple (Continuité de la fonction zêta de Riemann)

La fonction zêta de Riemann est continue sur $\mathcal{D}$ car sa restriction à tout $\mathcal{D}_a$, où $a > 1$, l'est (par convergence normale sur ce domaine d'une série de fonctions continues).

ii

Exercice (Continuité de l'exponentielle matricielle)

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccl} \exp : & \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \\ & A & \mapsto & \exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \end{array}$$

est continue sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

12

Théorème de la double limite pour les séries de fonctions

Soit a un point adhérent à A. On suppose que

(1) $\sum u_n$ converge uniformément vers S sur A.

(2) pour tout n, u_n admet une limite ℓ_n en a.

La série $\sum \ell_n$ est alors convergente, S admet une limite en a, et ces limites sont égales :

$$S(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} \ell_n.$$

4.d

Autrement dit, sous les conditions du théorème

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x \to a} u_n(x) = \lim_{x \to a} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$$

Il s'agit bien encore d'une double limite, l'une d'entre elles correspondant à la considération de la somme d'une série.

Exercice (Double limite pour une série de fonctions)

1 On considère $\sum u_n$, où $u_n : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{x}{n+n^2x}$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Montrer que sa somme S est définie au voisinage de $+\infty$, et qu'elle tend vers $\frac{\pi^2}{6}$ (*i.e.* vers $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$) en $+\infty$.

2 On considère $\sum u_n$, où $u_n : x \in]1, +\infty[\mapsto \frac{1}{n^x}$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Montrer que la convergence de $\sum u_n$ vers ζ n'est pas uniforme sur $]1, +\infty[$.

13

Théorème (Intégration d'une limite uniforme d'une série de fonctions sur un segment)

Soit (u_n) une suite de fonctions continues définies sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans E, a un point de I. On suppose que $\sum u_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction S.
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$ soit

$$U_n(x) = \int_a^x u_n, \quad \mathfrak{S}(x) = \int_a^x S.$$

Alors $\sum U_n$ converge uniformément vers $\mathfrak{S}$ sur tout segment de I.
En particulier, si $\sum u_n$ converge uniformément sur le segment $[a, b]$, alors :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{[a,b]} u_n(t)\mathrm{d}t = \int_{[a,b]} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\mathrm{d}t.$$

4.e

Théorème de dérivation d'une série de fonctions

On suppose que A est un intervalle I de $\mathbb{R}$, et que

(1) Chaque u_n est de classe $\mathcal{C}^1$.

(2) $\sum u_n$ converge simplement sur I vers une fonction S.

(3) $\sum u_n'$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction T.

La série $\sum u_n$ converge alors uniformément vers S sur tout segment de I, S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $S' = T$.

4.f

En particulier, sous les hypothèses du théorème, la somme $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} u_n'$$

C'est pourquoi ce théorème est également appelé *théorème de dérivation terme à terme.*

Exercice (Dérivation d'une série de fonctions)

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, et $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rcccl} \exp_A & : & \mathbb{R} & \to & \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \\ & & t & \mapsto & \exp(tA) \end{array}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que pour tout réel t :

$$\exp_A'(t) = A\exp_A(t) = \exp_A(t)A$$

14

Comme pour les suites de fonctions, ce théorème se généralise pour établir le caractère $\mathcal{C}^k$ (où $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$), et calculer la dérivée k-ième (si k est fini), de la somme d'une série de fonctions.

Exemple (Dérivées successives de la fonction zêta)

La fonction zêta de Riemann est indéfiniment dérivable sur $]1,+\infty[$ car, pour tout $a>1$, tout $k\in\mathbb{N}$ la série de fonctions de terme général

$$s\mapsto\frac{(-1)^k\ln(n)^k}{n^s}$$

est normalement convergente sur $[a,+\infty[$.
On a de plus, pour tout $s\in]1,+\infty[$, tout $k\in\mathbb{N}$:

$$\zeta^{(k)}(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\ln(n)^k}{n^s}$$

On notera en particulier que ζ est décroissante et convexe sur $]1,+\infty[$.

iii

4.5. Étude pratique d'une série de fonctions

On considère une série de fonctions $\sum u_n$, où les u_n sont des fonctions de variable réelle, à valeurs réelles ou complexes.

(1) Déterminer le domaine de définition de la somme $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ revient à déterminer le domaine de convergence simple.

(2) Pour étudier la régularité de la somme, on étudie s'il y a convergence uniforme (et si les u_n sont régulières).

(3) Pour étudier la convergence uniforme, on peut d'abord étudier la convergence normale.

(4) Pour les questions de régularité, ces notions étant locales, il suffit d'avoir la convergence uniforme localement en tout point, c'est-à-dire que pour tout point x du domaine, il existe un voisinage relatif de x dans ce domaine sur lequel il y a convergence uniforme.

(5) Pour l'étude asymptotique d'une série de fonctions, on pourra utiliser
   - le théorème de la double limite, quitte à multiplier $u_n(x)$ par un certain $g(x)$ afin que $\sum x\mapsto g(x)u_n(x)$ converge uniformément et que $x\mapsto g(x)u_n(x)$ ait une limite finie au point considéré.
   - Si $u_n(x)\sim l_n$ où $\sum l_n$ diverge, on peut tenter une comparaison série-intégrale (pour x fixé, on voit $u_n(x)$ comme $\varphi(n)$ où φ est monotone, et où φ est intégrable au voisinage de $+\infty$, et où on sait calculer $\int_{\alpha}^{+\infty}\varphi(t)\mathrm{d}t$).
   - On peut aussi utiliser le critère spécial des séries alternées, et notamment la majoration du reste.
   - On revient aussi parfois à la somme partielle, ou on regroupe des termes par « paquets ».

Étudier la somme d'une série de fonctions ne revient pas à étudier la série de fonctions

Si on vous demande d'étudier la somme d'une série de fonctions $S\ :\ x\mapsto\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)$, il est naturel d'étudier la série de fonctions $\sum u_n$. Cependant, si la convergence simple est acquise, on peut réécrire la fonction F comme somme d'autres séries de fonctions : par exemple, on a en tout point x pour lequel $\sum u_n(x)$ converge :

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}u_{2n}(x)+u_{2n+1}(x)$$

en regroupant les termes d'indices $2n$ et $2n+1$. Il se peut que $\sum u_{2n}+u_{2n+1}$ converge normalement (ou uniformément) sans que ce soit le cas de $\sum u_n$, ouvrant la porte à l'étude de régularité de F.

4.2

Exercice (Équivalent de la fonction zêta de Riemann en 1)

Donner un équivalent de la fonction ζ (de variable réelle) en 1, et trouver sa limite en $+\infty$.

15

Exercice (Étude d'une série de fonctions)

On définit la fonction $F\ :\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par la relation

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+n^2x}.$$

1 Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2 Donner un équivalent de F en 0^+.
3 Donner un équivalent de F en $+\infty$.

16

Exercice (Convergence uniforme non normale)

On définit la fonction $F\ :\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par la relation

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$$

1 Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
2 Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3 Montrer que F est décroissante, et que

$$F(x+1) + F(x) = \frac{1}{x}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
4 Donner un équivalent de F en 0 et en $+\infty$.
5 Vérifier aussi que pour tout $x > 1$:

$$F(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{t+1}\mathrm{d}t$$

Indication : on pourra intégrer sur $[0,1]$ la relation :

$$\sum_{n=0}^{N} (-1)^n t^{x+n-1} = t^{x-1}\frac{1-(-t)^{N+1}}{1+t},$$

valable pour tout $(N,t,x) \in \mathbb{N} \times [0,1] \times \mathbb{R}_+^*$.

17

5. Feuille de TD 10 : Suites et séries de fonctions

5.1. Suites de fonctions

Exercice 1 (Convergence simple ou uniforme de suites de fonctions) 0

Étudier la convergence simple, puis la convergence uniforme, des suites de fonctions définies par :
1 $f_n(x) = \frac{1}{1+(nx-1)^2}$.
2 $f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$.
3 $f_n(x) = x^n(1-x)$.
4 $f_n(x) = nx^n(1-x)$.
5 $f_n(x) = n^3x^n(1-x)^4$.
6 $f_n(x) = \cos(x)^n \sin(x)^{2n}$.

Exercice 2 (Exemple de convergence uniforme) 0

Vérifier que la suite (f_n), où
$$f_n(x) = n \sin \sqrt{4\pi^2n^2 + x^2},$$
pour tout réel x, tout entier naturel n, converge uniformément sur $[0, a]$ pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 3 (Une convergence uniforme) 2

1 Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, $f(1) = 0$, $f_n(x) = x^n f(x)$. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $[0, 1]$.
2 Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f, g \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{C})$, telles que $|f| \leqslant 1$ et, pour tout $x \in [a, b]$,
$$|f(x)| = 1 \Rightarrow g(x) = 0.$$
Montrer que $(f^n g)$ converge uniformément sur $[a, b]$.
Indication : pour $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, montrer que $U \stackrel{def}{=} \{x \in [a, b], |g(x)| < \varepsilon\}$ est un ouvert relatif de $[a, b]$, et considérer $K \stackrel{def}{=} [a, b] \setminus U$.

Exercice 4 (Théorème de Chudnosky) 2

Soit I un segment contenu dans $]0, 1[$.
1 Soit φ l'application $x \mapsto 2x(1-x)$. Étudier la convergence sur I de la suite de fonctions (φ_n), où $\varphi_1 = \varphi$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_{n+1} = \varphi \circ \varphi_n$.
2 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer qu'il existe une suite de fonctions polynomiales à coefficients dans $\mathbb{Z}$ convergeant uniformément vers f sur I.

Exercice 5 (Convergence simple d'une suite de fonctions convexes) 2

Soit (f_n) une suite de fonctions convexes sur le segment $[a, b]$ qui converge simplement vers f. Montrer que la convergence est uniforme sur tout compact de $]a, b[$.

Exercice 6 (Convergence simple dans un espace de dimension finie) 2

Soit V un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'éléments de V qui converge simplement sur $[0,1]$. Montrer que la convergence est uniforme.

Exercice 7 (Un exemple de convergence uniforme) 3

Sur $[0,1]$, on considère (p_n) par $p_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1], \quad p_{n+1}(x) = p_n(x) + \frac{1}{2}(x - p_n(x)^2).$$

Montrer que (p_n) converge uniformément sur $[0,1]$, et donner sa limite.

Exercice 8 (Itérée d'une fonction par un opérateur) 3

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ telles que $f_0 = f$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1], \quad f_{n+1}(x) = \frac{1}{2}\left(f_n\left(\frac{x}{2}\right) + f_n\left(\frac{x+1}{2}\right)\right).$$

Montrer que (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$ vers une application constante.

Exercice 9 (Étude de convergence d'une suite de fonctions) 3

Étudier la convergence de la suite de fonctions $(f_n) \in \left(\mathbb{R}^{[0,1]}\right)^{\mathbb{N}}$, où $f_{n+1}(x) = 2\int_0^x \sqrt{f_n(t)}\mathrm{d}t$.

Exercice 10 (Condition suffisante de convergence uniforme) 4

Soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions continues. On suppose que cette suite converge simplement vers une fonction f et que pour toute suite (x_n) de $[0,1]$ convergente de limite $x \in [0,1]$, la suite $(f_n(x_n))$ converge vers $f(x)$.

1 Prouver la continuité de f.

2 En déduire que la convergence est uniforme.

Exercice 11 (Espace de fonctions de dimension finie invariant par translation) 4

Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Soit $f \in E$. Pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, on définit $f_\tau : x \mapsto f(x+\tau)$. On suppose que $V = \mathrm{Vect}(f_\tau, \tau \in \mathbb{R})$ est de dimension finie. Que dire de f ?

Exercice 12 (Théorème de sélection de Helly) 4

1 Soit $E \subset \mathbb{R}$ dénombrable et (f_n) une suite de fonctions de E dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout n et tout x de E, $|f_n(x)| \leqslant 1$. Montrer qu'il existe une sous-suite de (f_n) qui converge simplement vers une fonction $f : E \to \mathbb{R}$.

2 Soit (f_n) une suite de fonctions croissantes de $\mathbb{R}$ dans $[-1,1]$. Montrer qu'il existe une sous-suite de (f_n) qui converge simplement vers une fonction $f : \mathbb{R} \to [-1,1]$.

5.2. Séries de fonctions

Exercice 13 (Calcul d'intégrale par une série de fonctions) 0

Calculer $I = \int_0^{\pi/2} \cos(\cos(\theta)) \operatorname{ch}(\sin(\theta)) \mathrm{d}\theta$.

Exercice 14 (Série de fonctions cachée) 1

Trouver la limite de

$$u_n \stackrel{def}{=} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n$$

Indication : on pourra introduire une série de fonctions $\sum v_k$, et utiliser le théorème de la double limite en $+\infty$.

Exercice 15 (Équivalents de séries de fonctions) 1

1 Déterminer un équivalent au voisinage de 0 de $S_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}(nx)}$.

2 Même question pour $S_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}^2(nx)}$.

Exercice 16 (Encore une étude de somme de série de fonctions) 1

Étudier $\sum_{n\geqslant 1} f_n \ : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, où

$$\forall\, n \geqslant 1, \forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) = \frac{(-1)^n n}{x^2 + n^2}.$$

Exercice 17 (Équivalent pour une série de fonctions, encore) 1

Montrer : $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{x}{n^2}\right) \sim_{+\infty} \pi\sqrt{x}$.

Exercice 18 (Un autre équivalent pour une somme de série de fonctions) 1

Pour $n \geqslant 2$, on pose

$$\begin{array}{rccl} f_n : & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{\sqrt{x}\ln(n)}{1+n^2 x} \end{array}$$

Trouver un équivalent de $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ en $+\infty$.

Exercice 19 (Étude d'une série de fonctions) 1

Pour $x \in \mathbb{R}$, $n \geqslant 2$, on pose $f_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{\ln(n)}$.
1 Donner le domaine de convergence (simple) de $\sum f_n$. On note φ la somme.
2 Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3 La série $\sum f_n$ converge-t-elle normalement ?
4 φ est-elle continue en 0 ?
5 Y a-t-il convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 20 (Toujours une étude de série de fonctions) 1

On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2+n^2}$.
1 Donner le domaine de définition de f.
2 Y a-t-il continuité ?
3 Y a-t-il convergence normale sur $\mathbb{R}$?
4 Donner la limite de f en $+\infty$.
5 Y a-t-il convergence uniforme sur $\mathbb{R}$?

Exercice 21 (Une convergence uniforme non normale) 2

Soit

$$f_n \; : \; \begin{array}{ccc}]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x(1-x)^n}{\ln(x)} \end{array}$$

Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément mais non normalement sur $]0,1[$.

Exercice 22 (Équation fonctionnelle et séries de fonctions) 3

Trouver les fonctions $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ telles que, pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{f(x^n)}{2^n}$.

Exercice 23 (Équivalent faisant intervenir la fonction ζ) 4

Soit $\alpha \in [1,\infty[$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sigma_\alpha(n) = \sum_{d|n} d^\alpha$. On pose $S_\alpha(n) = \sigma_\alpha(1) + \cdots + \sigma_\alpha(n)$.
1 Prouver que $S_\alpha(n) = \sum_{k=1}^{n} E(n/k)k^\alpha$.
2 Montrer qu'on a l'équivalent suivant quand $n \to +\infty$:

$$S_\alpha(n) \sim \frac{\zeta(\alpha+1)}{\alpha+1} n^{\alpha+1}.$$

3 En déduire un équivalent quand $\alpha \in \mathbb{N}^*$ de $L_\alpha(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^\alpha t^n}{1-t^n}$, lorsque $t \to 1^-$.

Exercice 24 (Étude d'une série de fonctions par transformation d'Abel) 5

Montrer que $\sum \frac{\sin(nx)}{n}$ converge simplement, puis montrer la convergence uniforme sur tout segment ne rencontrant pas $2\pi\mathbb{Z}$. Y a-t-il convergence uniforme sur $\mathbb{R}$?

6. Oraux

Exercice 25 (Convergence simple et uniforme d'une suite de fonctions et de sa dérivée) 0

(Navale 13) Pour n dans $\mathbb{N}^*$ et x dans $\mathbb{R}^+$, soit $u_n(x) = \frac{x}{1+n^2x}$. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et de $(u'_n)_{n\geqslant 1}$.

Exercice 26 (Convergence uniforme sur tout segment mais non uniforme) 0

(CCP MP 13) Soit $f_n : x \mapsto \cos\left(\frac{nx}{n+1}\right)$.

1 Étudier la convergence simple de la suite (f_n) sur $\mathbb{R}$.

2 Étudier la convergence uniforme sur tout segment $[-a, a]$.

3 Montrer que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.

Indication : utiliser $x_n = (n + 1)x$.

Exercice 27 (Convergence d'une série de fonctions (CCP MP 13)) 0

Soit, pour $n \geqslant 2$: $u_n : x \in [0, 1] \mapsto \frac{1}{\ln n}\, x^n(1 - x)$. Étudier la convergence de la série de fonctions de terme général u_n.

Exercice 28 (Continuité de la somme d'une série de fonctions) 0

(CCP MP 13) Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto \frac{1}{1+e^{nx}}$.

1 Étudier la convergence de la série de fonctions de terme général f_n.

2 Montrer que $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 29 (Régularité de la somme d'une série de fonctions) 0

(CCP MP 13) Soit $f : x \mapsto \sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{-n^2x}}{1+n^2}$.

1 Déterminer l'ensemble de définition D de f.

2 Montrer que f est continue sur D.

3 La fonction f est-elle dérivable sur D ? intégrable sur D ?

Exercice 30 (Équation fonctionnelle et série de fonctions) 3

(CCP MP 13) Soit E l'ensemble des $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f(x + 1) - f(x) = 1/x$; $f(1) = 0$; f est croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

1 On pose $u_n : x \mapsto \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$. Montrer que $u : x \mapsto -\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer que $u \in E$.

2 Soient f et g deux fonctions de E, et $\delta = f - g$. Montrer que δ est 1-périodique. Quelle est la limite de δ en $+\infty$?

3 En déduire que $f = g$. Que vaut E ?

Exercice 31 (Régularité d'une série de fonctions puis détermination de la somme) 3

(CCP MP 13) Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-x)^n}{n^2}$.

1 Déterminer le domaine de définition de f. En quels points f est-elle dérivable ?

2 Calculer f' puis f.

CHAPITRE XI

Réduction des endomorphismes

Sommaire

Ce chapitre continue à tisser les liens entre l'aspect matriciel de l'algèbre linéaire (aspect synthétique et calculatoire) et l'aspect géométrique (notions de vecteurs, droites, plans, et plus généralement espaces et sous-espace vectoriel, endomorphismes, etc.). Il faut avoir une bonne intuition de ces deux aspects, et savoir passer de l'un à l'autre.

Parmi les matrices carrées, celles pour lesquelles les calculs s'effectuent le plus simplement sont les matrices diagonales : on calcule aisément les puissances d'une matrice diagonale, et, partant, on évalue facilement tout polynôme en une telle matrice. Si une matrice carrée A est semblable à une matrice diagonale $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, les calculs sur A se réduisent à des calculs sur D. Plus précisément, si $A = P^{-1}DP$, où $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors, pour tout $Q \in \mathbb{K}[X]$, on a $Q(A) = P^{-1}Q(D)P$, *i.e.*

$$Q(A) = P^{-1} \begin{pmatrix} Q(\lambda_1) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \mathbf{0} & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \mathbf{0} & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & Q(\lambda_n) \end{pmatrix} P$$

Ce transport provient du fait que l'application $M \mapsto P^{-1}MP$ soit un automorphisme de l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Il est donc très utile de savoir si une matrice est semblable à une matrice diagonale, *i.e.* de savoir si elle est *diagonalisable.*

Malheureusement, une matrice carrée quelconque n'est pas, en général, diagonalisable : par exemple les seules matrices nilpotentes qui sont diagonalisables sont nulles.

On cherchera donc une autre notion, beaucoup moins exigeante (et moins pratique) que la diagonalisabilité, pour se ramener à une forme de matrice facilitant malgré tout les calculs : nous nous demanderons si une matrice carrée est semblable à une matrice triangulaire supérieure, *i.e.* si elle est *trigonalisable.*

L'objet de ce chapitre, à savoir la réduction d'un endomorphisme ou une matrice, peut se résumer ainsi :

(1) On se demande s'il ou elle est diagonalisable.
(2) Si c'est le cas, on peut chercher à rendre effective cette diagonalisation (on explicite une matrice P de changement de base comme ci-dessus).
(3) Sinon, on se demande s'il ou elle est trigonalisable.

(4) Si c'est le cas, on peut chercher à rendre effective cette trigonalisation.

Avant de rentrer dans le vif du sujet, on peut insister sur l'importance du corps des scalaires dans lequel on travaille. Pour un endomorphisme, ce corps est implicite, mais une matrice à coeffficients dans un corps $\mathbb{K}$ peut aussi être vu comme à coefficients dans un surcorps quelconque $\mathbb{K}'$ de $\mathbb{K}$. Par exemple, nous verrons qu'une matrice réelle n'est pas toujours trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, mais que si on la voit comme une matrice complexe, alors elle est trigonalisable.

Dans ce chapitre, il faudra avoir conscience que l'on a fixé (parfois implicitement) un corps des scalaires dans lequel on travaille, et que toute notion faisant référence à un corps suppose implicitement que l'on travaille dans ce corps. Par exemple lorsque nous parlerons d'un polynôme scindé, il s'agira d'un polynôme scindé sur $\mathbb{K}$.

Sauf mention contraire, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n sera un entier naturel non nul, E sera un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, u, v, f, g désigneront des endomorphismes de E. A et B désigneront des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Généralités

1.1. La relation de similitude matricielle

Définition (Matrices semblables) 1.a

Deux matrices carrées A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites *semblables* s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$B = P^{-1}AP$$

La relation « est semblable à » est une relation d'équivalence, appelée relation de *similitude (matricielle)*.

Si A et B sont semblables, alors elles sont équivalentes, mais la réciproque est fausse, même pour des matrices carrées :

Pour que A et B soient semblables, il faut qu'elles aient même rang, même trace, même déterminant [1]. On dit que le rang, la trace et le déterminant sont des *invariants de similitude*.

Un invariant de similitude a une traduction en termes d'endomorphismes : on définit cet invariant pour u comme l'invariant commun à tous ses représentants matriciels (dans une base donnée). C'est comme cela qu'on a défini la trace d'un endomorphisme par exemple.

Si $B = P^{-1}AP$, alors par une simple récurrence, ou parce que la conjugaison par P^{-1}, *i.e.* l'application $M \mapsto P^{-1}MP$, est un (auto)morphisme de l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a

$$B^k = P^{-1}A^kP$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$, et cette relation s'étend aux entiers négatifs si A (et donc B) est inversible.

Bien souvent, pour calculer une puissance k-ième d'une matrice, on cherche une matrice diagonale à laquelle elle est semblable, car ces dernières matrices ont des puissances facilement calculables. C'est le problème de la diagonalisation d'une matrice.

Si A et B sont semblables, alors, pour tout polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$, $Q(A)$ et $Q(B)$ sont semblables (et ont donc mêmes invariants de similitude). Plus précisément, si $B = P^{-1}AP$, alors

$$Q(B) = P^{-1}Q(A)P.$$

La classe de similitude d'une matrice carrée (*i.e.* l'ensemble des matrices auxquelles elle est semblable) est d'autant plus « grosse » que son commutant est « petit ».

Dans le cas d'une matrice scalaire λI_n, qui est dans le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la classe de similitude est le singleton $\{\lambda I_n\}$.

1. Mais cela ne suffit pas en général.

Proposition (Caractérisation des matrices semblables (interprétation géométrique))

Deux matrices carrées A et B de taille n sont semblables si et seulement si il existe un endomorphisme u d'un espace vectoriel E de dimension n, et deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de E, telles que

$$A = M_{\mathcal{B}}(u) \text{ et } B = M_{\mathcal{C}}(u)$$

1.a

Endomorphisme canoniquement associé à une matrice carrée

L'endomorphisme canoniquement associé à A est l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ représenté par A dans la base canonique. Il arrive fréquemment que l'on identifie A et l'endomorphisme qui lui est canoniquement associé, et donc que l'on parle de $\mathrm{Ker}(A)$ et de $\mathrm{Im}(A)$ par exemple. Le plus souvent, le contexte permet de comprendre à qui on fait référence (matrice ou endomorphisme) lorsqu'on parle de A.

1.1

1.2. Notion de sous-espace stable, endomorphisme induit sur un sous-espace stable

Définition (Sous-espace stable par un endomorphisme. Endomorphisme induit)

Soit F un sous-espace vectoriel de E. On dit que F est *stable* par u, ou que u *stabilise* F, si $u(F) \subset F$.
Dans un tel cas, on peut définir l'application

$$u_{|F}^{|F} : \begin{array}{ccc} F & \to & F \\ x & \mapsto & u(x) \end{array}$$

appelée *endomorphisme de F induit par u.*

1.b

Bien sûr, les sous-espaces triviaux $\{0_E\}$ et E sont stables par tout endomorphisme de E, et ne présentent donc que peu d'intérêt pour cette notion.

La somme et l'intersection de deux sous-espaces vectoriels stables par u le sont encore.

Si F est stable par u et v, alors il l'est par $u \circ v$, et par toute combinaison linéaire de u et v. En termes de structures, on montre aisément que l'ensemble des endomorphismes de E stabilisant F est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

Exercice (Quand un endomorphisme laisse stable tout sous-espace)

On suppose que u laisse stable tout sous-espace vectoriel de E. Montrer que u est une homothétie.

1

Si F est stable par u et si v désigne l'endomorphisme de F induit par u, alors :
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, F est stable par u^n, et l'endomorphisme de F induit par u^n n'est rien d'autre que v^n.
- Plus généralement, pour tout $Q \in \mathbb{K}[X]$, F est stable par $Q(u)$, et l'endomorphisme de F induit par $Q(u)$ est $Q(v)$.
- $\mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Ker}(u) \cap F$, $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Im}(u) \cap F$, mais cette inclusion est stricte en général.

Supposons E de dimension finie n, et soit F un sous-espace vectoriel non trivial de E, de dimension m. Soit M la matrice de u dans une base adaptée à F (*i.e.* obtenue en complétant une base de F en une base de E). Le fait que F soit stable par u se traduit par le fait que M soit triangulaire supérieure par blocs (avec deux blocs diagonaux A' et D' de tailles respectives m et $n-m$) :

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A' & B' \\ \hline 0 & D' \end{array}\right)$$

De plus, si u est bijectif, alors l'endomorphisme qu'il induit sur F l'est aussi.

Endomorphisme induit (en seconde lecture)

Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à A, et soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Soit enfin $m \in [\![1, n-1]\!]$. On peut considérer la matrice A' extraite de A en n'en conservant que les m premières lignes et colonnes, et écrire A par blocs

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A' & B' \\ \hline C' & D' \end{array}\right)$$

Soit v l'endomorphisme du sous-espace vectoriel $F \stackrel{def}{=} \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_m)$ de $\mathbb{K}^n$ dont la matrice dans $(e_1, \dots, e_m)$ est A'.
Cette construction a un sens, mais elle n'a que peu de lien avec l'endomorphisme de départ u. Par exemple, il n'y a aucune raison à ce que v soit bijectif si u l'est, et v^2 n'a *a priori* aucun rapport avec u^2.
Si, matriciellement, la considération de A' peut sembler naturelle, il n'y a pas d'interprétation géométrique simple de A' (hormis justement dans le cas où F est stable par u, *i.e.* le bloc matriciel C' sous A' dans A est nul).

1.2

On peut cependant noter que si $M = \left(\begin{array}{c|c} A' & B' \\ \hline 0 & D' \end{array}\right)$, alors pour tout $Q \in \mathbb{K}[X]$,

$$Q(M) = \left(\begin{array}{c|c} Q(A') & \star \\ \hline 0 & Q(D') \end{array}\right)$$

Bien que D' n'ait pas d'interprétation géométrique simple (sauf si B' est nulle), ce bloc se comporte bien avec la multiplication matricielle.

2. Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

Un cas de sous-espace stable à la fois simple et intéressant est celui de la droite. Dire qu'une droite vectorielle $D = \mathbb{K}x$ est stable par un endomorphisme u, c'est dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$, *i.e.* $x \in \ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$.

Définition (Valeur propre, sous-espace propre, vecteur propre)

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est *valeur propre* de u si l'endomorphisme $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas injectif, *i.e.* si $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$ n'est pas réduit à 0_E.
Dans ce cas, $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$ (qui est aussi $\{x \in E, u(x) = \lambda x\}$) est appelé *sous-espace propre* de u associé à la valeur propre λ, et noté $E_\lambda(u)$.
Tout vecteur *non nul* de $E_\lambda(u)$ est appelé *vecteur propre* de u associé à la valeur propre λ.

2.a

Par définition, un vecteur propre est *non nul*. En ôtant le vecteur nul :

(1) On évite que tout scalaire soit valeur propre.

(2) On s'assure qu'à tout vecteur propre, corresponde une unique valeur propre.

En revanche, à toute valeur propre, on peut associer une infinité de vecteurs propres (si on travaille sur un corps infini).

On peut étendre la notation $E_\lambda(u)$ au cas où λ n'est pas valeur propre de u. On a alors $E_\lambda(u) = \{0_E\}$.

Si E est de dimension finie non nulle, alors λ est valeur propre de u si et seulement si $\det(u - \lambda \mathrm{Id}_E) = 0$.

La notion de valeur propre intervient implicitement en SI, lorsque vous parlez de matrices d'inductance (inductance cyclique et inductance homopolaire).

Définition (Spectre)

On appelle *spectre* de l'endomorphisme u d'un espace de dimension finie non nulle, et on note $\mathrm{Sp}(u)$, l'ensemble de ses valeurs propres.

2.b

On a donc, dans ce contexte :

$$\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda \in \mathbb{K},\ \det(u - \lambda \mathrm{Id}_E) = 0\}$$

En particulier, le spectre d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie n est fini, et de cardinal au plus n (l'application $\lambda \mapsto \det(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$ est polynomiale de degré n).

De plus :

(1) Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, u admet au moins une valeur propre, d'après le théorème de d'Alembert-Gauss.

(2) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et si n est impair, alors u admet au moins une valeur propre (réelle). C'est une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires.

Proposition (La somme d'une famille finie de sous-espaces propres est directe) 2.a

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des valeurs propres distinctes de u. La somme

$$E_{\lambda_1}(u) + \cdots + E_{\lambda_p}(u)$$

est alors directe.

Démonstration

Rappeler (sans détailler) les deux schémas de démonstration proposés précédemment.

□

Nous verrons une autre démonstration fondée sur le lemme des noyaux.

Cette proposition est présentée dans le cas où les λ_i sont supposées être des valeurs propres, mais on peut l'étendre au cas de scalaires λ_i quelconques (distincts).

Corollaire (Vecteurs propres associées à des valeurs propres distinctes) 2.b

Toute famille de vecteurs propres pour u associés à des valeurs propres distinctes est libre.

Démonstration

□

Exercice (Liberté et sous-espaces propres)

1 Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des complexes distincts deux à deux. Pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, on définit

$$f_k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & e^{\lambda_k x} \end{array}.$$

Montrer que la famille $(f_1, \dots, f_p)$ est libre.

2 Montrer de même que si les λ_i sont supposés réels positifs (et toujours distincts deux à deux), alors la famille constituée des $g_k : x \mapsto \cos(\lambda_k x)$ est libre.

2

Lemme (Stabilité et commutant)

On suppose que u et v commutent. Les sous-espaces vectoriels $\ker(u)$ et $\operatorname{Im}(u)$ de E sont alors stables par v.

2.c

Démonstration

□

Proposition (Sous-espaces propres et endomorphismes qui commutent)

On suppose que les endomorphismes u et v commutent. Tout sous-espace propre de u est alors stable par v.

2.d

Démonstration

□

Ce résultat *n'affirme pas* que deux endomorphismes qui commutent stabilisent les mêmes sous-espaces : nous n'avons mentionné que des sous-espaces propres.

Exercice (Effet d'un automorphisme intérieur sur les éléments propres) 3

On suppose que $v \in \mathrm{GL}(E)$, et on pose $w = vuv^{-1}$. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$E_\lambda(w) = v(E_\lambda(u))$$

En confondant A et l'endomorphisme canoniquement associé, on peut définir les notions de valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres et spectre d'une matrice carrée.

Le spectre de A est donné par

$$\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda \in \mathbb{K},\ \det(A - \lambda I_n) = 0\}.$$

L'équation $AX = \lambda X$, d'inconnues $\lambda \in \mathbb{K}$ et $X \in \mathbb{K}^n (= \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$ est appelée *équation aux éléments propres*, et sa résolution permet de trouver les éléments propres de A. En fait, en pratique, on trouve d'abord les valeurs propres (en résolvant l'équation polynomiale $\det(A - \lambda I_n) = 0$), puis on résout l'équation aux éléments propres pour les valeurs propres trouvées.

Cette relation peut se faire matriciellement : on calcule $A - \lambda I_n$, et on cherche des relations de liaison sur les colonnes de cette matrice, ce qui nous donnera des vecteurs propres pour la valeur propre λ.

Exercice (Recherche d'éléments propres (extrait de banque CCP 2015)) 4

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

Deux matrices semblables ont même spectre (le spectre est un invariant de similitude). Bien évidemment, la réciproque est fausse.

Extension du corps des scalaires 2.1

Si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{K}'$ et si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le spectre de M dans $\mathbb{K}$ est contenu dans le spectre de M dans $\mathbb{K}'$.

Attention ! Dans le cas d'une extension de corps des scalaires d'une matrice, on perd *a priori* l'interprétation géométrique : dire que $1 + 2i$ est valeur propre d'un endomorphisme u d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel n'a pas de sens, mais dire que $1 + 2i$ est valeur propre d'une certaine matrice représentant u dans une base en a un.

Exercice (Lorsque la classe de similitude est un singleton) 5

Montrer que la classe de similitude de A est un singleton si et seulement si A est une matrice scalaire.

3. Polynôme caractéristique

On suppose ici E de dimension finie n.

Définition (Polynôme caractéristique (matrice carrée)) 3.a

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle *polynôme caractéristique* de M et on note χ_M le polynôme

$$\chi_M \overset{def}{=} \det(XI_n - M)$$

C'est la définition officielle, vous rencontrerez éventuellement des ouvrages (anciens) où le polynôme caractéristique est défini comme $\det(M - XI_n)(= (-1)^n \det(XI_n - M))$.

Polynôme caractéristique (lecture facultative) 3.1

Cette définition fait parler d'une matrice dont les coefficients sont des polynômes. Ce n'est pas un réel problème, on peut construire une théorie des matrices à coefficients dans un anneau commutatif (ici, $\mathbb{K}[X]$), et on peut même dans le cas présent voir ces polynômes comme des fractions rationnelles, et donc travailler dans l'anneau des matrices carrées de taille n à coefficients dans le *corps* des fractions rationnelles.
Une autre façon de pallier ce problème consiste à transiter par la fonction polynomiale $\lambda \mapsto \det(\lambda I_n - M)$, puis à considérer le polynôme associé, mais cette identification entre fonction polynomiale et polynôme ne fonctionne que si le corps des coefficients est infini (ce qui est le plus souvent le cas en pratique, mais on pourrait très bien parler de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ par exemple, où p est un nombre premier : dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$, le polynôme $X^p - X$ n'est pas le polynôme nul, mais la fonction polynomiale associée est la fonction nulle).

Lemme (Polynôme caractéristique) 3.a

Le polynôme caractéristique est un invariant de similitude, *i.e.* deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

Démonstration

$\square$

Définition (Polynôme caractéristique (endomorphisme)) 3.b

On appelle *polynôme caractéristique* d'un endomorphisme u d'un espace vectoriel de dimension finie non nulle et on note χ_u le polynôme caractéristique de n'importe quelle matrice le représentant dans une base.

Les racines du polynôme caractéristique sont les valeurs propres.

Coefficients du polynômes caractéristique 3.2

(1) Le polynôme caractéristique χ_u est unitaire.
(2) Le coefficient de degré 0 de χ_u est $\chi_u(0)$, soit $(-1)^n \det(u)$.
(3) Le coefficient de degré $n-1$ de χ_u est $-\operatorname{tr}(u)$.

Définition (Multiplicité d'une valeur propre)

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. On appelle *multiplicité* de la valeur propre λ de u son ordre de multiplicité comme racine de χ_u.

3.c

De même, on définit classiquement les notions de valeur propre multiple, simple, double, triple, etc.

Proposition (Dimension d'un sous-espace propre et multiplicité de la valeur propre associée)

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. La dimension de $E_\lambda(u)$ est majorée par la multiplicité de la valeur propre λ de u.

3.b

Démonstration

Faire un raisonnement matriciel en choisissant une base adaptée à $E_\lambda(u)$.

$\square$

Cette inégalité peut être stricte.

Multiplicité

Certains appellent la multiplicité précédemment définie la multiplicité *algébrique* de la valeur propre λ, et appellent *multiplicité géométrique* la dimension de $E_\lambda(u)$. La proposition précédente affirme alors que la multiplicité géométrique est inférieure ou égale à la multiplicité algébrique.

3.3

Exemple (Polynôme caractéristique, multiplicité d'une valeur propre)

(1) Le polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire de coefficients diagonaux $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ est
$$\prod_{k=1}^{n}(X - \lambda_k).$$
(2) Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit par u divise χ_u.
(3) Plus généralement, si A est triangulaire par blocs, alors χ_A est le produit des polynômes caractéristiques des blocs diagonaux (et ces derniers divisent donc en particulier χ_A).

i

4. Polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

L'application

$$\Delta : \begin{array}{rcl} \mathbb{K}[X] & \to & \mathcal{L}(E) \\ P & \mapsto & P(u) \end{array}$$

est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres. C'est en particulier un morphisme d'anneaux, donc son noyau est un idéal, appelé *idéal annulateur de u* (et on dit qu'un élément de cet idéal *annule* u). L'image de Δ est la sous-algèbre commutative $\mathbb{K}[u]$ de $\mathcal{L}(E)$ des polynômes en u.

Il faut faire attention à la notation $P(u)(x)$, où $P \in \mathbb{K}[X]$, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$. Le seul sens raisonnable à donner à cette expression est $(P(u))(x)$, *i.e.* l'évaluation en x de l'endomorphisme $P(u)$ de E. **L'expression $P(u(x))$ n'a *a priori* aucun sens.**

Par exemple, pour tous polynômes P, Q et R tels que $R = PQ$, tout $x \in E$, on a

$$R = PQ, \text{ donc } R(u) = P(u)Q(u) \text{ puis } (R(u))(x) = P(u)(Q(u)(x)),$$

où $P(u)Q(u)$ est en fait $P(u) \circ Q(u)$.

De même, pour M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'application

$$\nabla : \begin{array}{rcl} \mathbb{K}[X] & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ P & \mapsto & P(M) \end{array}$$

est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres. C'est en particulier un morphisme d'anneaux, donc son noyau est un idéal, appelé *idéal annulateur de M* (et on dit qu'un élément de cet idéal *annule* M). Son image est la sous-algèbre commutative $\mathbb{K}[M]$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ des polynômes en M.

L'idéal annulateur est un invariant de similitude.

Lemme sur l'idéal annulateur 4.a

Si E est de dimension finie, l'idéal annulateur de u n'est pas réduit à zéro.

Démonstration

□

En dimension infinie, il se peut que l'idéal annulateur soit réduit à zéro :

Proposition (Les valeurs propres sont des racines de tout polynôme annulateur) 4.b

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, et soit $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $u(x) = \lambda x$. On a alors

$$P(u)(x) = P(\lambda)\, x$$

Par conséquent, si P annule u, toute valeur propre de u est racine de P.

Démonstration

$\square$

Théorème (Lemme de décomposition des noyaux) 4.c

Si $P_1, \dots, P_r$ sont des éléments de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux de produit égal à P, alors :

$$\mathrm{Ker}\,(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}\,(P_i(u))\,.$$

Démonstration

En supposant déjà établi le cas où $r = 2$, montrer le résultat général par récurrence sur $r \in \mathbb{N}^*$.

$\square$

Traitons maintenant le cas où $r = 2$.

Démonstration

Vérifier que $\mathrm{Ker}(P_1(u))$ et $\mathrm{Ker}(P_2(u))$ sont bien des sous-espaces vectoriels de $\ker(P(u))$.

Comme $P_1 \wedge P_2 = 1$, il existe $U_1, U_2 \in \mathbb{K}[X]$ tels que

$$U_1P_1 + U_2P_2 = 1$$

En évaluant cette relation en u (*i.e.* en appliquant Δ), il vient :

$$U_1(u)P_1(u) + U_2(u)P_2(u) = \mathrm{Id}_E$$

En évaluant cette relation en $y \in E$, il vient

$$(\star) \quad U_1(u)(P_1(u)(y)) + U_2(u)(P_2(u)(y)) = y.$$

Analyse : supposons disposer, pour $x \in \mathrm{Ker}(P(u))$, d'un couple $(x_1, x_2) \in \mathrm{Ker}(P_1(u)) \times \mathrm{Ker}(P_2(u))$ tel que $x = x_1 + x_2$.
En évaluant $\star$ en x_1, puis en x_2, il vient

$$x_1 = U_2(u)(P_2(u)(x_1)) \quad \text{et} \quad x_2 = U_1(u)(P_1(u)(x_2))$$

Or $x = x_1 + x_2$ et $x_2 \in \mathrm{Ker}\, P_2(u)$, donc, nécessairement :

$$x_1 = U_2(u)P_2(u)(x) \text{ et de même } x_2 = U_1(u)P_1(u)(x)$$

Ceci donne l'unique couple susceptible de convenir.
Synthèse : pour tout $x \in \ker(P(u))$, ces formules définissent bien des éléments respectifs de $\mathrm{Ker}(P_1(u))$ et $\mathrm{Ker}(P_2(u))$, de somme x (en évaluant $\star$ en x).

□

L'une des difficultés de ce théorème est de retenir l'hypothèse : les P_1 sont-ils premiers entre eux deux à deux ou dans leur ensemble ? On peut retenir que ce théorème exige une hypothèse forte (premiers entre eux deux à deux), pour conclure à une conclusion forte (non seulement les $\mathrm{Ker}(P_i(u))$ sont en somme directe deux à deux, mais ils sont même en somme directe).

On peut aussi le tester dans le cas où les P_i sont premiers entre eux dans leur ensemble mais où $P_1 = P_2$ par exemple, pour constater que ce n'est pas la bonne hypothèse.

Exercice (Lemme de décomposition des noyaux et sous-espaces propres) 6

Montrer que les sous-espaces propres sont en somme directe à partir du lemme de décomposition des noyaux.

Dans la suite, on suppose E de dimension n.

Définition (Polynôme minimal) 4.a

Le *polynôme minimal* d'un endomorphisme u d'un espace de dimension finie (resp. d'une matrice carrée A) est l'unique générateur unitaire de son idéal annulateur. On le note μ_u (resp. μ_A).

Cette notation est assez standard, mais ne figure pas dans le programme officiel (il faudra donc la préciser dans vos copies si besoin est).

Si on note $\mathcal{I}$ l'idéal annulateur de u (ou de A), et μ son polynôme minimal, alors

$$\mathcal{I} = \mu\mathbb{K}[X] = \{\mu P,\ P \in \mathbb{K}[X]\}$$

Bien sûr, pour tout polynôme annulateur P, toute racine de μ est racine de P, mais la réciproque est fausse.
Le polynôme minimal d'une matrice carrée est un invariant de similitude.

Exemple (Polynôme minimal)

(1) Le polynôme minimal de u (resp. de A) est de degré 1 si et seulement si u est une homothétie (resp. une matrice scalaire).

(2) Supposons que u soit un projecteur : $u^2 = u$, donc $X^2 - X$ annule u. Les polynômes minimaux possibles pour u sont X (si $u = 0$), $X - 1$ (si $u = \mathrm{Id}_E$), et $X^2 - X$ (si $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ ne sont pas triviaux).

(3) Le polynôme minimal de $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est $(X-2)(X-3)$, mais celui de $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est $(X-2)^2(X-3)$.

i

Proposition (Base de la sous-algèbre engendrée par un endomorphisme)

Si d est le degré du polynôme minimal de u, alors la famille $(u^k)_{0 \leqslant k \leqslant d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$.

4.d

Démonstration

□

Théorème de Cayley-Hamilton

χ_u annule u.

4.e

Démonstration

Démonstration non exigible.

□

Autrement dit, μ_u divise χ_u.
On a donc $\deg(\mu_A) \leqslant n$, et l'égalité a lieu si et seulement si $\mu_A = \chi_A$.

Exemple (Théorème de Cayley-Hamilton)

En taille 2, *i.e.* si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, alors $X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A)$ est un polynôme annulateur de A.
Évidemment, cette formule est fausse si $n \neq 2$, car χ_A est de degré n.

ii

Exercice (Racines des polynôme minimal et caractéristique)

Montrer que μ_u et χ_u ont les mêmes racines.
Remarque : on peut utiliser le théorème de Cayley-Hamilton pour une des deux inclusions, mais on peut aussi s'en passer.

7

5. Endomorphismes et matrices carrées diagonalisables

On suppose ici E de dimension finie n.

Définition (Endomorphisme diagonalisable)

Un endomorphisme d'un espace vectoriel E est dit *diagonalisable* s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est diagonale. Une telle base est constituée de vecteurs propres, et appelée *base de diagonalisation*.

5.a

Pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable, il faut et il suffit que la somme de ses sous-espaces propres soit égale à E.

Exemple (Diagonalisabilité)

(1) Les projecteurs et les symétries sont diagonalisables.
(2) Tout polynôme en un endomorphisme diagonalisable est diagonalisable.
(3) L'ensemble des endomorphismes diagonalisables de E est stable par multiplication par un scalaire, mais n'est en général stable ni par somme ni par composition.
(4) Le seul endomorphisme de E à la fois diagonalisable et nilpotent est $0_{\mathcal{L}(E)}$.

i

Définition (Matrice carrée diagonalisable)

Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *diagonalisable* si l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé est diagonalisable.

5.b

Pour qu'une matrice carrée soit diagonalisable, il faut et il suffit qu'elle soit semblable à une matrice diagonale.

Cela revient encore à dire que sa classe de similitude possède une matrice diagonale.

Si une matrice carrée est diagonalisable, alors elle est semblable à sa transposée (on remarquera notamment que cette dernière est également diagonalisable). La réciproque est fausse.

Notons

$$S \overset{def}{=} \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u).$$

Comme cette somme est directe,

$$\dim(S) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim(E_\lambda(u)).$$

Notons m_λ la multiplicité (algébrique) de la valeur propre λ, et posons

$$K \overset{def}{=} \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} m_\lambda.$$

Remarque : Que mesure K ?K est le nombre de racines de χ_u dans $\mathbb{K}$, comptées avec leur ordre de multiplicité. En quelque sorte, K mesure donc à quel point χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$: dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et si $\chi_u = X^2 + 1$, alors $K = 0$. Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, K est toujours égal à n.

On sait que u est diagonalisable si et seulement si $\dim(S) = n$.

Lemme (Première obstruction de diagonalisabilité)

On a

$$\dim(S) \leqslant K,$$

l'égalité ayant lieu si et seulement si $\dim(E_\lambda(u)) = m_\lambda$, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, *i.e.*, pour toute valeur propre de u, les multiplicités algébrique et géométrique sont égales.

5.a

Démonstration

□

Lemme (Seconde obstruction de diagonalisabilité)

On a

$$K \leqslant n,$$

l'égalité ayant lieu si et seulement si χ_u est scindé (sur $\mathbb{K}$).

5.b

Démonstration

□

Ainsi :

Proposition (Caractérisation de diagonalisabilité par le polynôme caractéristique)

Pour qu'un endomorphisme u soit diagonalisable, il faut et il suffit que χ_u soit scindé et que, pour toute valeur propre de u, la dimension de l'espace propre associé soit égale à sa multiplicité.

5.c

Démonstration

□

Bien sûr, ceci se traduit matriciellement, par : A est diagonalisable si et seulement si χ_A est scindé, et pour toute valeur propre de A, la dimension de l'espace propre associé est égale à sa multiplicité.

Caractérisation de diagonalisabilité par le polynôme caractéristique

Ainsi, u est diagonalisable si et seulement si χ_u est scindé et pour toute valeur propre de u, les multiplicités géométrique et algébrique sont égales. 5.1

Exercice (Diagonalisation pratique)

(Banque oral CCP 2015) On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

où a est un réel. 8

1 Déterminer le rang de A.

2 Pour quelles valeurs de a, la matrice A est-elle diagonalisable ?

3 (Ajout) Effectuer la diagonalisation pratique de A (lorsque c'est possible).

Théorème (Caractérisation de diagonalisabilité par un polynôme annulateur)

Les assertions suivantes sont équivalentes : 5.d

(1) u est diagonalisable.

(2) Le polynôme minimal de u est scindé à racines simples.

(3) Il existe un polynôme scindé à racines simples annulant u.

Démonstration

□

Ceci se traduit matriciellement par : A est diagonalisable si et seulement si elle admet un polynôme annulateur scindé à racines simples (si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples).

Bien sûr, cela dépend du corps dans lequel on travaille.

Ce théorème est très utile et puissant en pratique.

On se sert surtout de l'équivalence entre (1) et (3), le recours au polynôme minimal étant le plus souvent inutile.

Exercice (Commutant d'un endomorphisme diagonalisable)

Soit u un endomorphisme diagonalisable de E. Montrer que $v \in \mathcal{L}(E)$ commute avec u si et seulement si v stabilise tous les sous-espaces propres de u. 9

Exercice (Autant de valeurs propres que la dimension)

1 Soit u un endomorphisme de E admettant n valeurs propres distinctes (on rappelle que $n = \dim(E)$).

i Montrer que u est diagonalisable.

ii En déduire que le commutant de u est l'ensemble des polynômes en u. 10

2 En déduire que si A est triangulaire supérieure, et de coefficients diagonaux distincts deux à deux, alors A est diagonalisable.

Exercice (Diagonalisabilité de certaines matrices en dimension 2)

1 Vérifier que toute matrice réelle symétrique de taille 2 est diagonalisable.

2 Déterminer les matrices réelles antisymétriques de taille 2 diagonalisables. 11

3 Trouver un exemple de matrice complexe symétrique de taille 2 non diagonalisable.

Exemple (Suites récurrentes linéaires d'ordre deux)

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, et Ω l'ensemble des suites complexes u telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + \beta u_n$$

On a alors, en posant $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$$

et donc par une récurrence immédiate

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$$ ii

Or $\chi_A = X^2 - \alpha X - \beta$. On reconnaît le polynôme caractéristique de cette relation de récurrence linéaire d'ordre 2.

Ainsi, si χ_A a deux racines distinctes a et b, alors A est diagonalisable, semblable à $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, et on en déduit l'existence de scalaires λ et μ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$$u_n = \lambda\, a^n + \beta\, b^n$$

On ne sait pas encore résoudre (par cette méthode matricielle) le cas où χ_A admet une unique racine, nous y reviendrons.

Exercice (Matrice de rang 1 diagonalisable) 12

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{tr}(M) \neq 0$.

Exercice (Équivalence entre deux diagonalisabilités) 13

On introduit

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ & M & \mapsto & AM \end{array}$$

Montrer que A est diagonalisable si et seulement si l'endomorphisme φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'est.

Une des conséquences remarquables du théorème ci-dessus est la proposition suivante :

Proposition (Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit) 5.e

Si F (non réduit à 0_E) est stable par u, et si u est diagonalisable, alors l'endomorphisme de F induit par u est diagonalisable.

Démonstration

$\square$

On peut observer, plus finement, que le polynôme minimal d'un endomorphisme v induit par u divise le polynôme minimal de u.

Exercice (Sous-espaces stables par un endomorphisme diagonalisable) 14

On suppose u diagonalisable. Montrer que F (sous-espace vectoriel non trivial de E) est stable par u si et seulement si il admet une base de vecteurs propres.

Exercice (Codiagonalisation (facultatif, à la frange du programme)) 15

On suppose que u et v sont diagonalisables et commutent.

1 Montrer que u et v sont *codiagonalisables* c'est-à-dire qu'ils admettent une base commune de diagonalisation.

2 En déduire que uv et $u+v$ sont diagonalisables.

Exercice (Endomorphisme diagonalisable sur un espace de matrices (facultatif)) 16

On suppose A diagonalisable. Montrer que l'endomorphisme

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ & B & \mapsto & ABA \end{array}$$

de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable :

1 En utilisant l'exercice précédent.

2 En explicitant une base de diagonalisation.

6. Endomorphismes et matrices carrées trigonalisables

Ici encore, E est de dimension finie n.

Définition (Endomorphisme trigonalisable) 6.a

Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est dit *trigonalisable* s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure.
Une telle base est appelée *base de trigonalisation*.

Interprétation géométrique de la trigonalisabilité 6.1

u est trigonalisable si et seulement si il existe une suite emboîtée $(F_0, \dots, F_n)$ de sous-espaces vectoriels de E telle que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\dim(F_k) = k$ (une telle suite est appelée un *drapeau total*), constituée de sous-espaces stables par u.

Définition (Matrice carrée trigonalisable) 6.b

Une matrice carrée est dite *trigonalisable* si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Pour qu'une matrice carrée soit trigonalisable, il faut et il suffit que l'endomorphisme canoniquement associé le soit.

Évidemment, tout endomorphisme et toute matrice diagonalisable est trigonalisable.

Toute matrice triangulaire inférieure est trigonalisable.

Théorème (Caractérisation de trigonalisabilité) 6.a

Un endomorphisme (ou une matrice carrée) est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.

Démonstration

□

Si u est trigonalisable, et si (λ_1, r_1), ..., (λ_p, r_p) sont ses différentes valeurs propres données avec leur multiplicité (algébrique), alors son polynôme caractéristique est donné par

$$\chi_u = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{r_k},$$

et on a

$$\operatorname{tr}(u) = \sum_{k=1}^{p} r_k \lambda_k \quad \text{et} \quad \det(u) = \prod_{k=1}^{p} \lambda_k^{r_k}.$$

De même bien sûr pour une matrice carrée.

Corollaire (Trigonalisation des matrices complexes) 6.b

Toute matrice carrée complexe est trigonalisable.

Exercice (Matrice non trigonalisable) 17

Donner un exemple de matrice carrée réelle non trigonalisable.

Exemple (Suites récurrentes linéaires d'ordre deux, cas non diagonalisable) i

On reprend l'étude des suites récurrentes linéaires d'ordre 2. On suppose que χ_A n'a qu'une racine a. On peut écarter le cas sans intérêt où $a = 0$. On a donc $\chi_A = (X - a)^2$, donc A est semblable à une matrice B de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$. La formule du binôme de Newton donne immédiatement

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B^n = \begin{pmatrix} a^n & nba^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$$

et il existe donc des scalaires λ et μ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$$u_n = (\lambda + \mu n)a^n$$

La réduction des matrices de taille 2 nous a donc permis de reconstituer naturellement l'étude des suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

7. Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes

On suppose encore E de dimension finie n.

On suppose connues les notions d'endomorphisme nilpotent de l'espace vectoriel E et de matrice nilpotente, ainsi que celle d'indice de nilpotence.

On rappelle que le seul endomorphisme nilpotent et diagonalisable de E est l'endomorphisme nuL.

Proposition (Caractérisation de la nilpotence)

Un endomorphisme est nilpotent si et seulement s'il est trigonalisable avec pour seule valeur propre 0.

7.a

Démonstration

$\square$

Proposition (L'indice de nilpotence est majoré par la dimension de E)

On suppose u nilpotent, d'indice de nilpotence m, et E de dimension n. On a $m \leqslant n$.

7.b

Démonstration

$\square$

Proposition (Décomposition d'un endomorphisme admettant un polynôme annulateur scindé)

On suppose qu'il existe un polynôme scindé annulant u. On peut alors décomposer E en somme directe de sous-espaces stables par u sur chacun desquels u induit la somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent.

7.c

Démonstration

□

Traduction matricielle : si la matrice A admet un polynôme annulateur scindé (ce qui sera toujours le cas si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), alors elle est semblable à une matrice diagonale par blocs B, dont chaque bloc diagonal est une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux égaux.

$$B = \begin{pmatrix}
\lambda_1 & \cdots & & & & & & & & \\
& \ddots & \vdots & & & & & & & \\
& & \lambda_1 & & & & & & & \\
& & & \lambda_2 & \cdots & & & & & \\
& & & & \ddots & \vdots & & & & \\
& & & & & \lambda_2 & & & & \\
& & & & & & \ddots & & & \\
& & & & & & & \lambda_p & \cdots & \\
& & & & & & & & \ddots & \vdots \\
& & & & & & & & & \lambda_p
\end{pmatrix}$$

On peut d'ailleurs remarquer que B s'écrit alors comme somme d'une matrice diagonale D et d'une matrice triangulaire supérieure stricte N (nilpotente), et que D et N commutent. Cette commutation fait que l'on peut appliquer la formule du binôme de Newton pour calculer les puissances de B, et donc celles de A.

Il s'agit d'une trigonalisation affinée, qui figure au programme officiel, mais elle n'est à n'employer que si une trigonalisation sommaire ne fonctionne pas.

8. Feuille de TD 11 : Réduction des endomorphismes

8.1. Diagonalisabilité, diagonalisation pratique, éléments propres

Exercice 1 (Réduction de J) 0

Réduire la matrice J (carrée de taille n) dont tous les coefficients valent 1.

Exercice 2 (Diagonalisabilité d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$) 0

Soit $f\ : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P(1-X)$. f est-il diagonalisable ? Trouver une base de vecteurs propres.

Exercice 3 (Diagonalisabilité d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$) 0

L'application $u\ : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto X^n P(1/X) \in \mathbb{R}_n[X]$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 4 (Diagonalisabilité de la transposition) 0

L'application $f\ : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M + ({}^tM)$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 5 (Diagonalisabilité d'une matrice de taille 3) 0

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 6 (Une CNS de diagonalisabilité pour un certain endomorphisme) 0

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ (où $\dim(E) = n \in \mathbb{N}^*$) tel que p^2 soit un projecteur. Montrer que p est diagonalisable si et seulement si $p^3 = p$.

Exercice 7 (Étude de diagonalisabilité en fonction d'un paramètre) 0

Soit $a \in \mathbb{C}$ et soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles M est diagonalisable.

Exercice 8 (Diagonalisabilité d'une matrice de fractions) 0

La matrice (i/j) est-elle diagonalisable ?

Exercice 9 (Valeur propre double pour une combinaison linéaire) — 0

Soit $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Montrer l'existence de scalaires α, β, γ non tous nuls, tels que $\alpha A + \beta B + \gamma C$ admette une valeur propre double.

Exercice 10 (Diagonalisabilité d'une matrice diagonale par blocs) — 2

Montrer qu'une matrice diagonale par blocs si et seulement si chacun de ses blocs diagonaux est diagonalisable.

Exercice 11 (Diagonalisabilité des puissances d'une matrice inversible) — 2

Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si il existe $k \geqslant 2$ tel que M^k soit diagonalisable.
Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que tous ses éléments sont diagonalisables.
Soit G un groupe multiplicatif fini inclus dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que tous ses éléments sont diagonalisables.

Exercice 12 (Valeurs propres d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$) — 3

Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$, $f\ : u \mapsto \left(\frac{u_1+2u_2+\cdots+nu_n}{n^2}\right)$. Quelles sont les valeurs propres de f ?

8.2. Polynômes d'endomorphismes, de matrices carrées

Exercice 13 (Valuation du polynôme minimal) — 2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, P son polynôme minimal et p l'ordre de 0 dans P.
1 Si $p = 0$, que dire de u ?
2 Si $p = 1$, montrer : $E = \mathrm{Im}(u) \oplus \ker(u)$.
3 Dans le cas général, montrer : $E = \mathrm{Im}(u^p) \oplus \ker(u^p)$.

Exercice 14 (Matrice de polynôme minimal imposé) — 2

Existe-t-il $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de polynôme minimal $X^2 + X + 1$? dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

8.3. Polynôme caractéristique, trigonalisation, endomorphismes nilpotents

Exercice 15 (Caractérisation de la nilpotence par la trace des puissances) — 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall\, i \in [\![1, n]\!], \mathrm{tr}(A^i) = 0$. Montrer que A est nilpotente. Réciproque ?

Exercice 16 (Ajout à une matrice d'un nilpotent avec lequel elle commute) — 2

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, telles que $AB = BA$ et B nilpotente. Montrer que A est inversible si et seulement si $A + B$ l'est.

Exercice 17 (Polynômes caractéristiques de l'inverse et du carré) — 2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible et $B = A^{-1}$, $C = A^2$. Exprimer les polynômes caractéristiques de B et C en fonction de celui de A.

Exercice 18 (Vecteur propre pour un crochet de Lie) — 2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) de dimension n, $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ v - v \circ u = kv$, où $k \in \mathbb{K}^*$.

1 Montrer que v n'est pas inversible.

2 Montrer que pour tout p, $u \circ v^p - v^p \circ u = pkv^p$.

3 Montrer qu'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{rg}(v^q) = \mathrm{rg}(v^{q+1})$.

4 Montrer que v est nilpotent.

5 Retrouver ce résultat directement par l'absurde.

Exercice 19 (Égalité de polynômes caractéristiques) — 3

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $A^n = AB = 0_n$. Montrer que B et $A + B$ ont même polynôme caractéristique.

8.4. Applications concrètes de la réduction

Exercice 20 (Réduction d'un projecteur) — 0

Que dire d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A$ et $\mathrm{tr}(A) = 0$?

Exercice 21 (Trace d'une racine carrée de $-I_n$) — 0

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_n$. Que vaut $\mathrm{tr}(A)$?

Exercice 22 (Rang et polynôme annulateur) — 0

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0_n$. Montrer que A est de rang pair.

Exercice 23 (Polynôme minimal et trace nulle) 0

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ($n \geqslant 2$) telle que $A^n = I_n$, et telle que $(I, A, \ldots, A^{n-1})$ soit libre. Montrer que $\operatorname{tr}(A) = 0$.

Exercice 24 (Polynôme du polynôme) 2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable, $B = A^3 + A + I_n$. Montrer que A est un polynôme en B.

Exercice 25 (Égalité des cubes pour des endomorphismes diagonalisables) 2

Soit $u, v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ diagonalisables, tels que $u^3 = v^3$. montrer que $u = v$.

Exercice 26 (Déterminant et polynôme annulateur) 3

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I_n$. Montrer que $\det(A) > 0$.

8.5. Aspects théoriques

Exercice 27 (Matrices diagonalisables dont les exponentielles sont égales) 2

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisables. On suppose $e^A = e^B$. Montrer $A = B$.

Exercice 28 (Une équation d'inconnue matricielle) 2

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. À quelle condition l'équation $Y = AX - XB$ admet-elle une solution $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, pour tout $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 29 (Semi-simplicité et diagonalisabilité) 2

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace vectoriel de E stable par u admet un supplémentaire stable par u.

Exercice 30 (Commutant d'un endomorphisme diagonalisable) 2

(Mines MP 10) Donner la dimension du commutant d'un endomorphisme diagonalisable.

Exercice 31 (Une condition nécessaire et suffisante pour que les spectres soient disjoints) 2

1 Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que les spectres de A et de B sont disjoints si et seulement si $\chi_A(B)$ est inversible.
Soit A, B, P trois matrices carrées complexes avec $P \neq 0$ telles que $AP = PB$. Montrer que A et B ont une valeur propre commune.
2 Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence entre :

(1) $\forall\, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \exists! X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), AX - XB = C$.

(2) $\forall\, X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), AX = XB \Rightarrow X = 0$.

(3) $\chi_A(B)$ est inversible.

(4) A et B n'ont pas de valeur propre en commun.

Exercice 32 (Matrices de taille 2 commutant) 2

Soit $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, commutant. Montrer que l'une est polynôme de l'autre.

Exercice 33 (Réduction de Frobénius simultanée) 4

Soit $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A^2 = B^2 = I_2$, $AB + BA = 0$. Montrer l'existence de $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 34 (Non isomorphie entre groupes linéaires complexes) 4

Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$ distincts. Montrer que $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ne sont pas isomorphes.
Indication : on pourra étudier les sous-groupes d'involutions maximaux dans les groupes linéaires.

Exercice 35 (Appartenance à un groupe multiplicatif matriciel) 4

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A appartient à un groupe multiplicatif matriciel si et seulement si $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^2)$.

Exercice 36 (Matrices de taille 2 semblables à leur carré) 4

Déterminer les $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ telles que $A \sim A^2$.

9. Oraux

Exercice 37 (Déterminant strictement positif pour une matrice diagonalisable dans $\mathbb{C}$) 0

(TPE PSI 08) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I_n$. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$, et que $\det(A)$ est un réel strictement positif.

Exercice 38 (Équation polynomiale d'inconnue matricielle) 0

(CCP MP 13) Trouver les $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $M^3 - 2M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 39 (Équivalence de diagonalisabilité pour AB et BA dans le cas inversible) 0

(Mines-Ponts PSI 10) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
1 Montrer que AB et BA ont même spectre.
2 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que P annule AB si et seulement si P annule BA.
3 Montrer que AB est diagonalisable si et seulement si BA est diagonalisable.

Exercice 40 (Matrice inversible dont le carré est diagonalisable) 0

(Télécom Sud Paris) Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. On suppose M^2 diagonalisable. La matrice M est-elle diagonalisable ?

Exercice 41 (Représentation matricielle de $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $\chi_v = \mu_v = (X-1)^3$) 0

(Centrale PSI 10) Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\dim(\ker(u)) = 1$, $u^2 \neq 0$ et $u^3 = 0$.
1 Montrer $\ker(u) \subset \mathrm{Im}(u)$.
2 Montrer que $\dim(\ker u^2) = 2$.
3 Montrer qu'il existe une base dans laquelle u est représenté par $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
4 Soit $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de polynôme caractéristique $(X-1)^3$ et tel que $(v - \mathrm{Id})^2 \neq 0$. Montrer qu'il existe une base dans laquelle v est représenté par $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 42 (Étude de diagonalisabilité de $M \mapsto M + ({}^tM)$) 0

(Centrale PSI 10) Soit $f \ : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M + ({}^tM)$. Déterminer les valeurs propres de f. L'application est-elle diagonalisable ?

Exercice 43 (Éléments propres d'un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$) 0

(TPE 13) Montrer qu'en posant $f(P) = (X^3 + X)P' - (3X^2 - 1)P$, on définit un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$. En déterminer les éléments propres.

Exercice 44 (Liens entre A et $g_A : M \mapsto AM$ (ENS MP 10)) 0

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et g_A l'endomorphisme $M \mapsto AM$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
1 Calculer le rang de g_A en fonction de celui de A.
2 Montrer que g_A est diagonalisable si et seulement si A l'est.

Exercice 45 (Lien entre la diagonalisabilité de A et de A^d (ENS MP 10)) 0

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $d \in \mathbb{N}^*$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si A^d l'est.

Exercice 46 (Diagonalisabilité et matrices par blocs) 0

(CCP) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B = \left(\begin{array}{c|c} 0 & A \\ \hline I_n & 0 \end{array}\right)$. On suppose B diagonalisable. Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 47 (Quand un polynôme d'un projecteur est-il un projecteur ?) 0

(CCP MP 13) Soient E un espace vectoriel, p un projecteur de E et Q un polynôme. À quelle condition $Q(p)$ est-il un projecteur ?

Exercice 48 (Matrice diagonale à termes diagonaux distincts) 0

(CCP MP 13) Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont distincts. Montrer que $(I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1})$ est une base de l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(K)$.

Exercice 49 (Calcul de déterminant se ramenant à un calcul de polynôme caractéristique) 0

(TPE MP 13) Soient $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $m_{i,j} = a_j$ si $i \neq j$ et $m_{i,i} = 0$. Calculer : $P(X) = \det(M + XI_n)$.

Exercice 50 (Exemple de matrice non diagonalisable) 0

(Navale MP 13) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $(A - I_n)^2 \neq 0$, $A(A - I_n) \neq 0$ et $A(A - I_n)^2 = 0$.
1 Montrer que $\operatorname{Sp} A = \{0, 1\}$.
2 Montrer que A n'est pas diagonalisable.
3 Pour $n = 3$, donner un exemple de matrice vérifiant ces hypothèses.

Exercice 51 (Réduction d'une matrice par blocs) 0

(ENSAM MP 13) Donner les éléments propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et de $B = \begin{pmatrix} A & A & A \\ A & A & A \\ A & A & A \end{pmatrix}$.

Exercice 52 (Étude concrète de diagonalisabilité) 0

1 (CCP) Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/a & 1/a^2 \\ a & 1 & 1/a \\ a^2 & a & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer le rang de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

2 (CCP) Soient $n \geqslant 2$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad u(P) = P(-4)\,X + P(6).$$

i Déterminer l'image et le noyau de u.

ii Déterminer les valeurs propres de u. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

Exercice 53 (Condition suffisante pour que le déterminant soit strictement positif) 0

(ENSEA) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - A - I_n = 0$. Montrer que $\det A > 0$.

Exercice 54 (Caractérisation de la nilpotence par nullité de traces (X MP 10)) 1

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n.

1 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $\forall k \in [\![1, n]\!], \operatorname{tr}(u^k) = 0$. Montrer que u est nilpotent.

2 Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall k \in [\![1, n]\!], \operatorname{tr} v^k = n$. Montrer que $v - \operatorname{Id}_E$ est nilpotent.

Exercice 55 (CNS d'existence d'une valeur propre commune) 1

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A et B ont une valeur propre commune si et seulement s'il existe $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $AU = UB$.

Exercice 56 (Matrices stochastiques) 1

(ENSAM MP 13) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients positifs. On suppose que la somme des coefficients de chaque ligne de A vaut 1.

1 Montrer que le vecteur colonne dont tous les coefficients valent 1 est propre pour A.

2 Montrer que, si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de A, alors $|\lambda| \leqslant 1$.

3 On suppose que A est diagonalisable. Soient $p \in \mathbb{N}$ et X un vecteur colonne. On considère la suite $Y_p = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} A^k X$. Montrer que cette suite est convergente et donner sa limite, en commençant par le cas où X est un vecteur propre de A.

Exercice 57 (Matrices sans valeur propre commune) 1

(TPE MP 13) Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence des conditions suivantes :

(1) $\forall C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \exists X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), AX - XB = C$,

(2) $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\},\ AX \neq XB$,

(3) $\chi_B(A)$ est inversible,

(4) A et B n'ont pas de valeur propre commune.

Exercice 58 (Matrice stochastique) 1

$P = (p_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *stochastique* si ses coefficients sont positifs ou nuls, et si, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} p_{i,j} = 1$.
Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices stochastiques.

1 Montrer que les éléments de $\mathcal{S}$ ont une valeur propre commune.

2 $\mathcal{S}$ est-il stable par produit ?

3 Soit λ une valeur propre complexe de $P \in \mathcal{S}$. Montrer que $|\lambda| \leqslant 1$.

4 Montrer que si $\lambda \in \mathbb{U}$ est valeur propre de $P \in \mathcal{S}$, alors λ est une racine m-ième de l'unité avec $m \leqslant n$.

5 Montrer que si les coefficients diagonaux sont tous non nuls, alors la seule valeur propre de module 1 est 1.

6 Montrer que $\mathcal{S}$ est convexe compact.

Exercice 59 (Polynôme caractéristique d'un produit (Centrale MP 12)) 2

1 Soient $a_0, \ldots, a_n$ distincts dans $\mathbb{C}$, $L_0, \ldots, L_n$ les polynômes de Lagrange associés à $(a_0, \ldots, a_n)$. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, exprimer χ_A à l'aide de $(L_0, \ldots, L_n)$.

2 En déduire que $A \mapsto \chi_A$ est continue.

3 Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$. On suppose A inversible. Montrer que AB est semblable à BA. En déduire : $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

4 Si $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$, montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Exercice 60 (Matrice diagonalisable polynôme de l'un de ses polynômes) 2

(Mines-Ponts PSI 08) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable, $B = A^3 + A + I_n$. Montrer que A est un polynôme en B.

Exercice 61 (Diagonalisabilité de la transposée de la comatrice) 2

(CCP PSI 08) Comparer la diagonalisabilité d'une matrice carrée et celle de la transposée de sa comatrice.

Exercice 62 (Diagonalisabilité d'une matrice par blocs) 2

(Mines-Ponts PSI 10) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} A & 2A \\ 0 & 3A \end{pmatrix}$. À quelle condition B est-elle diagonalisable ?

Exercice 63 (Vecteurs propres communs à des endomorphismes commutant deux à deux) 2

(CCP MP 13) Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.
1 Soient u et v dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que u et v ont un vecteur propre commun.
2 Soient $u_1, \dots, u_p$ des endomorphismes de E qui commutent deux à deux. Montrer que les u_i ont un vecteur propre commun.

Exercice 64 ($\chi_{A^{-1}}$ en fonction de χ_A) 2

(CCP MP 13) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\chi_A(0) \neq 0$. Justifier que A est inversible. Exprimer $\chi_{A^{-1}}$ en fonction de χ_A.

Exercice 65 (CNS de diagonalisabilité d'une matrice diagonale par blocs) 2

(TPE MP 13) Soient $A_1, \dots, A_p$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et M une matrice diagonale par blocs avec pour blocs diagonaux : $A_1, \dots, A_p$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que M soit diagonalisable.

Exercice 66 (Étude de diagonalisabilité d'un opérateur sur les matrices) 3

(ENSAM PSI 08) Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de colonnes $C_1, \dots, C_n$, on note M' la matrice de colonnes $C'_1, \dots, C'_n$, où $C'_i = S - C_i$ avec $S = C_1 + \cdots + C_n$.
1 Exprimer $\det(M')$ en fonction de $\det(M)$.
2 L'application qui envoie M sur M' est-elle diagonalisable ?

Exercice 67 (Résolution de $A^2 = (\operatorname{tr} A)A + I_n$) 3

On veut déterminer les $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $(*)$: $\quad A^2 = (\operatorname{tr} A)A + I_n$.
1 Montrer que les matrices A vérifiant $(*)$ sont diagonalisables. Que dire de A si $\operatorname{tr}(A) = 0$?
2 Pour $n = 2$, montrer qu'il existe des solutions de trace non nulle. Discuter l'existence de solutions pour $n = 3$ ou $n \geqslant 4$.

Exercice 68 (Éléments propres d'un opérateur fonctionnel) 3

(Centrale PSI 10) Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $t \in]-1, 1[\setminus\{0\}$. Pour $f \in E$, on définit

$$u(f) \ : x \mapsto f(tx + (1-t)).$$

1 Montrer que u est un automorphisme de E.

2 Montrer que le spectre de u est inclus dans $]-1, 1]$. Si g est vecteur propre de u, montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $g^{(k)} = 0$. En déduire les éléments propres de u.

Exercice 69 (Étude de diagonalisabilité de AB connaissant explicitement BA) 3

(Mines MP 10) Soit $A \in \mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$ telles que $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice AB est-elle diagonalisable ?

Exercice 70 (Sous-espaces stables d'une matrice compagnon) 3

(ENSAM) Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ et A sa matrice dans la base canonique.

1 Montrer que la droite engendrée par un vecteur non nul u est stable par f si et seulement si u est un vecteur propre de f.

2 Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. Montrer que le plan d'équation $ax + by + cz = 0$ est stable par f si et seulement si le vecteur ${}^t(a, b, c)$ est vecteur propre pour ${}^tA$.

3 Montrer l'équivalence entre les trois assertions suivantes :

(1) f admet une unique droite stable.

(2) f admet un unique plan stable.

(3) Le polynôme caractéristique de f admet une seule valeur propre réelle, de multiplicité 1 ou 3, et l'espace propre correspondant est une droite.

4 Déterminer les sous-espaces stables par f quand $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ t & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 71 (Polynôme caractéristique d'une certaine matrice inversible) 3

Soit $A \in \mathrm{GL}_5(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{tr} A = 2$ et $A^3 + A^2 - 2A = 0$. Déterminer le polynôme caractéristique de A.

Exercice 72 (Diagonalisabilité d'un endomorphisme particulier) 3

(CCP MP 13) Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f^4 = f^2$ et $\{-1, 1\} \subset \operatorname{Sp} f$. Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 73 (Informations sur une matrice réelle dont on connaît un polynôme annulateur) 3

(ENSAM MP 13) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A - I_n = 0$.

1 La matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$? sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

2 Montrer que $\det A > 0$.

Exercice 74 (Condition suffisante de diagonalisabilité) 3

(CCP MP 13) Soient $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{C}^*)^2$ avec $\alpha \neq \beta$ et A, B, M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que : $M = \alpha A + \beta B$, $M^2 = \alpha^2 A + \beta^2 B$ et $M^3 = \alpha^3 A + \beta^3 B$.
Montrer que M est diagonalisable.

Exercice 75 (Réduction d'un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) 3

(CCP MP 13) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{tr} A \neq 0$. Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme $\Phi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto (\operatorname{tr} A)\, M - (\operatorname{tr} M)\, A$.

Exercice 76 (Encore une réduction d'un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) 3

(ENSAM MP 13) Soit $f : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto -A + \operatorname{tr}(A) I_n$. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer ses éléments propres.

Exercice 77 (Nature de $\sum \operatorname{tr}(A^n)$ pour une matrice particulière A) 3

(CCP MP 13) Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \operatorname{tr}(A^n)$.

1 Déterminer le polynôme caractéristique de A. Que peut-on dire des valeurs propres de A ?

2 Donner un équivalent de u_n. Nature de la série de terme général u_n ?

Exercice 78 (Détermination d'un polynôme caractéristique) 3

Soit $A \in \mathrm{GL}_6(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$ et $\operatorname{tr} A = 8$. Déterminer le polynôme caractéristique de A.

Exercice 79 (Condition suffisante pour que la trace soit paire) 3

(CCP MP 13) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^4 - 2A^3 + 2A^2 = 0$. Montrer que $\operatorname{tr}(A) \in 2\mathbb{N}$.

Exercice 80 (Rayon de convergence de $\sum \operatorname{tr}(A^n) z^n$) 3

(Télécom Sud Paris) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général $\operatorname{tr}(A^n) z^n$.

Exercice 81 (Valeurs propres en commun pour deux matrices (X MP 10)) — 4

Soit A, B et C dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose $CA = BC$ et que $\operatorname{rg} C = r$. Montrer que A et B ont au moins r valeurs propres (comptées avec multiplicité) en commun.

Exercice 82 (Lorsque $fg = gf$, équivalence de conditions sur images et noyaux) — 4

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, f et g dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1 $\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Ker}(g) = \{0\}$.

2 $\operatorname{Im}(f) + \operatorname{Im}(g) = E$.

3 Pour tout t dans $\mathbb{C}$ privé d'un ensemble fini, $f + tg \in \operatorname{GL}(E)$.

Exercice 83 (Éléments propres d'un opérateur sur les fonctions continues) — 4

(ENSAM MP 12) Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. Si $f \in E$, soit $\Phi(f) \ : x \in [0,1] \mapsto \int_0^1 \min\{x,t\}\, f(t) \mathrm{d}t$.

1 Vérifier que Φ est un endomorphisme E.

2 Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de Φ.

Exercice 84 (Surjectivité de l'exponentielle matricielle complexe) — 4

Soit $B \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que : $P(B) = A$ et $\exp(A) = B$.

Exercice 85 (Trajectoires planes de sous-groupes à un paramètre) — 4

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On dit que $A \in \mathcal{E}$ si pour tout vecteur colonne X, il existe un plan affine Π tel que, pour tout réel t, $\exp(tA)X \in \Pi$.

1 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer $\exp(tA)$. A-t-on $A \in \mathcal{E}$?

2 Montrer que si $\det(A) = 0$, alors $A \in \mathcal{E}$.

3 Caractériser, parmi les matrices inversibles et diagonalisables, celles qui appartiennent à $\mathcal{E}$.

4 Déterminer $\mathcal{E}$.

Exercice 86 (Cardinal d'unipotentes dans un anneau matriciel fini (ENS MP)) — 5

Soient p un nombre premier impair et $n \in \mathbb{N}^*$.

1 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que $\operatorname{tr}(A^p) \equiv (\operatorname{tr} A)^p \ [p]$.

2 Déterminer le cardinal de $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}),\ A^p = I_n\}$.

CHAPITRE XII

Le théorème de convergence dominée et les intégrales à paramètre

Sommaire

On suppose la notion de dérivée partielle connue.

On a vu au chapitre sur les suites et séries de fonctions que l'intégrale passait à la limite uniforme sur un segment.

Ce théorème s'appliquait sous des hypothèses très restrictives :

(1) La convergence devait être uniforme.
(2) La convergence avait lieu sur un segment.
(3) Les fonctions considérées étaient continues.

On aimerait

(1) Se passer d'une convergence uniforme et supposer seulement la convergence simple.
(2) Travailler sur tout type d'intervalle (non vide).
(3) Considérer une suite de fonctions intégrables[1].

On pourrait formuler l'espoir qu'une convergence simple suffise, mais il serait vite déçu, par exemple par une « bosse glissante » :

Illustration

Un des résultats les plus spectaculaires de cette année affirme qu'avec UNE hypothèse supplémentaire, dite *de domination*, pas forcément très naturelle, on peut se passer de la convergence uniforme, et l'appliquer à des

1. On pourrait même seulement demander l'existence des intégrales impropres, mais nous avons vu que la notion pertinente était celle d'intégrabilité, lors du chapitre sur les intégrales généralisées.

fonctions intégrables sur un intervalle quelconque. C'est aussi l'un des résultats les plus puissants de cette année, en un double sens : ce théorème aura de nombreux corollaires très utiles, mais il est aussi puissant au sens où il se contente de peu (dans ses hypothèses), et donne beaucoup (dans sa conclusion).

1. Les théorèmes de convergence dominée, et d'intégration terme à terme

1.1. Le théorème de convergence dominée

Théorème de convergence dominée

Soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{K}$. On suppose

(1) que (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f.

(2) que f est continue par morceaux

(3) *(Hypothèse de domination)* qu'il existe une fonction φ positive intégrable sur I vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f_n| \leqslant \varphi.$$

La fonction f est alors intégrable sur I, et :

$$\int_I f_n \longrightarrow \int_I f.$$

1.a

Démonstration

Hors programme (admise). □

Bien que ce résultat soit admis, on peut noter qu'il serait immédiat d'établir l'intégrabilité de f : l'essence du théorème est la légitimité de l'interversion entre la limite et l'intégrale :

$$\lim_{n\infty} \int_I f_n(t)\mathrm{d}t = \int_I \lim_{n\infty} f_n(t)\mathrm{d}t.$$

Hypothèse de continuité par morceaux

Dans l'énoncé, on suppose f continue par morceaux. Cependant, cette hypothèse est imposée par les limitations du programme.
Elle a été rajoutée parce que les seules intégrales auxquelles nous avons donné un sens sont celles de fonctions continues par morceaux. Dans un cadre dépassant le programme de MP, nous aurions pu nous passer de cette hypothèse de continuité par morceaux de f.

1.1

L'hypothèse de continuité par morceaux de f n'a pas l'importance de l'hypothèse de domination, qui est quant à elle cruciale :

Illustration

Exemple (Théorème de convergence dominée)

Supposons que (f_n) converge simplement vers f, que les fonctions f_n soient continues par morceaux, définies sur un segment $[a, b]$, ainsi que f. Supposons enfin qu'il existe un réel M tel que M majore chaque fonction $|f_n|$. On peut alors intervertir limite et intégrale.
Par exemple, les suites définies par

$$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^n \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad v_n = \int_0^1 \mathrm{sh}(t^n)\mathrm{d}t,$$

convergent vers 0. i
Ces exemples très simples illustrent déjà la puissance du théorème de convergence dominée (prouvez ces résultats avec des outils de MPSI si vous n'êtes pas convaincus).
D'ailleurs, cela s'applique au cas (déjà connu) où (f_n) est une suite de fonctions continues convergeant uniformément vers f sur $[a, b]$ (la suite $(\|f_n\|_\infty)$ est bornée car convergente).

Exercice (Théorème de convergence dominée)

Montrer que la suite de terme général

$$\int_0^\pi \frac{(\cos(t))^n}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t$$ 1

est bien définie, puis qu'elle converge (on donnera sa limite).

Théorème de convergence dominée et changement d'intervalle d'intégration

Dans l'énoncé du théorème de convergence dominée, toutes les fonctions sont intégrées sur le même intervalle I. Si l'intervalle d'intégration I_n dépend de n, il est toutefois envisageable d'appliquer le théorème de convergence dominée sur la réunion 1.2
I des I_n (ou un intervalle contenant cette réunion), quitte à étendre les fonctions intégrées à cet intervalle en leur donnant la valeur 0 sur $I \setminus I_n$ (tout en vérifiant la continuité par morceaux).

Exercice (Convergence dominée avec un intervalle d'intégration variable)

On rappelle qu'en posant $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin(u)^n \mathrm{d}u$ (ce sont les *intégrales de Wallis*, sans doute déjà vues en MPSI), on a $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

1 Montrer que

$$\lim_n \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-t^2} \mathrm{d}t$$

2 En déduire, grâce au résultat rappelé, que

$$\int_{\mathbb{R}_+} e^{-t^2} \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

2

Exercice (Convergence monotone)

On considère une suite (f_n) de fonctions positives et continues par morceaux sur I.

1 On suppose que la suite (f_n) est croissante, et qu'elle converge simplement vers une fonction φ, continue par morceaux et intégrable sur I.

Montrer qu'alors

$$\lim_{n \to \infty} \int_I f_n(t) \mathrm{d}t = \int_I \varphi(t) \mathrm{d}t$$

C'est le *théorème de convergence monotone pour les suites de fonctions*.

2 On suppose que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement, et que sa somme est continue par morceaux et intégrable sur I.

Montrer qu'alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n(t) \mathrm{d}t = \int_I \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) \right) \mathrm{d}t$$

C'est le *théorème de convergence monotone pour les séries de fonctions*.

3 Application (Mines 2004 MP1). Justifier l'existence de l'intégrale

$$I \stackrel{def}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{e^{\pi t} - 1} \mathrm{d}t$$

et vérifier que

$$I = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\pi\, k\, t} \arctan(t) \mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\pi\, k\, t}}{1 + t^2} \mathrm{d}t$$

3

Grâce à la caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction, on obtient une version à paramètre réel du théorème de convergence dominée :

Corollaire (théorème de convergence dominée, cas d'un paramètre réel)

Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère une famille $(f_\lambda)_{\lambda \in J}$ de fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{K}$. Soit a un point de J ou une extrémité (éventuellement infinie) de J. On suppose qu'il existe une fonction f, continue par morceaux, telle que

$$\forall x \in I, \quad \lim_{\lambda \to a} f_\lambda(x) = f(x),$$

et qu'il existe $\varphi : I \to \mathbb{K}$ positive et intégrable telle que

$$|f_\lambda| \leqslant \varphi$$

pour λ au voisinage (relatif à J) de a (*hypothèse de domination (locale en a)*).
La fonction f est alors intégrable sur I, et

$$\lim_{\lambda \to a} \int_I f_\lambda = \int_I f.$$

1.b

Démonstration

□

Cela ouvre notamment la porte à une justification de continuité d'une fonction définie par une intégrale, voir le théorème 2.a

Exercice (Convergence dominée, cas d'un paramètre réel (X MP 08))

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, et $b \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{a\}$. Montrer que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} = \lim_{b \to a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}.$$

En déduire $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2}$.

4

1.2. Le théorème d'intégration terme à terme

En cherchant à adapter le théorème de convergence dominée à une série de fonctions, on peut montrer [2] que si (u_n) est une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I telle que

(1) les séries $\sum u_n$ et $\sum |u_n|$ convergent simplement vers des fonctions S et T continues par morceaux sur I,

(2) la série $\sum \int_I |u_n(t)| \mathrm{d}t$ converge,

alors S est intégrable sur I et

$$\int_I S(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I u_n(t)\mathrm{d}t.$$

En fait, une analyse plus fine permet d'affaiblir les hypothèses :

2. Mais c'est déjà difficile.

Théorème d'intégration terme à terme

Si (u_n) est une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I, telle que

(1) la série $\sum u_n$ converge simplement vers une fonction S continue par morceaux sur I,

(2) la série $\sum \int_I |u_n(t)|\mathrm{d}t$ converge,

alors S est intégrable sur I et

$$\int_I S(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I u_n(t)\mathrm{d}t.$$

1.c

Démonstration

Hors programme (admise). □

Autrement dit, sous les hypothèses du théorème :

$$\int_I \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I u_n(t)\mathrm{d}t.$$

Comme précédemment, l'hypothèse de continuité par morceaux de la somme, imposée par les limitations du programme, n'a pas l'importance de l'hypothèse de convergence de $\sum \int_I |u_n|$ (qui est parfois appelée *hypothèse de sommation*).

Le fait que chaque u_n soit intégrable est contenu dans le fait que la série $\sum \int_I |u_n(t)|\mathrm{d}t$ converge.

Exercice (Un équivalent d'une suite d'intégrales)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $I_n = \int_0^1 \ln(1+t^n)\mathrm{d}t$.

1 Montrer que (I_n) tend vers 0.

2 En effectuant le changement de variable $u = t^n$, montrer que $I_n \sim \frac{C}{n}$, où

$$C = \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\mathrm{d}u$$

3 En observant que, pour tout $u \in]0,1[$

$$\frac{\ln(1+u)}{u} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n u^n}{n+1},$$

montrer que $C = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$.

4 En admettant que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, déterminer la valeur de C.

5

L'hypothèse demandée est assez forte : si elle n'est pas satisfaite, on pourra essayer d'appliquer le théorème de convergence dominée à la suite des sommes partielles. Ce sera souvent le cas lorsqu'on rencontrera une série de fonctions « alternée ». On pourra regarder l'exercice 29 de TD à titre d'illustration.

2. Intégrales à paramètre

2.1. Continuité d'une intégrale à paramètres

Comme nous l'avons pressenti, le théorème de convergence dominée permet de montrer la continuité d'applications définies par une intégrale, et plus précisément de la forme $x \mapsto \int_I f(x,t)\mathrm{d}t$:

Théorème (Continuité d'une intégrale à paramètre)

Soit A une partie d'un espace normé de dimension finie, I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur $A \times I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose

(1) que f est continue par rapport à la première variable.

(2) que f est continue par morceaux par rapport à la seconde variable.

(3) *(hypothèse de domination)* qu'il existe une fonction φ positive intégrable sur I telle que, pour tout x de A, $|f(x,.)| \leqslant \varphi$, *i.e.*

$$\forall (x,t) \in A \times I, \quad |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$$

Alors

$$g : x \mapsto \int_I f(x,t)\mathrm{d}t$$

est définie et continue sur A.

2.a

Démonstration

□

(1) La première hypothèse est naturelle : on veut montrer que g est continue par rapport à sa variable x, il n'est pas surprenant de demander que f le soit aussi. On peut remarquer qu'il n'y a pas *a priori* de « gain » en régularité en passant de f à g, ce qui se comprend bien si on constate que l'intégration se fait selon t et non selon x (on pourra songer au cas où $I = [0,1]$ et où f est constante à x fixé pour se convaincre).

(2) La deuxième hypothèse est imposée par les limitations du programme, et permet surtout de s'assurer de la bonne définition de g (associée à l'hypothèse de domination).

(3) La dernière hypothèse est naturelle si on a le théorème de convergence dominée (et son extension) en tête. Ne pas oublier que l'on veut une domination uniforme en le paramètre, c'est-à-dire x dans le cas présent.

Exemple (Continuité d'une intégrale à paramètres)

Si K est un compact, et si $f : K \times [a,b] \to \mathbb{K}$ est continue sur $K \times [a,b]$, alors $g : x \mapsto \int_{[a,b]} f(x,t)\mathrm{d}t$ est continue sur K.

i

La continuité étant une propriété locale, on peut remplacer l'hypothèse de domination par le fait que pour tout a dans A, il existe un voisinage relatif $\mathcal{V}_a$ de a dans A et une fonction φ_a positive et intégrale sur I telle que, pour tout x de $\mathcal{V}_a$, tout $t \in I$:

$$|f(x,t)| \leqslant \varphi_a(t)$$

Par exemple, dans le cas où A est un intervalle de $\mathbb{R}$, il suffit, pour conclure à la continuité de g, que l'hypothèse de domination soit satisfaite sur tout segment de A (puisque tout point de A admet un voisinage relatif de ce type dans A).

Vous avez utilisé ce genre d'intégrale à paramètre en SI : la transformée de Laplace.

Exercice (Continuité de la fonction Gamma d'Euler)

Montrer que la fonction $\Gamma\ : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ d'Euler est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

6

2.2. Dérivation d'une intégrale à paramètre

Voici sans doute les théorèmes les plus techniques de l'année :

Théorème (Dérivation d'une intégrale à paramètre)

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur $J \times I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose

(1) que f est continue par morceaux par rapport à la seconde variable.

(2) que, pour tout x de J, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I.

(3) que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est
- définie sur $J \times I$.
- continue par rapport à la première variable.
- continue par morceaux par rapport à la seconde variable.

(4) qu'il existe une fonction φ positive intégrable sur I telle que, pour tout x de J, $|\frac{\partial f}{\partial x}(x,.)| \leqslant \varphi$.

Alors

$$g : x \mapsto \int_I f(x,t)\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et vérifie :

$$\forall x \in J, \quad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\ \mathrm{d}t.$$

2.b

Démonstration

Observons déjà que g est bien définie grâce aux points (1) et (2).
De plus, la fonction $g_2 \ : x \in J \mapsto \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \ \mathrm{d}t$ est bien définie, et est continue sur J, d'après les points (3) et (4) et le théorème de continuité des intégrales à paramètres.
Il reste donc à établir que g est dérivable sur J, et que $g' = g2$.
Soit $x \in J$ et $\delta \in \mathbb{R}^*$ tel que $x + \delta \in J$. On a

$$\begin{aligned} \frac{g(x+\delta)-g(x)}{\delta} &= \frac{\int_I f(x+\delta,t)\mathrm{d}t - \int_I f(x,t)\mathrm{d}t}{\delta} \\ &= \int_I \frac{f(x+\delta,t)-f(x,t)}{\delta}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Or $\frac{f(x+\delta,t)-f(x,t)}{\delta}$ tend vers $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ lorsque δ tend vers 0. Nous allons appliquer le théorème de convergence dominée dans le cas d'un paramètre réel. On a bien continuité par morceaux de $t \mapsto \frac{f(x+\delta,t)-f(x,t)}{\delta}$ et $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ sur I.
De plus, puisque, à t fixé (dans I), $y \mapsto f(y,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J, de dérivée $y \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(y,t)$, on a

$$\begin{aligned} \left|\frac{f(x+\delta,t)-f(x,t)}{\delta}\right| &= \left|\int_x^{x+\delta} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(y,t)\mathrm{d}y}{\delta}\right| \\ &\leqslant \frac{1}{|\delta|}\left|\int_x^{x+\delta} \left|\frac{\partial f}{\partial x}(y,t)\right| \mathrm{d}y\right| \\ &\leqslant \frac{1}{|\delta|}\left|\int_x^{x+\delta} |\varphi(t)| \, \mathrm{d}y\right| \\ &= \varphi(t) \end{aligned}$$

Cette domination montre bien que $\lim_{\delta \to 0} \frac{g(x+\delta)-g(x)}{\delta} = g_2(x)$, d'où le résultat souhaité.

□

Ce théorème s'appelle aussi théorème de Leibniz, théorème de dérivation sous le signe somme, ou théorème de dérivation sous l'intégrale.

Dérivation d'une intégrale à paramètre 2.1

- Les points (1) et (2) permettent de définir la fonction g.
- Les points (3) et (4) permettent d'appliquer à $\frac{\partial f}{\partial x}$ le théorème de continuité.
- La démonstration permet en outre de faire le lien entre g et la fonction continue $x \mapsto \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \ \mathrm{d}t$.

Affaiblissement des hypothèses pour le théorème de Leibniz 2.2

Si on analyse la preuve, le résultat demeure si on remplace l'intégrabilité de $t \mapsto f(x,t)$ pour tout $x \in J$ par la convergence de l'intégrale $\int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ pour tout $x \in J$.

Comme pour le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre, en vertu du caractère local de la dérivabilité, on peut étendre le théorème 2.b au cas où l'hypothèse de domination est satisfaite sur tout segment de J.

Le théorème 2.b admet une extension dans une autre direction, pour montrer qu'une intégrale à paramètre est de classe $\mathcal{C}^k$.

Théorème de dérivations successives à paramètres 2.c

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose

(1) que $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$ est définie sur $J \times I$

(2) l'intégrabilité de $\frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, .)$ pour tout x de J et tout $j \in [\![0, k-1]\!]$.

(3) la continuité, pour tout $t \in I$, de $x \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$.

(4) la continuité par morceaux, pour tout $x \in J$, de $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$.

(5) la domination sur tout segment de $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, .)$.

g est alors de classe $\mathcal{C}^k$ sur J, et pour tout $j \in [\![1, k]\!]$:

$$\forall x \in J, \quad g^{(j)}(x) = \int_I \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t)\, \mathrm{d}t.$$

Démonstration

On procède bien sûr par récurrence sur k, le cas où $k = 1$ étant une conséquence du théorème de Leibniz.
Dans l'hérédité, le passage délicat consiste à justifier que si on a une domination pour tout segment de $\frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}}(x, .)$, alors on en a également une pour $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, .)$. C'est ce passage qu'on détaille : soit donc $[a, b]$ un segment inclus dans J, et soit φ une fonction intégrable sur I telle que, pour tout $x \in [a, b]$, tout $t \in I$:

$$\left| \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}}(x, t) \right| \leqslant \varphi(t)$$

Soit $x \in [a, b]$. On a, pour tout $t \in I$ fixé :

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) = \int_a^x \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}}(y, t)\mathrm{d}y + \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(a, t)$$

(d'après le théorème fondamental de l'analyse). On a donc

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| &\leqslant \left| \int_a^x \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}}(y, t)\mathrm{d}y \right| + \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(a, t) \right| \\
&\leqslant \int_a^x \left| \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}}(y, t) \right| \mathrm{d}y + \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(a, t) \right| \\
&\leqslant \int_a^x \varphi(t)\mathrm{d}y + \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(a, t) \right| \\
&= (x-a)\varphi(t) + \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(a, t) \right| \\
&\leqslant (b-a)\varphi(t) + \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(a, t) \right|
\end{aligned}$$

Les hypothèses asurrent de l'intégrabilité de $t \mapsto (b-a)\varphi(t) + \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(a, t) \right|$, d'où l'hérédité, puis le résultat.

□

Exercice (Dérivées de la fonction Gamma d'Euler)

Montrer que la fonction Γ d'Euler est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln(t))^k t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t$$

On notera en particulier que Γ est convexe.

7

Exercice (Un calcul de l'intégrale de Gauss)

1 Exprimer l'application

$$G \ : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} \mathrm{d}t$$

en fonction de $F \ : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} \mathrm{d}t$.

2 En déduire $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t$.

8

Exercice (Équivalent d'une intégrale à paramètre)

1 Montrer :

$$\forall\, a \in \mathbb{R}_+^*, \quad \int_0^1 \frac{x^{a-1} \ln(x)}{1-x^2} \mathrm{d}x = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+a)^2}.$$

2 En déduire : $\int_0^1 \frac{x^{a-1}\ln(x)}{1-x^2} \mathrm{d}x \sim_{a\to+\infty} -\frac{1}{2a}$.

9

PC : transformée de Fourier.
SI : théorème de la valeur initiale, théorème de la valeur finale.

3. Feuille de TD 12 : Le théorème de convergence dominée et les intégrales à paramètre

3.1. Le théorème de convergence dominée

Exercice 1 (Limite d'intégrales) 0

$\lim_{x \to 0} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t^2+1}-1}{(t^2+1)\sqrt{t^2+x}} \mathrm{d}t$.

Exercice 2 (Limite d'intégrales, encore) 0

Déterminer $\lim_{n\infty} \int_0^{+\infty} \frac{n!}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)} \mathrm{d}x$.

Exercice 3 (Toujours une limite d'intégrales) 0

Soit $f \; : [0,1] \to \mathbb{R}_+^*$ continue. Montrer : $\left(\int_0^1 ((f(x))^{1/n} \mathrm{d}x\right)^n \to \exp(\int_0^1 \ln(f(x)))$.

Exercice 4 (Existence et calcul d'une intégrale) 0

Soit φ 1-périodique sur $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = (t - \frac{1}{2})^2$ sur $[0,1]$.
Existence et calcul de $\int_{t=1}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} \mathrm{d}t$.

Exercice 5 (Développement asymptotique d'une suite d'intégrales) 1

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, $I_n = \int_0^1 f(t) \ln(1 + t^n) \mathrm{d}t$.
1 Montrer que (I_n) converge et déterminer sa limite l.
2 On suppose $f(1) \neq 0$. Montrer l'existence de $C \neq 0$ tel que $I_n - l \sim \frac{C}{n}$.
Indication : effectuer le changement de variable $u = t^n$.
3 Sachant $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, trouver C.

Exercice 6 (Étude d'une suite d'intégrales) 1

Soit $u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t+\dots+t^n}}$.
1 Montrer que (u_n) est bien définie, calculer u_1.
2 Montrer que (u_n) converge vers $2/3$.
3 Montrer que $u_n - \frac{2}{3} \sim \frac{I}{n^{3/2}}$, où I est un réel strictement positif que l'on ne cherchera pas à calculer.
Indication : effectuer le changement de variable $u = t^{n+1}$.

Exercice 7 (Équivalent d'une suite d'intégrales) 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n \overset{def}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{1+n^4x^3}\mathrm{d}x$.
1 Vérifier que (I_n) converge vers 0.
2 Donner un équivalent simple de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{1+n^4x^3}\mathrm{d}x$.
Indication : effectuer le changement de variable $u = n^4x^3$.

Exercice 8 (Une application du théorème d'intégration terme à terme) 0

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$I_k \overset{def}{=} \int_0^{+\infty} \frac{t^k}{e^t - 1}\mathrm{d}t$$

Vérifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$I_k = k!\,\zeta(k+1)$$

Indication : On pourra partir du fait que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{1}{e^t - 1} = \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nt}$$

et faire intervenir la fonction Γ d'Euler.

Exercice 9 (Équivalent d'une suite d'intégrales faisant intervenir Γ) 3

On note, pour $(a, b) \in]-1, +\infty[\times]0, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^a e^{-nt}}{\sqrt{1+t^b}}\mathrm{d}t.$$

1 Étudier l'existence de I_n.
2 Déterminer la limite de (I_n).
3 Déterminer un équivalent simple de I_n (la réponse fera intervenir la fonction Γ d'Euler).

Exercice 10 (Calcul d'une limite d'intégrales) 3

Soit $f\ : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une application continue. Déterminer :

$$\lim_n n \int_0^1 f(x) \ln(1 + x^n)\mathrm{d}x.$$

On admet : $\int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y}\mathrm{d}y = \frac{\pi^2}{12}$.

3.2. Intégrales à paramètres

Exercice 11 (Fonction définie par une intégrale) 1

On pose, pour tout réel x pour lequel cela a un sens :

$$F(x) \overset{def}{=} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t$$

1 Montrer que le domaine de définition de F est $\mathbb{R}_+^*$.
2 Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3 Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
4 Montrer :

$$F(x) \sim_{0^+} -\ln(x).$$

Indication : effectuer le changement de variable $u = xt$, et regarder les forces en présence.

Exercice 12 (Existence et calcul d'une intégrale à paramètre) 0

Existence et calcul, pour $x \in \mathbb{R}$, de :

$$I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{ixt}-1}{t}e^{-t}\mathrm{d}t.$$

Exercice 13 (Égalité entre deux fonctions) 0

On pose, pour tout réel positif ou nul x :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad g(x) = \lim_{n\infty} \int_{t=0}^{n} \frac{\sin(t)}{x+t}\mathrm{d}t.$$

1 *(Étude de f)*
i Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}_+$, et qu'elle y est continue.
ii Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et qu'elle est solution sur ce domaine de

$$(\mathcal{E}) \quad y'' + y = \frac{1}{x}$$

iii Montrer que f tend vers 0 en $+\infty$.
2 *(Étude de g)* Vérifier que g est aussi définie et continue sur $\mathbb{R}_+$, solution de $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et de limite nulle en $+\infty$.
3 En déduire que $f = g$, puis la valeur de l'*intégrale de Dirichlet* $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$.

Exercice 14 (Étude fonctionnelle d'une intégrale à paramètre) 2

Soit $f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^x}\mathrm{d}t$. Déterminer le domaine de définition de f, puis analyser sa continuité, sa dérivabilité et sa limite quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 15 (Simplification d'expressions intégrales à paramètres) 2

Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer sans symbole d'intégration

$$u(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\cos(xt)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad v(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\sin(xt)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t.$$

Exercice 16 (Un calcul d'intégrale via une intégrale à paramètre) 0

Calculer $\int_0^{\pi} \ln\left(\frac{b-\cos(x)}{a-\cos(x)}\right)\mathrm{d}x$.

Exercice 17 (Égalité entre deux intégrales) 2

Montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\arctan\left(\frac{x}{t}\right)}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\ln(t)}{t^2-1}\mathrm{d}t.$$

Exercice 18 (Études d'intégrales à paramètre) 2

1 Donner le domaine de définition de $S\ : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{e^{xt}-1}\mathrm{d}t$.

2 Soit $f\ : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t+x}\mathrm{d}t$. Donner le domaine de définition de f, et étudier son comportement en 0.

3 On pose $f(x) = \int_1^x \frac{e^{-t^2x^2}}{t}\mathrm{d}t$. Donner le domaine de définition, tracer le graphe, effectuer l'étude en 0, en $+\infty$.

4 On pose $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t^3}}\mathrm{d}t$. Limite ?

5 Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$, $\alpha < \beta$. Déterminer

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon\alpha}^{\varepsilon\beta} \frac{\cos(t)}{t}\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \lim_{M \to +\infty} \int_{M\alpha}^{M\beta} \frac{\cos(t)}{t}\mathrm{d}t$$

Exercice 19 (Calcul d'une intégrale via une intégrale à paramètre) 2

On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

1 Existence et continuité de f sur $\mathbb{R}$.

2 Montrer que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^*)$, calculer $f'(x)$ sur ce domaine.

3 En déduire $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t^2}\mathrm{d}t$.

Exercice 20 (Existence et calcul d'une intégrale à paramètre, encore) 2

Existence et calcul, pour $x \in]-1, 1[$ de :

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1 + x\cos(t))}{\cos(t)}\mathrm{d}t.$$

Exercice 21 (Existence et calcul d'une intégrale à paramètre, toujours) 2

1 Déterminer l'ensemble de définition de la fonction d'une variable réelle par

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+xt^2)}{t(1+t^2)}\mathrm{d}t.$$

2 Montrer : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = -\frac{1}{2}\int_0^x \frac{\ln(t)}{1-t}\mathrm{d}t$.

3 Existence et calcul de : $\int_0^{+\infty} \frac{\ln^2(1+t^2)}{t^3}\mathrm{d}t$.

(On utilisera $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t}\mathrm{d}t = -\frac{\pi^2}{6}$.)

Exercice 22 (Représentation graphique d'une fonction définie par une intégrale) 2

Étude et représentation graphique de la fonction f d'une variable réelle donnée par :

$$f(x) = \int_0^1 t^x\sqrt{1+t}\mathrm{d}t.$$

Exercice 23 (Développement asymptotique d'une fonction intégrale) 3

Former un développement asymptotique à trois termes en 0^+ de :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{x+t}\mathrm{d}t.$$

On admettra $\int_0^{+\infty} e^{-u}\ln(u)\mathrm{d}u = -\gamma$ et $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Exercice 24 (Subdivision d'une intégrale) 4

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}_+^*)$.

1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe une unique subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ de $[0,1]$ telle que

$$\forall\, k \in [\![1,n]\!], \quad \int_{x_{k-1}}^{x^k} = \frac{1}{n}\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$$

2 Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^n f(x_k)$ tende vers $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$. Le pas de la subdivision tend-il vers 0 ?

Exercice 25 (Équivalent en $+\infty$ d'une intégrale à paramètre) 4

Équivalent en $+\infty$ de $\phi(t) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x+x^2)^t}$.

4. Oraux

Exercice 26 (Nature d'une série alternée d'intégrales (CCP MP 13)) 0

1 Pour n dans $\mathbb{N}^*$, justifier l'existence de

$$u_n = (-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}.$$

2 Montrer que (u_n) tend vers 0.
3 Nature de la série de terme général u_n.

Exercice 27 (Étude d'une intégrale à paramètre (ENSEA 13)) 0

Domaine de définition et calcul de $f \ : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} \ \frac{\sin(xt)}{t} \mathrm{d}t$.

Exercice 28 (Nature d'une série dont le terme général est une intégrale) 3

(Centrale MP 10) Pour $n \in \mathbb{N}$, soit : $u_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n \sin(nt) \mathrm{d}t$.
1 Convergence et limite de (u_n).
2 Nature de la série de terme général u_n.

Exercice 29 (Une interversion somme-intégrale (Centrale PSI 10)) 0

Soit (u_n) une suite croissante d'éléments de $\mathbb{R}_+^*$, tendant vers l'infini. Montrer l'existence des deux quantités écrites et l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-u_n x} \right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{u_n}.$$

Exercice 30 (Limite et équivalent d'une suite d'intégrales) 0

(TPE) Limite et équivalent de $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1+x} \mathrm{d}x$.

Exercice 31 (Existence et limite d'une suite d'intégrales) 0

(CCP) Existence et limite de $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1+t^n}{\sqrt{t}+t^{2n}} \mathrm{d}t$.

Exercice 32 (Limite d'une suite d'intégrales dépendant d'une fonction) 0

(CCP)
1
i Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n = \int_0^1 \frac{x^2}{x+1/n} \mathrm{d}x$. Calculer I_n puis $\lim_{n \to +\infty} I_n$.
Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. On suppose $x \mapsto f(x)/x^2$ intégrable sur $]0,1]$.
ii Montrer que $x \mapsto f(x)/x$ est intégrable sur $]0,1]$.
iii Déterminer la limite de la suite de terme général $J_n = \int_0^1 \frac{f(x)}{x+1/n} \mathrm{d}x$.
2
i (TPE) Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$. Déterminer la limite de la suite de terme général $I_n = n \int_0^1 t^n f(t) \mathrm{d}t$.
ii Montrer que le résultat obtenu la question précédente est encore vrai pour f seulement continue.

Exercice 33 (Équivalent d'une suite d'intégrales (Télécom Sud Paris)) 0

1 Pour $(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, calculer $J_{n,k} = \int_0^{+\infty} t^k e^{-nt} \mathrm{d}t$.
2 Donner un équivalent de $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^3 e^{-nt}}{\sqrt{1+t^4}} \mathrm{d}t$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 34 (Expression sous forme intégrale d'une solution d'une équation différentielle) 0

(CCP) Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ bornée.
1 Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto e^{-|t|} f(x-t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
2 Montrer que $g : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} f(x-t) \mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifie $g'' = g - 2f$.

Exercice 35 (Information sur $\zeta(3/2)$) 0

(CCP) On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^{+\infty} \sqrt{t}\, e^{-nt} \mathrm{d}t$. Calculer I_n et en déduire : $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1} \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$.
Remarque : On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 36 (Intégrale sur $\mathbb{R}_+$ d'une série de fonctions) 0

(CCP) Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} e^{-\sqrt{n}x}$. Montrer que f est définie et intégrable sur $]0, +\infty[$. Calculer $\int_0^{+\infty} f$.

Exercice 37 (Interversion série-intégrale) 0

1 (ENSAM) Soit $(a_n)_{n \geqslant 0}$ une suite strictement positive, strictement croissante, de limite infinie. Montrer : $\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-a_n t} \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a_n}$.
2 (TPE) Justifier la convergence et montrer : $\int_0^{+\infty} e^{-x} \cos \sqrt{x} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n!}{(2n)!}$.
3 (CCP) Soient $r > 0$ et $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z| < r$. Montrer que $\int_0^{2\pi} \frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\theta} - z|^2} \mathrm{d}\theta = 2\pi$.
4 (TPE) Montrer : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x - 1} \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

Exercice 38 (Intégration d'une série entière pour déterminer la somme d'une série) 2

(CCP)
1 Étudier la convergence de la série de terme général $(-1)^n/(3n+1)$.
2 Développer en série entière $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^3}$ au voisinage de 0.
3 Calculer de deux façons $\int_0^1 f$ et en déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Exercice 39 (Résolution d'une équation différentielle via une intégrale à paramètre) 2

(ENSAM) Soit $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \mathrm{d}t$.
1 Déterminer l'ensemble de définition de F. Montrer que F est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$.
2 Vérifier que F est solution sur $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle $y''+y=1/x$. En déduire : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t} \mathrm{d}t$.
3 Qu'obtient-on en faisant tendre x vers 0 ?

Exercice 40 (Le théorème fondamental de l'algèbre par les intégrales) 2

(TPE) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. On suppose par l'absurde que P ne possède pas de racine complexe. Soit $I : r \in \mathbb{R}^+ \mapsto \int_0^{2\pi} \frac{1}{P(re^{i\theta})} \mathrm{d}\theta$.
1 Montrer que I est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et que I est constante.
2 Déterminer la limite de $I(r)$ quand $r \to +\infty$. Conclure.

Exercice 41 (Équivalents de suites d'intégrales) 3

1 (Centrale PSI 10) Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-nt}}{\sqrt{1+t^2}} \mathrm{d}t$. Déterminer la limite de (I_n). Donner un équivalent de I_n.
2 (Mines MP 10) Donner un équivalent simple de $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-x^n} \mathrm{d}x$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 42 (Simplification de fonctions définies par des intégrales à paramètres) 3

(Centrale MP 10) On pose $u(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(xt)\mathrm{d}t$ et $v(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\sin(xt)\mathrm{d}t$.
1 Déterminer le domaine de définition D de u et v. Montrer que u et v sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur D.
2 Exprimer u et v au moyen des fonctions usuelles.

Exercice 43 (Intégrale à paramètre et équation différentielle) 3

(CCP MP 13) Soit $f : x \mapsto \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos(xy)}{\sqrt{1-y^2}} \mathrm{d}y$.
1 Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$; calculer $f(0)$.
2 Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin t) \mathrm{d}t$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
3 Montrer que f est solution de $x\,y'' + y' + x\,y = 0$.

Exercice 44 (Étude d'une intégrale à paramètre) 3

Soit $f : x \mapsto \int_0^{\pi/2} (\sin t)^x \mathrm{d}t$.

1 Montrer que f est définie et continue sur $]-1, +\infty[$.

2 Calculer $f(1)$. Montrer : $\forall x > -1$, $(x+2)\, f(x+2) = (x+1) f(x)$. En déduire un équivalent de $f(x)$ quand $x \to -1^+$.

3 Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1, +\infty[$.

4 Justifier : $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\, \mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin(2t)}{2}\right) \mathrm{d}t$. En déduire $f'(0)$.

Exercice 45 (Uniforme continuité d'une intégrale à paramètre) 3

(CCP MP 13) Pour x dans $\mathbb{R}$, soit $F(x) = \int_0^{\pi} \frac{\sin t \mathrm{d}t}{1+(\cos(xt))^2}$.

1 Calculer $F(1/2)$. Indiquer une méthode permettant de calculer $F(n)$ si $n \in \mathbb{N}$.

2 La fonction F est-elle continue sur $\mathbb{R}$? uniformément continue ?

Exercice 46 (Limite de séries de Riemann) 3

(Navale 13) Déterminer la limite de $a \mapsto a \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{a+1}}$ quand $a \to 0^+$ et la limite de $a \mapsto a \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{a+1}}$ quand $a \to +\infty$.

Exercice 47 (Limite d'une suite d'intégrales) 3

1 (TPE) Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{e^t + t^n}$. Déterminer la limite de (I_n).

2 Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : t \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \frac{n}{\sqrt{t}} \ln\left(1 + \frac{1}{nt}\right)$.

i Montrer que f_n est intégrable sur $]0, +\infty[$.

ii Calculer $\lim_{n \to +\infty} \int_1^{+\infty} f_n(t) \mathrm{d}t$.

3 (CCP) Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \frac{\ln(1+x/n)}{x(1+x^2)}$.

i La fonction f_n est-elle prolongeable par continuité en 0 ? Montrer qu'elle est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

ii Déterminer la limite de la suite de terme général $I_n = n \int_0^{+\infty} f_n$.

Exercice 48 (Développement asymptotique d'une suite d'intégrales) 3

(CCP MP 13) Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n}$.

1 Montrer que (a_n) converge et déterminer sa limite.

2 Donner un développement asymptotique à trois termes de a_n.

CHAPITRE XIII

Ensembles finis, ensembles dénombrables. Familles sommables

Sommaire

La notion de famille sommable est introduite en vue de l'étude des probabilités.

Nous avons déjà donné un sens à une somme d'une infinité de nombres réels, et même d'une infinité de vecteurs (séries à valeurs dans un evn de dimension finie) ou de fonctions (séries de fonctions). Cependant, cette somme infinie était assujettie à un ordre imposé des termes dans la sommation : ces sommes étaient indexées par $\mathbb{N}$ (ou $\mathbb{N}^*$). Nous avons considéré des sommes partielles, et étudié leur éventuelle limite.

Cela peut sembler surprenant, mais cet ordre imposé pour les termes à sommer n'est pas anodin : si on considère une série semi-convergente de nombres réels, *i.e.* une série convergente mais non absolument convergente, comme $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ (de somme $\ln(2)$), un réordonnancement des termes à sommer peut changer la somme, et même la nature de la série.

Si on reprend l'exemple de la série harmonique alternée, pour tout $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$, il existe une permutation σ de $\mathbb{N}^*$ telle que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\sigma(n)-1}}{\sigma(n)} = \lambda$$

Illustration

Dans certains cadres, nous souhaiterions que la valeur d'une somme infinie ne dépende pas de la façon dont nous avons numéroté ses termes : en probabilités, l'espérance d'une certaine variable aléatoire ne doit pas dépendre de la numérotation[1] des valeurs qu'elle prend.

1. Nous travaillerons toujours dans un cadre au plus dénombrable, c'est-à-dire intuitivement où nous pourrons numéroter les termes.

Cela nous conduit à la notion centrale de ce chapitre, à savoir celle de famille sommable. Avant cela, nous réviserons la combinatoire (dénombrement, ensembles finis), et nous étudierons la notion de dénombrabilité.

Sauf mention contraire, I désigne un ensemble dénombrable (*i.e.* en bijection avec $\mathbb{N}$).

1. Équipotence d'ensembles, ensembles finis, dénombrabilité

Dans cette section A et B désignent deux ensembles.

Définition (Équipotence) 1.a

On dit que A est *équipotent à* B, ou que A est *en bijection* avec B, s'il existe une bijection de A sur B.

L'équipotence définit une relation d'équivalence (sur un ensemble dont les éléments sont eux-mêmes des ensembles).

On rappelle qu'un ensemble A est dit *fini* s'il est équipotent à $[\![1, n]\!]$ pour un certain entier naturel n. Dans un tel cas, cet entier n est unique et appelé *cardinal* de A. On le note $\mathrm{Card}(A)$ ou $\#A$, et même parfois $|A|$. Une partie non finie est dite *infinie*.

Si A et B sont finis, de cardinaux respectifs p et q, alors

(1) Toute partie C de A est finie, de cardinal compris entre 0 et p, ce cardinal valant p si et seulement si $C = A$.

(2) $A \cup B$ et $A \cap B$ sont finis, et
$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B).$$
En particulier, si A et B sont disjoints, alors $\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B)$.

(3) $A \times B$ est fini, de cardinal pq.

(4) B^A est fini, de cardinal q^p.

(5) L'ensemble (noté $\mathcal{P}(A)$) des parties de A est fini, de cardinal 2^p.

(6) Pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, l'ensemble des parties de A de cardinal k dans A est fini, de cardinal $\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!}$.

Lorsque $k \notin [\![0, p]\!]$, on peut convenir que $\binom{p}{k} = 0$.

On a, pour tout $p \in \mathbb{N}$, tout $k \in [\![0, p]\!]$
$$2^p = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i}, \quad \binom{p}{k} = \binom{p}{p-k} \quad \text{et} \quad \binom{p}{k} + \binom{p}{k+1} = \binom{p+1}{k+1}$$

On rappelle aussi la *formule du pion* (ce n'est pas une dénomination standard) : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tout $p \in [\![1, n]\!]$
$$p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$$

On rappelle enfin que pour une application f entre deux ensembles de même cardinal fini, les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) f est injective.

(2) f est surjective.

(3) f est bijective.

Exercice (Théorème de Cantor) 1

Montrer que pour tout ensemble X, X et $\mathcal{P}(X)$ ne sont pas équipotents.

Indication : étant donné $\varphi : X \to \mathcal{P}(X)$, on pourra montrer que φ n'est pas surjective en considérant
$$F \overset{def}{=} \{x \in X, x \notin \varphi(x)\}$$

Voici un théorème hors programme, sous forme d'exercice facultatif, qui permet de comprendre que la comparaison des cardinaux entre ensembles correspond à la vision de l'un comme sous-ensemble de l'autre à réécriture près.

Exercice (Théorème de Cantor-Bernstein)

Soit X et Y deux ensembles non vides. On suppose qu'il existe une injection f de X vers Y, et une injection g de Y vers X. Il s'agit de montrer que X et Y sont équipotents (c'est le *théorème de Cantor-Bernstein*).

1 Traiter le cas où $f(X) = Y$.

On suppose dans la suite que $f(X) \neq Y$, et on note $\varphi = f \circ g$. On définit par récurrence les ensembles $A_0 = Y \setminus f(X)$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} = \varphi(A_n)$. On pose $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

2 Montrer que A est stable par φ.

3 Montrer que les termes de (A_n) sont deux à deux disjoints.

4 Soit $y \notin A$. Montrer qu'il existe un unique $x \in X$ tel que $f(x) = y$.

5 Soit $x \in X$. Montrer que si $f(x) \in A$, alors $x \in g(A)$.

6 On définit la fonction $h \ : Y \to X$ par $h(y) = g(y)$ si $y \in A$ et $h(y)$ est l'unique antécédent de y par f si $y \notin A$.

i Montrer que h est bien définie.

ii Montrer que h est injective.

iii Montrer que h est surjective.

7 Conclure.

2

Les cardinaux comme classes d'équivalence

La notion de cardinal (éventuellement infini) revient à celle de classe d'équivalence pour la relation d'équipotence, dans un ensemble Ω fixé d'ensembles. Étant donné deux éléments A et B de Ω, on note $\mathrm{Card}(A) \leqslant \mathrm{Card}(B)$ s'il existe une injection de A dans B. On définit ainsi une relation d'ordre sur l'ensemble des classes d'équivalence [a] de Ω pour l'équipotence.

Même si nous sommes tentés d'écrire $\mathrm{Card}(A) = \infty$ si A est infini, nous allons voir que les ensembles infinis n'appartiennent pas tous à la même classe d'équivalence (*i.e.* ne sont pas nécessairement équipotents), et donc qu'il y a plusieurs cardinaux infinis. D'ailleurs, l'exercice de cours 1 permet de montrer que si A est un élément de Ω, et si $\mathcal{P}(A)$ appartient aussi à Ω, alors $\mathrm{Card}(A) < \mathrm{Card}(\mathcal{P}(A))$.

a. La partie difficile à établir, *i.e.* l'antisymétrie, consistant précisément en le théorème de Cantor-Bernstein.

1.1

Le théorème de Cantor-Bernstein est intéressant d'un point de vue théorique, mais en pratique, nous nous intéresserons principalement à des ensembles au plus dénombrables, pour lesquels il est inutile d'y avoir recours.

Définition (Ensemble dénombrable)

Un ensemble est dit *dénombrable* s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$.
Un ensemble est dit *au plus dénombrable* s'il est fini ou dénombrable.

1.b

La dénombrabilité correspond au plus petit cardinal infini, parce que $\mathbb{N}$ s'injecte dans tout ensemble infini :

Lemme Le plus petit cardinal d'un ensemble infini

Soit X un ensemble infini. Il existe alors une injection de $\mathbb{N}$ dans X.

1.a

Démonstration

On construit une telle injection φ en définissant $\varphi(n)$ par récurrence sur n : on choisit x_0 dans X, et on pose $\varphi(0) = x_0$. Supposant $\varphi(0), \dots, \varphi(n)$ construits, on choisit x_{n+1} dans $X \setminus \{\varphi(0), \dots, \varphi(n)\}$ (cet ensemble n'est pas vide car X est infini), et on pose $\varphi(n+1) \overset{def}{=} x_{n+1}$.
La fonction φ ainsi définie est clairement une injection de $\mathbb{N}$ dans X.

□

Définition (Famille finie, famille dénombrable) 1.c

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'élements d'un ensemble X (ici, I n'est pas supposé dénombrable). Le *cardinal* de cette famille est le cardinal de son ensemble d'indexation I.
On dit que cette famille est *finie* (resp. dénombrable) si I est de cardinal fini (resp. est dénombrable).
Si $(X_i)_{i \in I}$ est une famille finie (resp. dénombrable) d'ensembles, alors la réunion $\bigcup_{i \in I} X_i$ est dite *finie* (resp. dénombrable).
Une union d'une famille $(X_i)_{i \in I}$ est dite *disjointe* si pour tous i et j distincts dans I, X_i et X_j sont disjoints.

Il y a une ambiguïté dans l'expression « union finie » : on parle d'union finie pour $\bigcup_{i \in I} X_i$ lorsque I est fini, mais l'ensemble $\bigcup_{i \in I} X_i$ n'en est pas nécessairement pour autant fini. Par exemple l'union $\bigcup_{i \in [\![1,2]\!]} (\mathbb{N} \times \{i\})$ est finie, mais l'ensemble résultant est infini. On lèvera l'ambiguïté grâce au contexte.

Lemme Un ensemble infini d'entiers est dénombrable 1.b

Soit X une partie infinie de $\mathbb{N}$. L'ensemble X est alors dénombrable.

Démonstration

On peut utiliser le lemme de Cantor-Bernstein et le lemme précédent.
Si on veut éviter le recours à Cantor-Bernstein, on pose $\varphi(0) = \min(X)$, puis, supposant $\varphi(0), \dots, \varphi(n)$ construits,

$$\varphi(n+1) \overset{def}{=} \min X \setminus \{\varphi(0), \dots, \varphi(n)\}$$

et on vérifie que φ est bijective.

□

Proposition (Caractérisation des ensembles au plus dénombrables) 1.c

Un ensemble est fini ou dénombrable si et seulement s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.

Démonstration

Le sens direct est évident par définition d'un ensemble fini et d'un ensemble dénombrable.
Le sens indirect est une conséquence directe du lemme.

□

Plus généralement, un ensemble X est fini ou dénombrable s'il est en bijection avec une partie d'un ensemble dénombrable fixé Ω, *i.e.* il existe une injection de X dans Ω.

Exemple (Ensembles dénombrables) i

Les ensembles $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables, mais pas $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (qui s'identifie à $\mathcal{P}(\mathbb{N})$).

Ensembles infinis d'entiers naturels et extractrices 1.2

Les parties infinies de $\mathbb{N}$ sont dénombrables. Ainsi, se donner une extractrice revient à se donner une partie infinie de $\mathbb{N}$ (correspondant à l'image de l'extractrice).

Proposition (Opérations sur les ensembles dénombrables) 1.d

(1) Un produit cartésien fini (indexé par un ensemble non vide) d'ensembles dénombrables est dénombrable.

(2) Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est finie ou dénombrable.

Démonstration

Non exigibles.

(1) Il suffit de le montrer pour un produit de deux ensembles dénombrables (si φ et ψ sont des bijections de A et B respectivement sur $\mathbb{N}$, alors $\Delta : (a,b) \mapsto (\varphi(a), \psi(b))$ est une bijection de $A \times B$ sur $\mathbb{N}^2$, et ce dernier ensemble est dénombrable), puis de procéder par récurrence.

(2) Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles au plus dénombrables, où I est au plus dénombrable. Pour tout $i \in I$, soit φ_i une injection de A_i dans $\mathbb{N}$, et soit ψ une injection de I dans $\mathbb{N}$.

Supposons les A_i disjoints deux à deux ($A_i \cap A_j = \emptyset$ dès que $i \neq j$).

On vérifie que l'application

$$\Delta : \begin{array}{rcl} \bigcup_{i \in I} A_i & \to & \mathbb{N}^2 \\ \omega & \mapsto & (i, \varphi_i(\omega)) \text{ où } i \text{ est l'unique élément de } I \text{ tel que } \omega \in A_i \end{array}$$

est injective, donc $\bigcup_{i \in I} A_i$ est au plus dénombrable.

Pour se ramener au cas d'une union disjointe, on se ramène au cas où $I = \mathbb{N}$, puis on pose $B_0 = A_0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n = A_n \setminus (A_0 \cup \cdots \cup A_{n-1})$.

□

En particulier, si Ω est dénombrable, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, Ω^k est dénombrable.

Proposition (Non dénombrabilité du corps des réels) 1.e

L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Démonstration

Non exigible.
On vérifie que

$$\Delta : \begin{array}{rcl} \{0,1\}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R} \\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n} \end{array}$$

est injective.

□

Un intervalle de $\mathbb{R}$ est soit vide, soit un singleton, soit équipotent à $\mathbb{R}$.

Exercice (Cardinal du lieu de discontinuité d'une fonction monotone)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction monotone. Montrer que l'ensemble Ω des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.
Indication : on pourra construire (pas de façon explicite) une injection de Ω dans $\mathbb{Q}$.

3

2. Familles sommables

2.1. Famille sommable de réels positifs

Définition (Famille sommable de réels positifs)

Une famille $(u_i)_{i\in I}$ de réels positifs est dite *sommable* si l'ensemble des sommes $\displaystyle\sum_{i\in F} u_i$, où F décrit l'ensemble des parties finies de I, est majoré. Dans ce cas, la *somme* de la famille $(u_i)_{i\in I}$ est la borne supérieure de l'ensemble précédent. Si la famille $(u_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable, sa somme est $+\infty$. Dans tous les cas, la somme est notée $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i$.

2.a

Pour harmoniser les notions, on conviendra qu'une famille $(u_i)_{i\in I}$ de réels positifs indexée par un ensemble fini I est sommable, et que sa somme vaut $\sum_{i\in I} u_i$ (nulle dans le cas où I est vide).

Proposition (Famille sommable de réels positifs)

Soit $(u_i)_{i\in I}$ est une famille sommable de réels positifs et $(v_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs

(1) Si $v_i \leqslant u_i$ pour tout $i \in I$, alors $(v_i)_{i\in I}$ est sommable, et
$$\sum_{i\in I} v_i \leqslant \sum_{i\in I} u_i$$
(2) Pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, $(au_i)_{i\in I}$ est sommable, et
$$\sum_{i\in I} au_i = a\sum_{i\in I} u_i$$
(3) Si $(v_i)_{i\in I}$ est également sommable, alors $(u_i + v_i)_{i\in I}$ est sommable, et
$$\sum_{i\in I} u_i + v_i = \sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in I} v_i$$

2.a

Démonstration

(1) Supposons $v_i \leqslant u_i$ pour tout $i \in I$. Pour toute partie finie F de I, on a :

$$\sum_{i\in F} v_i \leqslant \sum_{i\in F} u_i \leqslant \sum_{i\in I} u_i$$

donc $\sum_{i\in I} u_i$ est un majorant de $\{\sum_{i\in F} v_i, F \subset I$ et F est fini $\}$, d'où la sommabilité de $(v_i)_{i\in I}$, et, par définition de la borne supérieure, le fait que

$$\sum_{i\in I} v_i \leqslant \sum_{i\in I} u_i$$

(2) Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Pour toute partie finie F de I, on a

$$\sum_{i\in F} au_i = a\sum_{i\in F} u_i \leqslant a\sum_{i\in I} u_i$$

d'où la sommabilité de $(au_i)_{i\in I}$, et le fait que

$$\sum_{i\in I} au_i \leqslant a\sum_{i\in I} u_i$$

Pour l'inégalité en sens inverse, on écarte le cas évident où $a = 0$, puis applique le résultat que l'on vient d'établir à $\frac{1}{a}$ et $(au_i)_{i\in I}$.

(3) On suppose $(v_i)_{i\in I}$ sommable. Pour toute partie finie F de I, on a

$$\sum_{i\in F}(u_i + v_i) = \sum_{i\in F} u_i + \sum_{i\in F} v_i \leqslant \sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in I} v_i$$

d'où la sommabilité de $(u_i + v_i)_{i\in I}$ et le fait que

$$\sum_{i\in I}(u_i + v_i) \leqslant \sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in I} v_i$$

Montrons l'inégalité en sens inverse. Considérons des parties finies F et G de I. On a

$$\sum_{i\in F} u_i + \sum_{i\in G} v_i \leqslant \sum_{i\in F\cup G} u_i + \sum_{i\in F\cup G} v_i = \sum_{i\in F\cup G} (u_i + v_i) \leqslant \sum_{i\in I}(u_i + v_i)$$

donc, pour G partie finie de I fixée, on a, pour toute partie finie F de I :

$$\sum_{i\in F} u_i \leqslant \sum_{i\in I}(u_i + v_i) - \sum_{i\in G} v_i$$

d'où

$$\sum_{i\in I} u_i \leqslant \sum_{i\in I}(u_i + v_i) - \sum_{i\in G} v_i$$

puis

$$\sum_{i\in G} v_i \leqslant \sum_{i\in I}(u_i + v_i) - \sum_{i\in I} u_i$$

puis, ceci valant pour toute partie finie G de I :

$$\sum_{i\in I} v_i \leqslant \sum_{i\in I}(u_i + v_i) - \sum_{i\in I} u_i$$

□

Famille sommable indexée par un ensemble infini non dénombrable (hors programme) 2.1

On pourrait définir la notion de famille sommable indexée par un ensemble infini non nécessairement dénombrable. Y gagnerait-on beaucoup ?
Considérons une famille sommable $(u_k)_{k\in K}$ de réels positifs ou nuls. Soit $K' = \{k \in K, u_k > 0\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit

$$\Omega_n = \left\{k \in K,\ u_k > \frac{1}{n}\right\}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la famille $(u_k)_{k\in K}$ étant sommable, Ω_n est fini. Or

$$K' = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \Omega_n,$$

donc K' est au plus dénombrable : les u_k sont nuls, sauf pour un ensemble au plus dénombrable d'indices.
Par conséquent, pour notre étude, il n'y avait pas grand intérêt à définir la notion de famille sommable sur un ensemble non dénombrable.

Théorème de sommation par paquets, cas réel positif 2.b

Si $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition [a] de I et $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs, alors la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(1) Pour tout entier n la famille $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable.

(2) La série $\sum\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$ converge.

Dans ce cas :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right).$$

a. Ce qui signifie ici que I est l'union disjointe des termes de cette famille.

Démonstration

Hors programme (admise) □

Exercice (Sommabilité d'une série double de termes positifs) 4

Étudier la sommabilité de $\left(\frac{1}{(i+j)^p}\right)_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ où $p > 0$, et calculer sa somme le cas échéant.
Indication : on pourra poser, pour tout $n \geqslant 2$

$$I_n \overset{def}{=} \{(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2, i + j = n\}$$

2.2. Famille sommable de nombres complexes

On rappelle, étant donné un réel α, que sa partie positive α^+ vaut $\max(\alpha, 0)$, et que sa partie négative α^- vaut $\max(-\alpha, 0)$ (et que cette partie négative est donc positive), de sorte que

$$\alpha^- = \max(-\alpha, 0) = -\min(\alpha, 0), \quad \alpha = \alpha^+ - \alpha^- \quad \text{et} \quad |\alpha| = \alpha^+ + \alpha^-$$

Définition (Famille sommable de nombres réels)

La famille $(u_i)_{i\in I}$ de nombres réels est *sommable* si la famille $(|u_i|)_{i\in I}$ l'est. Dans ce cas, la *somme* de $(u_i)_{i\in I}$ est notée $\sum_{i\in I} u_i$, et vaut

$$\sum_{i\in I} u_i \stackrel{def}{=} \sum_{i\in I} u_i^+ - \sum_{i\in I} u_i^-$$

2.b

Démonstration

Justification de sommabilité de $(u_i^+)_{i\in I}$ et $(u_i^-)_{i\in I}$:

□

Définition (Famille sommable de nombres complexes)

La famille $(u_i)_{i\in I}$ de nombres complexes est *sommable* si la famille $(|u_i|)_{i\in I}$ l'est. Dans ce cas, la *somme* de $(u_i)_{i\in I}$ est notée $\sum_{i\in I} u_i$, et vaut

$$\sum_{j\in I} u_j \stackrel{def}{=} \sum_{j\in I} \mathrm{Re}(u_j) + i \sum_{j\in I} \mathrm{Im}(u_j)$$

2.c

Démonstration

Justification de sommabilité de $(\mathrm{Re}(u_j))_{j\in I}$ et $(\mathrm{Im}(u_j))_{j\in I}$:

□

Bien sûr, toute sous-famille d'une famille sommable est sommable.

Proposition (Lien entre la sommabilité et la convergence absolue)

Lorsque $I = \mathbb{N}$, la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si la série $\sum u_i$ est *absolument* convergente. En cas de sommabilité, on a de plus :

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} u_i = \sum_{i=0}^{\infty} u_i$$

2.c

Démonstration

□

Proposition (Permutation de l'ensemble des indices dans une famille sommable)

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes, et $\sigma : I \to I$ une permutation de I. La famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si la famille $(u_{\sigma(i)})_{i\in I}$ est sommable, et les sommes sont égales le cas échéant.

2.d

Démonstration

Non exigible.

□

Proposition (Linéarité de la somme pour les familles sommables)

Notons Ω l'ensemble des familles sommables de nombres complexes indexées par I. Ω est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, et l'application

$$S : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{C} \\ (u_i)_{i\in I} & \mapsto & \sum_{i\in I} u_i \end{array}$$

est une forme linéaire.

2.e

Démonstration

De la structure d'espace vectoriel de Ω :
Ω est une partie de $\mathbb{C}^I$, comprenant son vecteur nul. De plus, pour tout $((u_i)_{i\in I}, (v_i)_{i\in I}) \in \Omega^2$, et tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, on a, pour tout $i \in I$:

$$|\lambda u_i + \mu v_i| \leqslant |\lambda||u_i| + \mu||v_i|$$

D'après la proposition 2.a, la famille $(|\lambda||u_i| + \mu||v_i|)_{i\in I}$ est sommable, et donc, d'après la même proposition, $(|\lambda u_i + \mu v_i|)_{i\in I}$ l'est aussi. Ω est stable par combinaisons linéaires, c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^I$.

□

Démonstration

De la linéarité de S, cas des familles sommables réelles. Soit $((u_i)_{i\in I},(v_i)_{i\in I}) \in \Omega^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Montrer que $\sum_{i\in I} u_i + v_i = \sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in I} v_i$ revient par définition à montrer que

$$\sum_{i\in I}(u_i+v_i)^+ - \sum_{i\in I}(u_i+v_i)^- = \sum_{i\in I} u_i^+ - \sum_{i\in I} u_i^- + \sum_{i\in I} v_i^+ - \sum_{i\in I} v_i^-$$

Or on observe que, pour tout $i \in I$

$$(u_i+v_i)^+ + u_i^- + v_i^- = u_i^+ + v_i^+ + (u_i+v_i)^-,$$

et donc que

$$\sum_{i\in I}(u_i+v_i)^+ + \sum_{i\in I} v_i^- + \sum_{i\in I} u_i^- = \sum_{i\in I} u_i^+ + \sum_{i\in I} v_i^+ + \sum_{i\in I}(u_i+v_i)^-$$

soit le résultat voulu.
Le fait que $S(\lambda(u_i)_{i\in I}) = \lambda S((u_i)_{i\in I})$ est évident, en distinguant les cas selon le signe de λ.

$\square$

Démonstration

De la linéarité de S, cas des familles sommables complexes. Soit $((u_i)_{i\in I},(v_i)_{i\in I}) \in \Omega^2$, $\lambda \in \mathbb{C}$.
Grâce à la $\mathbb{R}$-linéarité de S, on montre aisément que $S((u_i)_{i\in I} + (v_i)_{i\in I}) = S((u_i)_{i\in I}) + S((v_i)_{i\in I})$, et que $S(\lambda(u_i)_{i\in I}) = \lambda S((u_i)_{i\in I})$ si λ est réel.
On montre sans problème que $S(i(u_j)_{j\in I}) = iS((u_j)_{j\in I})$, ce qui achève la preuve de linéarité dans le cas complexe.

$\square$

On aurait aussi pu utiliser une extension de la proposition 2.d pour nous ramener au cas où $I = \mathbb{N}$, et donc au cas des séries numériques (déjà connu), grâce à 2.c.

Théorème de sommation par paquets, cas complexe 2.f

Si $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition de I et $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes, alors la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(1) Pour tout entier n la famille $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable.

(2) La série $\sum \left(\sum_{i\in I_n} |u_i|\right)$ converge.

Dans ce cas :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right).$$

Démonstration

Hors programme (admise).

$\square$

Théorème de sommation par paquets, cas complexe

Il faut faire attention à cette caractérisation de sommabilité par paquets. En effet, il se peut que pour tout entier n la famille $(u_i)_{i\in I_n}$ soit sommable, et que la série $\sum\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$ converge absolument, sans que la famille $(u_i)_{i\in I}$ soit sommable.

2.2

En pratique, on vérifie l'hypothèse de sommabilité en appliquant le théorème de sommation par paquets à la famille $(|u_i|)_{i\in I}$.

3. Applications des familles sommables

3.1. Séries doubles

Comme $\mathbb{N}^2$ est dénombrable, on peut s'intéresser à la sommabilité d'une famille de nombres complexes indexée par $\mathbb{N}^2$ (ce que l'on appelle une *série double*).

Proposition (Théorème de Fubini, cas réel positif)

La famille $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ de réels positifs est sommable si et seulement si pour tout n, la série $\sum a_{m,n}$ converge et la série $\sum\left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n}\right)$ converge. Si tel est le cas

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n}\right) = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n}\right).$$

3.a

Démonstration

□

Exercice (Sommation par paquets et fonction zêta de Riemann)

Montrer que

$$\sum_{p=2}^{\infty}(\zeta(p)-1) = 1$$

5

Proposition (Théorème de Fubini, cas complexe))

La famille $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ de nombres complexes est sommable si et seulement si pour tout n, la série $\sum_m a_{m,n}$ converge *absolument* et la série $\sum_n \left(\sum_{m=0}^{+\infty} |a_{m,n}|\right)$ converge. Si tel est le cas, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n} = \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n}.$$

3.b

Démonstration

□

En pratique, on vérifie l'hypothèse de sommabilité en appliquant l'énoncé précédent à la famille $(|a_{m,n}|)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$.

Pour chaque théorème de Fubini, on a bien sûr une version où on somme d'abord sur n puis sur m, et les deux sommes doubles sont (en cas de sommabilité) la somme de la famille $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$.

Exercice (Famille sommable complexe)

Soit $x, y \in \mathbb{C}$, où $|x| < 1$ et $|y| < 1$. Montrer que la famille $\left(x^i y^j\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et calculer sa somme.

6

Lemme (Produit de termes de familles sommables)

On considère deux familles sommables $(u_i)_{i\in\vec{n}}$ et $(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes, et on pose, pour tout $(i,j)\in\mathbb{N}^2$:

$$w_{i,j} = u_i v_j$$

La famille $(w_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est alors sommable, et

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} w_{i,j} = \left(\sum_{i\in I} u_i\right)\left(\sum_{j\in J} v_j\right).$$

3.c

Démonstration

□

3.2. Produit de Cauchy

Définition (Produit de Cauchy de deux séries)

Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries d'éléments d'une $\mathbb{K}$-algèbre normée de dimension finie. On appelle *produit de Cauchy* de ces séries la série $\sum c_n$, dont le terme général est défini par

$$c_n \stackrel{def}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3.a

On a aussi

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2, i+j=n} a_i b_j$$

Théorème (Produit de Cauchy de séries absolument convergentes)

Si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes, alors leur produit de Cauchy $\sum c_n$ est absolument convergent, et :

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right)$$

3.d

Démonstration

Cas des séries numériques :

$\square$

En fait, les notions d'absolue convergence et de produit de Cauchy ont un sens dans le cadre général des $\mathbb{K}$-algèbres normées de dimension finie : l'énoncé du théorème ci-dessus a un sens dans ce cadre étendu, et il se trouve qu'il reste vrai.

Démonstration

Considérons deux séries absolument convergentes $\sum a_n$ et $\sum b_n$ d'une $\mathbb{K}$-algèbre normée de dimension finie. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k},\ \alpha_n = \|a_n\|,\ \beta_n = \|b_n\| \quad \text{et} \quad \gamma_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$0 \leqslant \|c_n\| = \left\| \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right\| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \|a_k\| \, \|b_{n-k}\| = \gamma_n$$

Or $\sum \gamma_n$ est convergente d'après le cas scalaire déjà établi, donc $\sum c_n$ est absolument convergente.

Posons $C_n = [\![0, n]\!]^2$ et $T_n = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2, i + j \leqslant n\}$. On a

$$\begin{aligned}
\left\| \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \right) \left(\sum_{j=0}^{n} b_j \right) - \sum_{k=0}^{n} c_k \right\| &= \left\| \sum_{(i,j) \in C_n} a_i b_j - \sum_{(i,j) \in T_n} a_i b_j \right\| \\
&= \left\| \sum_{(i,j) \in C_n \setminus T_n} a_i b_j \right\| \\
&\leqslant \sum_{(i,j) \in C_n \setminus T_n} \|a_i b_j\| \\
&\leqslant \sum_{(i,j) \in C_n \setminus T_n} \alpha_i \beta_j \\
&= \left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \right) \left(\sum_{j=0}^{n} \beta_j \right) - \sum_{k=0}^{n} \gamma_k
\end{aligned}$$

or cette dernière expression tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini d'après le cas scalaire, d'où le résultat.

□

Illustration

Je ne sais pas si cette extension de ce théorème à ce cadre général est au programme de MP. En tout état de cause, c'est un résultat intéressant, dont on pourra *a priori* vous demander la démonstration dans un sujet de concours.

Exercice (Somme d'une série grâce à un produit de Cauchy)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Calcul en cas d'existence de $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\alpha^n$.

7

Exercice (Exponentielle d'une somme de matrices)

8

Soit $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

1 On suppose que A et B commutent. Montrer qu'alors

$$\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$$

2 Montrer que ce résultat tombe en défaut si on ne suppose plus que A et B commutent.

Produit de Cauchy

3.1

Le produit de Cauchy de séries convergentes n'est pas toujours convergent : en prenant $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent, mais pas leur produit de Cauchy.

Cependant, le produit de Cauchy d'une série convergente et d'une série absolument convergente est convergent (c'est le *théorème de Mertens*).

4. Feuille de TD 13 : Ensembles finis, ensembles dénombrables. Familles sommables

4.1. Ensembles finis

Exercice 1 (Dénombrement concret) 0

1 Soit $E = [\![1,6]\!]$. Combien peut-on former de nombres différents avec trois chiffres distincts choisis dans E ? Quelle est la somme de ces nombres ?

2 Une urne contient 6 boules blanches numérotées de 1 à 6 et 5 boules noires numérotées de 1 à 5. On tire successivement 4 boules sans remise. Combien de résultats amènent 3 boules blanches et une boule noire ?

3 Combien y a-t-il de mots :
- **i** de 6 lettres écrits avec les lettres A à F ?
- **ii** de 5 lettres écrits avec deux A et trois B ?
- **iii** de 6 lettres écrits avec exactement deux A et trois B ?
- **iv** de 6 lettres écrits avec deux A, trois B, un C ?

4 Combien existe-t-il d'anagrammes du mot chaise ? d'anagrammes du mot anagramme ?

5 Un jeu comporte 32 cartes dont 8 par couleur. Une main est constituée de 8 cartes non ordonnées.
- **i** Quel est le nombre de mains possibles ?
- **ii** Combien de mains contiennent au moins un as ?
- **iii** Combien contiennent exactement un roi ?
- **iv** Combien contiennent au moins un coeur ou une dame ?
- **v** Combien ne contiennent que des cartes de 2 couleurs au plus ?

6 Un tiroir contient 5 paires de chaussures noires, 3 paires de chaussures vertes et 2 paires de chaussures rouges. On choisit deux chaussures au hasard et simultanément.
- **i** Combien y a t-il de tirages possibles ?
- **ii** Combien amènent deux chaussures de la même couleur ?
- **iii** Combien amènent un pied gauche et un pied droit ?
- **iv** Combien permettent de reconstituer une vraie paire de chaussures ?

Exercice 2 (Dérangements) 1

Soit E un ensemble fini non vide. On appelle *dérangement* de E toute permutation f de E sans point fixe, c'est-à-dire telle que :

$$\forall\, k \in E, \quad f(k) \neq k$$

Bien entendu, le nombre de dérangements d'un ensemble fini ne dépend que de son cardinal.
Pour tout entier naturel non nul n, on note Der_n l'ensemble des dérangements de $[\![1,n]\!]$, et d_n son cardinal.

1 Soit n un entier naturel non nul. Donner le cardinal de l'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$.

2 Calculer d_1 et d_2.

3 On fixe un entier naturel $n \geqslant 3$, et, pour tout $k \in [\![1,n-1]\!]$, on considère les ensembles

$$X_k = \{f \in Der_n, f^{-1}(n) = f(n) = k\} \quad \text{et} \quad Y_k = \{f \in Der_n, f^{-1}(n) = k, f(n) \neq k\}$$

Soit $k \in [\![1,n-1]\!]$. Calculer les cardinaux de X_k et de Y_k en fonction de d_{n-2} et d_{n-1}.
Indication : on pourra établir une bijection entre Y_k et Der_{n-1}.

4 En déduire, pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, la formule :

$$d_n = (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2})$$

5 Montrer, pour tout $n \geqslant 2$:

$$d_n = n d_{n-1} + (-1)^n$$

6 En déduire que pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$d_n = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} (-1)^k \frac{n!}{k!}$$

Exercice 3 (Monoïde fini et régulier) 1

On appelle *monoïde* un ensemble muni d'une loi de composition interne associative, admettant un élément neutre pour cette loi. Montrer qu'un monoïde fini et régulier (*i.e.* tout élément est simplifiable à gauche et à droite) est un groupe.

Exercice 4 (Utilisation du principe des tiroirs) 2

Soit n un entier naturel non nul. On choisit $n+1$ nombres quelconques (distincts deux à deux) dans $[\![1, 2n]\!]$. Montrer qu'il en existe deux qui sont premiers entre eux. Montrer qu'il en existe deux tels que l'un divise l'autre.

Exercice 5 (Nombre d'applications (strictement) croissantes) 2

Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$.

1 Combien y a-t-il d'applications strictement croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$?

2 Combien y a-t-il d'applications croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$?

Exercice 6 (Nombre de zéros) 3

Par combien de zéros se termine le nombre $1000000!$?

Exercice 7 (Formules de convolution de Vandermonde) 3

1 Montrer :

$$\forall (p, q, r) \in \mathbb{N}^3, \quad \sum_{i=0}^{r} \binom{p}{i}\binom{q}{r-i} = \binom{p+q}{r}.$$

2 En déduire une expression plus simple de $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2$.

Exercice 8 (Dénombrement lié à des parties) 3

1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer

$$\mathrm{Card}\left\{(A, B) \in \mathcal{P}([\![1, n]\!])^2, A \subset B\right\}.$$

2 Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geqslant 1$. Calculer

$$\sum_{A \subset E} \mathrm{Card}(A), \qquad \sum_{A, B \subset E} \mathrm{Card}(A \cap B) \quad \text{et} \quad \sum_{A, B \subset E} \mathrm{Card}(A \cup B).$$

Exercice 9 (Décomposition d'un entier en somme) 4

On fixe un entier $n \geqslant 1$, et $p \in [\![1, n]\!]$. Calculer :

$$\mathrm{Card}\{(a_1, \ldots, a_p) \in \mathbb{N}^p, a_1 + \cdots + a_p = n\}.$$

Exercice 10 (Parties disjointes de même somme) 5

Soit S un ensemble de 10 entiers distincts choisis parmi les nombres $1, 2, \ldots, 99$. Montrer que S contient toujours deux sous-ensembles disjoints dont la somme de leurs éléments respectifs est la même.

4.2. Dénombrabilité

Exercice 11 (Droite évitant un nombre dénombrable de points) 0

Soit (A_n) une suite de points du plan, tous distincts de l'origine. Montrer l'existence d'une droite passant par l'origine, et ne passant par aucun des points A_n.

Exercice 12 (Fonction continue passant d'un rationnel à un irrationnel, et réciproquement) 2

Montrer qu'il n'existe pas de fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ et $f(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$.

Exercice 13 (Dessiner des 8 dans le plan) 3

Montrer qu'on peut [a] dessiner un nombre non dénombrable de O disjoints dans le plan, mais qu'on ne peut dessiner qu'un nombre au plus dénombrable de 8 disjoints dans le plan.

a. Enfin, façon de parler ...

Exercice 14 (Enlever un nombre dénombrable de points à un ouvert dense) 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit U est un ouvert dense de $\mathbb{R}^n$. Soit X est une partie dénombrable de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $U \setminus X$ est dense. Est-ce nécessairement un ouvert ?

Exercice 15 (Existence non constructive de nombres transcendants) 5

Montrer que l'ensemble des nombres algébriques sur $\mathbb{Q}$ est dénombrable. Qu'en déduire sur l'ensemble des nombres complexes transcendants ?

4.3. Familles sommables, produit de Cauchy

Exercice 16 (Familles sommables et calculs de somme) 2

1 Existence et calcul de

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$$

2 Existence et calcul de $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k!}$.

Exercice 17 (Une famille non sommable) 2

Pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, on pose $a_{n,n} \overset{def}{=} 0$, et, si $n \neq p$: $a_{n,p} \overset{def}{=} \frac{1}{n^2-p^2}$.

1 Montrer que la famille $(a_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ n'est pas sommable.

2 Calculer $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} a_{n,p}$ et $\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{n,p}$.

Exercice 18 (Théorème de Mertens) 3

Montrer que si les deux séries de nombres complexes $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent et une au moins converge absolument, alors leur produit de Cauchy converge, et que sa somme est le produit des sommes.

Exercice 19 (Produit de Cauchy de séries divergentes) 3

Le produit de Cauchy de deux séries divergentes est-il nécessairement divergent ? Que dire si les deux séries sont en outre de termes généraux strictement positifs ?

5. Oraux

Exercice 20 (Divers dénombrements d'ensembles d'applications (X MP 10)) — 3

Soit X et Y deux ensembles finis. Dénombrer :
1 Les fonctions de X dans Y.
2 Les injections de X dans Y.
3 Les bijections de X sur Y.
4 Les surjections de X sur Y.

Exercice 21 (Dénombrement de relations binaires) — 3 à 4

1 (Mines MP 93) Soit E un ensemble à n éléments. Trouver le nombre de relations binaires sur E. Combien d'entre elles sont réflexives ? symétriques ? réflexives et symétriques ?
2 (X MP 90) Soit A un ensemble de cardinal n, R une relation d'équivalence sur A avec k classes. Soit m le cardinal du graphe de R. Montrer que $n^2 \leqslant km$.

Exercice 22 (Parties donnant une intersection fixée avec une partie fixée) — 3

(Mines PSI 08, X PC 08) Soit E un ensemble fini, A et B des parties de E.
1 Combien y a-t-il de parties X de E telles que $A \cup X = B$?
2 Soit E un ensemble de cardinal n et $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$. Déterminer le nombre de $X \in \mathcal{P}(E)$ telles que $A \cap X = B$.

Exercice 23 (Trois calculs d'une même somme (X MP 08)) — 3

Calculer $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$ par trois méthodes différentes.

Exercice 24 (Une sommabilité arithmétique (Centrale MP 99)) — 3

Étudier $\sum_{p,q\in\mathbb{N}^*, p\wedge q=1} \frac{1}{p^2q^2}$. On donne $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Exercice 25 (Études diverses de sommabilité) — 3

1 (Mines MP 00) Pour quelles valeurs du réel α la famille $\left(\frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}^{*2}}$ est-elle sommable ?
2 (Mines MP 98) Trouver un équivalent simple de $s_n = \frac{1}{n^3} \sum_{p,q\in[\![1,n]\!]} \frac{pq}{p+q}$.
3 (Mines MP 98) Calculer

$$\sum_{(k,n)\in\mathbb{N}^{*2}} \frac{1}{k(2k+1)(2n)^{2k}}$$

4 (Mines MP 97) Sommabilité et somme de $\left(\frac{(-1)^p}{q^p}\right)_{p,q\geqslant 2}$.
5 (Mines MP 92) Nature de la série $\sum n^\alpha \sum_{k=2}^{n} (\ln k)^2$.

Exercice 26 (Points sous la première bissectrice d'une permutation de $\mathbb{N}$) 4

(ENS MP 10) Soit $\sigma\ : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijective et $A = \{n \in \mathbb{N}, \sigma(n) \geqslant n\}$ et $B = \{n \in \mathbb{N}, \sigma(n) < n\}$.
1 Est-il possible que A soit infini et B fini ?
2 Est-il possible que A et B soient infinis ?
3 Est-il possible que A soit fini et B infini ?

Exercice 27 (Étude difficile de famille sommable) 4

(X MP 97) Soit (a_n) une suite de $\mathbb{R}_+$.
1 On suppose que la série $\sum a_n$ converge. Montrer que $\sum \frac{a_n}{n(n+1)}$ converge.
Montrer que $\sum k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{a_n}{n(n+1)}$ converge, et comparer sa valeur à $\sum a_n$.
2 On suppose que $\sum \sqrt{n} a_n$ converge, et on pose $w_n = \sum_{p=n}^{\infty} a_p^2$. Montrer l'existence de w_n et la convergence de la série de terme général $\sqrt{\frac{w_n}{n}}$.

CHAPITRE XIV

Séries entières

Sommaire

Une série entière est une série de fonctions $\sum u_n$ très particulière : pour chaque n, il existe un complexe a_n telle que u_n soit l'application $z \mapsto a_n z^n$.

Comme on peut s'y attendre, l'étude des propriétés de la somme sera grandement simplifiée dans ce cadre restreint. Le domaine de définition de cette somme [1] retiendra particulièrement notre attention.

On peut se demander si une fonction donnée f, définie au voisinage de 0, coïncide avec la somme d'une série entière au voisinage de 0. Nous verrons qu'il est nécessaire, mais non suffisant, que f soit de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0. De plus, nous verrons que la série entière ne peut être que $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$, et l'étude de la possibilité d'un tel développement répondra donc à une question que beaucoup d'entre vous se sont sûrement posée : peut-on faire un « développement limité d'ordre infini », et cela nous donne-t-il bien f ?

On rappelle qu'une série géométrique $\sum q^n$ (où $q \in \mathbb{C}$) converge si et seulement si $|q| < 1$, et qu'alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

Pour clarifier les démonstrations du cours, on introduit, étant donnée une suite complexe $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, la notation

$$\mathcal{B}_a \overset{def}{=} \{r \in \mathbb{R}_+, (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$$

Cette notation n'a rien de standard, et n'a d'usage qu'au sein du présent cours.

1. Généralités

1.1. Définition, rayon de convergence

Définition (Série entière) 1.a

Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. On appelle *série entière* associée à a la série de fonctions $\sum u_n$, où, pour tout n, u_n est la fonction $z \in \mathbb{C} \mapsto a_n z^n$. Par convention, on écrira abusivement $\sum a_n z^n$ cette série de fonctions.

1. Ou plutôt son intérieur, qui sera un disque ouvert centré en 0 (de rayon éventuellement « infini »).

La somme $S\ : z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ de cette série est définie sur une partie de $\mathbb{C}$, non vide puisqu'elle comprend 0.

On conserve ces notations dans le reste de ce chapitre (sauf mention contraire).

On observe que si z_0 et z_1 ont même module, alors les séries $\sum a_n z_0^n$ et $\sum a_n z_1^n$ n'ont pas nécessairement même nature, mais qu'en revanche la convergence absolue de l'une équivaut (trivialement) à celle de l'autre.

En fait, on a une propriété plus intéressante, qui permettra de définir la notion de rayon de convergence :

Lemme d'Abel

Si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée, alors, pour tout nombre complexe z tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

1.a

Démonstration

$\square$

Définition (Rayon de convergence d'une série entière)

On appelle *rayon de convergence* de la série entière $\sum a_n z^n$ l'élément R_a de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ défini par

$$R_a \stackrel{def}{=} \sup\{r \in \mathbb{R}_+, (a_n r^n) \text{ est bornée}\}.$$

On appelle *disque ouvert de convergence* de la série entière $\sum a_n z^n$, et on note D_a, le disque ouvert centré en 0 de rayon R_a :

$$D_a \stackrel{def}{=} \{z \in \mathbb{C}, |z| < R_a\}.$$

L'intervalle $]-R_a, R_a[$ est appelé *intervalle ouvert de convergence*.

1.b

Avec la définition donnée en préambule, $R_a = \sup(\mathcal{B}_a)$.

Nous noterons R le rayon de convergence, et D le disque ouvert de convergence de $\sum a_n z^n$ (si $R = +\infty$, $D = \mathbb{C}$).

Comportement en un point selon son module, notion de cercle d'incertitude

Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

(1) si $|z| < R$ (*i.e.* si $z \in D$), alors il y a convergence absolue de $\sum a_n z^n$.

(2) si $|z| > R$, alors il y a divergence grossière de $\sum a_n z^n$.

(3) si $|z| = R$, on ne sait rien *a priori* de l'éventuelle convergence : une étude plus fine est en général nécessaire. Certains appellent le cercle de centre 0 et de rayon R le *cercle d'incertitude* de la série entière $\sum a_n z^n$.

On peut donc caractériser le rayon de convergence ainsi : c'est l'unique élément α de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, si $|z| < \alpha$, alors il y a convergence (absolue) de $\sum a_n z^n$, et si $|z| > \alpha$, alors il y a divergence (grossière) de $\sum a_n z^n$.

1.1

En particulier, le domaine Ω de convergence simple de la série entière $\sum a_n z^n$ vérifie $D \subset \Omega \subset D'$, où $D' = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leqslant R\}$ (c'est l'adhérence de D si et seulement si $R > 0$), chacune des inclusions pouvant être stricte (on retiendra notamment qu'il peut y avoir convergence en un point hors du disque ouvert de convergence).

Illustration

Il faut donc retenir que le rayon de convergence ne nous donne qu'une information *partielle* sur le domaine de convergence.

Exercice (Diverses expression du rayon de convergence)

Montrer que $\{r \in \mathbb{R}_+, (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$, $\{r \in \mathbb{R}_+, (a_n r^n) \text{ tend vers } 0\}$, $\{r \in \mathbb{R}_+, \sum a_n r^n \text{ converge}\}$ et $\{r \in \mathbb{R}_+, \sum a_n r^n \text{ converge absolument}\}$ ont même borne supérieure (qui est donc le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$). 1

Exemple (Domaines de convergence simple d'une série entière)

(1) Pour $\sum z^n$, $R = 1$ et $\Omega = D$.
(2) Pour $\sum \frac{z^n}{n^2}$, $R = 1$ et $\Omega = \overline{D}$. i
(3) Pour $\sum \frac{z^n}{n}$, $R = 1$ et $D \subsetneq \Omega \subsetneq \overline{D}$.

Si $R = +\infty$, on a $D = \Omega = \overline{D} = \mathbb{C}$ et $\mathcal{B}_a = \mathbb{R}_+$.
Si $R = 0$, on a $D = \emptyset$ et $\Omega = D' = \{0\}$ et $\mathcal{B}_a = \{0\}$.
Si $R > 0$, on a $\mathcal{B}_a = [0, R[$ ou $\mathcal{B}_a = [0, R]$ (car si $r \in \mathcal{B}_a$, alors $[0, r] \subset \mathcal{B}_a$), les deux cas pouvant se produire :

1.2. Régularité de la somme d'une série entière

La convergence absolue en tout point du disque ouvert de convergence est une information intéressante, mais ne permet pas à elle seule d'étudier la régularité de la somme.

Proposition (Comportement dans un disque fermé inclus dans le disque ouvert de convergence)

La convergence de $\sum a_n z^n$ est normale sur tout disque fermé de centre 0 et de rayon strictement inférieur à R. 1.b

Démonstration

□

Plus généralement, il y a convergence normale sur tout compact inclus dans le disque ouvert de convergence :

Illustration

Convergence normale sur un disque fermé inclus dans le disque ouvert

La proposition précédente ne prétend nullement qu'il y ait convergence normale sur le disque ouvert de convergence [a] :

En fait, on montre assez facilement que s'il y a convergence normale sur le disque ouvert de convergence D, alors $\Omega = D'$ (égal à $\overline{D}$ si $R > 0$), et il y a convergence normale sur D'.

1.2

a. Un peu comme le fait d'être borné sur tout compact n'implique pas d'être borné. (si c'était le cas, toute fonction continue serait bornée ...)

On obtient notamment, puisque tout point de D admet un voisinage compact inclus dans D :

Corollaire (Continuité de la somme d'une série entière sur le disque ouvert de convergence)

La somme de la série entière $\sum a_n z^n$ est continue sur D.

1.c

L'étude des propriétés de la somme au bord du disque ouvert de convergence n'est pas un objectif du programme. On peut toutefois réfléchir à des questions de continuité en un point du cercle d'incertitude où il y a convergence. Nous verrons qu'il n'y a pas toujours continuité en un tel point.

Bien sûr, dans le cas particulier où $\sum a_n z^n$ est normalement convergente sur D', on a $\Omega = D'$ et S est continue sur Ω.

1.3. Détermination du rayon de convergence d'une série entière

Pour déterminer le rayon de convergence, on tentera d'abord de recourir à la définition. On pourra aussi observer, en reprenant la remarque 1.1, que si $\sum a_n z_0^n$ converge (resp. diverge), alors $|z_0| \leqslant R$ (resp. $R \leqslant |z_0|$).

Bien sûr, si on change la suite (a_n) en un nombre fini d'indices, cela ne changera rien à son rayon de convergence.

Exercice (Série entière et rayon de convergence)

1 Montrer que les séries entières $\sum z^n$, $\sum nz^n$ et $\sum \frac{z^n}{n}$ ont pour rayon de convergence 1.

2 Montrer que $\sum a_{n+1} z^n$, $\sum |a_n| z^n$ et $\sum a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.

3 Soit (α_n) une suite bornée. Montrer que le rayon de convergence de $\sum \alpha_n z^n$ vaut au moins 1.
On suppose en outre que α_n ne tend pas vers 0. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum \alpha_n z^n$ vaut 1.
En déduire le rayon de convergence de $\sum \sin(n) z^n$.

4 Soit $M \in \mathbb{C}^*$. Donner le rayon de convergence de $\sum a_n \left(\frac{z}{M}\right)^n$ en fonction de R (le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$).

2

Proposition (Séries entières et relation de domination)

(1) On suppose que $a_n = O(b_n)$. On a alors $R_a \geqslant R_b$.
(2) On suppose que $a_n \sim b_n$. On a alors $R_a = R_b$.

1.d

Démonstration

□

Il est remarquable que, pour une fois, on ne suppose pas les suites de signe constant. C'est bien sûr lié à l'absolue convergence en tout point du disque ouvert.

On dispose aussi d'une règle assez pratique pour déterminer le rayon de convergence, mais qui n'est pas du tout un passage obligé.

Proposition (Règle de d'Alembert pour les séries entières)

On suppose que la suite (a_n) est à termes tous non nuls à partir d'un certain rang N, et que la suite $\left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)_{n \geqslant N}$ tend vers $l \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ vaut alors $\frac{1}{l}$ (0 dans le cas où $l = +\infty$, $+\infty$ dans le cas où $l = 0$).

1.e

Démonstration

□

Comment retenir cette règle ? La « bonne » règle de d'Alembert est celle donnée dans le chapitre sur les séries numériques : en l'appliquant au cas particulier d'une série entière, on retrouve naturellement la proposition précédente.

Pour ceux qui veulent absolument retenir cette proposition, vérifier qu'elle ne donne pas de résultat aberrant, pour $\sum \frac{z^n}{n!}$ par exemple.

Exemple (Règle de d'Alembert) ii

(1) Pour tout réel α, la série entière $\sum n^\alpha z^n$ admet 1 pour rayon de convergence.
(2) La série entière $\sum n! z^n$ est de rayon de convergence nul.

Lorsque la règle de d'Alembert ne s'appplique pas 1.3

La règle de d'Alembert pour les séries entières ne peut pas toujours s'appliquer. Supposons par exemple que la série entière soit *lacunaire*, *i.e.* $a_n = 0$ pour une infinité de valeurs de n.
Bien sûr, si (a_n) est nulle à partir d'un certain rang, alors la somme est une fonction polynomiale, et le rayon de convergence est infini.
Pour la série entière $\sum \frac{z^{2n}}{n(3^n+1)}$ par exemple, la règle de d'Alembert pour les séries entières ne s'applique pas : comment déterminer R ? Il suffit d'appliquer, pour tout $z_0 \in \mathbb{C}^*$, la règle de d'Alembert à la série numérique $\sum \frac{z_0^{2n}}{n(3^n+1)}$:

On notera que le fait de revenir à la définition du rayon de convergence est au moins aussi rapide.

Exercice (Détermination du rayon de convergence) 3

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$, où $a_n = 3^n$ si n est pair, et $a_n = \frac{1}{4^n}$ si n est impair.

Lemme pour la dérivation d'une série entière 1.f

Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Démonstration

Notons $b_n = na_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et, pour tout $(n, \varepsilon) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+^*$,

$$\alpha_{\varepsilon,n} \stackrel{def}{=} (1+\varepsilon)^n a_n$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$a_n = \mathrm{O}(b_n) \quad \text{et} \quad b_n = \mathrm{O}((1+\varepsilon)^n a_n)$$

de sorte que

$$R_b \leqslant R_a \quad \text{et} \quad R_{\alpha_\varepsilon} \leqslant R_b$$

soit

$$\frac{R_a}{1+\varepsilon} \leqslant R_b \leqslant R_a$$

puis $R_a = R_b$ en faisant tendre ε vers 0.

□

Plus généralement, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sum n^\alpha a_n z^n$ et $\sum a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

1.4. Somme et produit de Cauchy de deux séries entières

Définition (Somme et produit de Cauchy de deux séries entières) — 1.c

La *somme* des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ est la série entière

$$\sum (a_n + b_n) z^n$$

Le *produit (de Cauchy)* de ces séries entières est la série entière $\sum c_n z^n$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$c_n \stackrel{def}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Proposition (Rayon de convergence de la somme et du produit de deux séries entières) — 1.g

On reprend les notations de la définition ci-dessus.

(1) Le rayon de convergence R_{a+b} de la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$ vérifie

$$R_{a+b} \geqslant \min\{R_a, R_b\}$$

et une condition suffisante d'égalité dans cette inégalité est que $R_a \neq R_b$.

(2) Le rayon de convergence R_c de la série entière $\sum c_n z^n$ vérifie

$$R_c \geqslant \min\{R_a, R_b\}$$

(3) Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min\{R_a, R_b\}$, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n \quad \text{et} \quad \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

Démonstration

□

Illustration

Même si $R_a \neq R_b$, il se peut que $R_c \neq \min\{R_a, R_b\}$:

On peut ainsi retrouver le résultat de l'exercice 3 de cours.

2. Série entière d'une variable réelle

On s'intéresse ici à la possibilité ou non d'intégrer ou de dériver une série entière, et on voit donc cette dernière comme une fonction d'une variable réelle. S est définie sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$, mais aussi en R ou $-R$ dans certains cas.

Proposition (Primitivation d'une série entière) 2.a

La série entière $\sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ converge simplement sur $]-R, R[$, sa somme T est dérivable sur $]-R, R[$, et a pour dérivée S sur cet intervalle.

Démonstration

□

Nous ne disons rien de ce qu'il se passe en R et $-R$. L'étude au bord se fait au cas par cas.

Proposition (Dérivations successives d'une série entière)

La somme d'une série entière est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence, et ses dérivées s'obtiennent par dérivation terme à terme : pour tout $x \in]-R, R[$, tout $p \in \mathbb{N}$:

$$S^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)\dots(n-(p-1))a_n x^{n-p}$$

2.b

Démonstration

□

On a aussi :

$$\begin{aligned} S^{(p)}(x) &= \sum_{n=p}^{\infty} \frac{n!}{(n-p)!} a_n x^{n-p} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} x^n \end{aligned}$$

Proposition (Retrouver les coefficients d'une série entière en dérivant)

Si $R > 0$, alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$a_p = \frac{S^{(p)}(0)}{p!}$$

2.c

Démonstration

□

Dans le contexte des séries entières (de rayon de convergence strictement positif), on peut retrouver la série entière à partir de la seule connaissance de sa somme ! Cette extraction d'information est exceptionnelle, la connaissance de la somme d'une série ne permet pas, en général, de retrouver la série de départ.

Ici, on a pu récupérer la série car les séries entières sont des séries de fonctions bien particulières.

Corollaire (Obtention de la série entière à partir de sa somme lorsque R n'est pas nul)

Si les fonctions $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ coïncident sur un voisinage de 0, alors pour tout n, $a_n = b_n$.

2.d

En fait, on a un résultat plus fin :

Exercice (Principe des zéros isolés)

1 Montrer que si $R > 0$, si (a_n) n'est pas la suite nulle, et si $S(0) = 0$, alors il existe un voisinage de 0 dans D sur lequel S ne s'annule qu'en 0.

2 On suppose qu'il existe une suite (x_p) de points non nuls de D, convergeant vers 0, telle que les fonctions $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ coïncident en chaque x_p. Montrer qu'alors pour tout n, $a_n = b_n$.

4

3. Fonctions développables en série entière, développements usuels

3.1. Généralités

On peut, étant donné une fonction f définie sur un voisinage de 0, se demander si elle coïncide avec la somme d'une série entière au voisinage de 0.

Définition (Fonction d'une variable complexe développable en série entière)

On dit qu'une fonction f, définie au voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$, est *développable en série entière en* 0 (ou qu'elle admet un *développement en série entière en* 0), s'il existe $r > 0$ et une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R \geqslant r$ tels que

$$\forall z \in \{w \in \mathbb{C}, |w| < r\}, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

3.a

Exemple (Développement en série entière, variable complexe)

(1) La fonction exponentielle est développable en série entière en 0. Pour tout nombre complexe z,

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

(2) La fonction $z \mapsto \frac{1}{1-z}$ est développable en série entière en 0. Pour tout nombre complexe z tel que $|z| < 1$:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

Ce dernier exemple montre au passage qu'une fonction n'est pas toujours développable en série entière sur son domaine de définition.

i

Opérations sur les DSE

Être développable en série entière est une propriété robuste par opérations algébriques : si f et g admettent un DSE (version abrégée de développement en série entière (en 0)), alors $\lambda f + \mu g$ (où $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$) et fg aussi [a]

[a] Si en outre $f(0) \neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ admet aussi un DSE en 0, mais ce résultat est hors programme et délicat à démontrer.

3.1

Exercice (Développement en série entière d'une fonction rationnelle)

Montrer, plus généralement, qu'une fonction rationnelle F n'admettant pas 0 pour pôle est développable en série entière au voisinage de 0, et que le rayon de convergence de la série entière correspondant est alors le plus petit des modules des pôles de F ($+\infty$ si F est polynomiale).

5

Définition (Fonction d'une variable réelle développable en série entière)

On dit qu'une fonction f, à variable réelle, définie sur un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 dans $\mathbb{R}$, est *développable en série entière (en* 0*) sur* $]-r,r[$, si $]-r,r[\subset \mathcal{V}$ et s'il existe une une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R \geqslant r$ telle que

$$\forall\, x \in]-r,r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

On dit que f est *développable en série entière (en 0)*, ou que f admet un développement en série entière en 0, s'il existe $r > 0$ tel que f soit développable en série entière en 0 sur $]-r,r[$.

3.b

Régularité d'une fonction développable en série entière

Si f admet un DSE en 0, alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0. Cependant, f n'est pas nécessairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de défintion : par définition du fait d'être développable en série entière, nous n'avons de renseignement sur f qu'au voisinage de 0. Par exemple, la fonction f nulle sur $]-1,1[$, et valant 1 sur $]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$ est développable en série entière au voisinage de 0 (et est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0), mais elle n'est pas de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ puisqu'elle n'y est même pas continue. Au passage, on remarquera que la [a] série entière $\sum a_n x^n$ dont la somme coïncide avec f au voisinage de 0 a un rayon de convergence infini (c'est la série entière nulle).

a. Pourquoi au plus une série entière est-elle susceptible convenir ?

3.2

Exemple (Régularité par existence d'un DSE)

La fonction $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ se prolonge par continuité en 0, en une fonction φ qui admet un DSE

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)!}$$

Cette fonction φ est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 (d'ailleurs, le rayon de convergence est infini).

La fonction φ est en fait de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. En effet, on peut soit dire qu'elle l'est au voisinage de 0 (puisque développable en série entière), et qu'elle l'est sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ (par opérations algébriques), soit observer que φ est développable en série entière en 0 sur $\mathbb{R}$.

ii

Nous verrons lors de l'exercice de cours 6 que la réciproque est fausse : une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 n'admet pas toujours un DSE.

Exemple (Développement en série entière, variable réelle)

La fonction $f\ : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$. En effet, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

Cet exemple montre qu'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ qui admet un DSE n'est pas toujours somme d'une série entière sur $\mathbb{R}$ tout entier.

iii

Intégration et primitivation d'un DSE

Si f admet un DSE, alors ses dérivées successives (définies au voisinage de 0) aussi, et leurs DSE s'obtiennent par dérivation terme à terme, et de même pour les primitives de f. Au passage, on prendra garde à la constante d'intégration quand on primitive un DSE.

3.3

Définition (Série de Taylor)

On appelle *série de Taylor* d'une fonction f de classe C^∞ sur un intervalle $]-r,r[$ (où $r>0$), la série entière $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

3.c

Proposition (DSE et série de Taylor)

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0. La fonction f est développable en série entière en 0 si et seulement si elle coïncide avec la somme de sa série de Taylor au voisinage de 0.

3.a

Démonstration

$\square$

Exercice (Fonction non développable en série entière)

On considère la fonction

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{-\frac{1}{x^2}} \end{array},$$

que l'on prolonge par continuité en 0, en une application f.

1 Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et que pour tout entier n : $f^{(n)}(0)=0$.

2 En déduire que f n'est pas développable en série entière.

6

Comment montrer qu'une fonction (de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0) est développable en série entière ?

- Assez souvent, on peut utiliser la robustesse de cette notion, par opérations algébriques, intégration, dérivation.
- La série de Taylor de f suggère également un lien entre l'existence d'un DSE pour f et les formules de Taylor : de fait, f admet un DSE en 0 si et seulement si son reste intégral R_n converge simplement vers 0 sur un voisinage de 0 :

$$\exists r \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in]-r,r[, \quad \lim_{n\infty} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t = 0$$

  Bien sûr, l'inégalité de Taylor-Lagrange permet, dans certains cas, de prouver qu'une fonction admet un DSE. En revanche, la formule de Taylor-Young ne peut pas le permettre, car en général, une suite de fonctions de limites nulles en 0 ne converge pas simplement vers une fonction nulle sur un voisinage de 0.

  Cette méthode est assez technique, et à réserver aux cas délicats (sans garantie de succès).
- Nous verrons une autre méthode à garder en mémoire, la méthode de l'équation différentielle.

Exercice (Les fonctions à dérivées uniformément bornées admettent un DSE)

On considère une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $]-r,r[$ dans $\mathbb{C}$, où $r \in \mathbb{R}_+^*$.
On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $(n,t) \in \mathbb{N}\times]-r,r[$:

$$|f^{(n)}(t)| \leqslant M$$

Montrer qu'alors f est développable en série entière sur $]-r,r[$.

7

3.2. Exemples de développements en série entière

Voici des développements en série entière que vous devez connaître :

– La fonction exponentielle

$$\forall\, z \in \mathbb{C}, \quad e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

– Les fonctions hyperboliques

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

– Les fonctions circulaires

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

– La fonction arctangente

$$\forall\, x \in [-1,1], \quad \arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

– La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$

$$\forall\, x \in]-1,1], \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$$

– La fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ (où $\alpha \in \mathbb{R}$)

$$\forall\, x \in]-1,1[, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

où on a utilisé la notation (abusive et non connue de tous)

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!}$$

On notera que pour ce DSE, certaines valeurs de α conduisent à un domaine de validité contenant strictement $]-1,1[$.

Exercice (DSE à connaître)

1 Établissez ces résultats pour arctan et $x \mapsto \ln(1+x)$ sur $]-1,1[$.

2 (Plus difficile) Tenter d'établir que $\arctan(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 1^{2n+1}}{2n+1}$:

i Par un argument de continuité en 1.
ii Par un argument de convergence uniforme.
iii Par un argument de convergence dominée ou d'intégration terme à terme.
iv Par une formule de Taylor.
v Par des arguments pré bac.

3 Faire de même pour $\ln(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 1^n}{n}$.

8

Exercice (DSE explicite de la fonction arcsinus) 9

1 En appliquant la formule donnant le DSE de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ dans le cas où $\alpha = -1/2$, vérifier que

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} (-1)^n x^n$$

2

i En déduire que pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2n+1)4^n (n!)^2} x^{2n+1}$$

ii Vérifier que cette formule reste valable en -1 et 1.

3 En calculant de deux façons $\int_{[0,\frac{\pi}{2}]} \arcsin(\sin(t))\mathrm{d}t$, et en utilisant les intégrales de Wallis, calculer $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$, puis $\zeta(2)$.

3.3. La méthode de l'équation différentielle

Il existe une autre méthode, pour établir l'existence d'un DSE pour f, fondée sur l'unicité d'une solution à un problème de Cauchy :

(1) On trouve un problème de Cauchy dont f est (l'unique) solution sur un voisinage précis de 0, mettons $]-r_0, r_0[$.

(2) On cherche une solution à ce problème de Cauchy sous forme de somme de série entière.

(3) On vérifie que la série entière $\sum a_n z^n$ trouvée a bien un rayon de convergence R strictement positif.

(4) Par unicité de la solution à ce problème, f et la somme S de $\sum a_n z^n$ coïncident sur $]-r, r[$, où $r = \min\{r_0, R\}$, et f est donc développable en série entière en 0.

Exercice (Un résultat de cours par la méthode de l'équation différentielle) 10

Appliquer cette méthode pour montrer que $x \mapsto (1+x)^\alpha$ admet un DSE.

Exercice (Méthode de l'équation différentielle) 11

Soit f l'application définie sur $]-1,1[$ par $f(t) = \cos(\alpha \arcsin t)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

1 Former une équation différentielle linéaire du second ordre vérifiée par f.

2 Chercher les solutions de l'équation différentielle obtenue qui sont développables en série entière et vérifient $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

3 En déduire que f est développable en série entière sur $]-1,1[$, et donner son développement.

4. Feuille de TD 14 : Séries entières

4.1. Rayon de convergence d'une série entière, domaine de convergence

Exercice 1 (Détermination de rayon de convergence) 0

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes.
1 $\sum \frac{n!}{(2n)!}x^n$; $\sum \ln n x^n$; $\sum \frac{\sqrt{n}x^{2n}}{2^n+1}$.
2 $\sum \frac{(1+i)^n z^{3n}}{n.2^n}$; $\sum_n \frac{(-1)^n}{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}z^n$.
3 $\sum a^{\sqrt{n}}z^n$; $\sum z^{n^n}$; $\sum(\exp(1/n)-1)z^n$; $\sum \ln\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)z^n$
4 $\sum d_n z^n$ où d_n est le nombre de diviseurs de n.
5 (Mines) Soit $\theta, \alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer le RCV de $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}x^n$.

Exercice 2 (Rayon de convergence d'une série entière modifiée) 0

1 Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $\rho \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, telle que $a_n > 0$ pour tout entier n et soit $\alpha > 0$. Quel est le rayon de convergence de la série $\sum a_n^\alpha x^n$?
2 Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $\rho > 0$. Montrer que $\sum \frac{a_n}{n!}x^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$.
3 Soit R le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$. Comparer R avec les rayons de convergence des séries entières :

$$\sum a_n e^{\sqrt{n}} z^n \ ; \quad \sum a_n z^{2n} \ ; \quad \sum a_n z^{n^2}$$

4.2. Étude de la somme de séries entières

Exercice 3 (Calculs de sommes élémentaires) 0

Pour les séries entières suivantes, donner le rayon de convergence et exprimer leur somme en termes de fonctions usuelles :
1 $\sum \frac{n+2}{n+1}x^n$.
2 $\sum \frac{n^3}{n!}x^n$.
3 $\sum(-1)^{n+1}nx^{2n+1}$.

Exercice 4 (Série exponentielle tronquée) 0

Calculer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{3n}}{(3n)!}$ lorsque z est complexe.

Exercice 5 (Série entière et série harmonique) 1

Pour $n \geqslant 1$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et on s'intéresse à la série entière $\sum_{n\geqslant 1} H_n x^n$. On note R son rayon de convergence.

1 Montrer que $R = 1$.

2 On pose, pour $x \in]-1, 1[$, $F(x) = \sum_{n\geqslant 1} H_n x^n$.

i Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, on a

$$(1-x)F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

ii En déduire la valeur de $F(x)$ sur $]-1, 1[$.

3 On pose, pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \ln(n) x^n$$

Montrer que $G(x) \sim_{x\to 1^-} F(x)$.

Exercice 6 (Somme d'une série entière par la méthode de l'équation différentielle) 1

On pose $a_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad a_{n+1} = \frac{2n+3}{n+2} a_n$.

1 Donner le rayon de convergence R de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On note f sa somme.

2 Trouver une équation différentielle linéaire dont f est solution sur $]-R, R[$, puis déterminer f.

Exercice 7 (Rayon de convergence et somme d'une série entière) 2

Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière réelle $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$, où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \int_0^{\pi/2} \sin(t)^n \mathrm{d}t$.

Exercice 8 (Série entière dont le terme général est défini par une intégrale) 2

$a_n = \int_0^{\pi/4} \tan(t)^n \mathrm{d}t$.
On étudie la série entière $\sum a_n z^n$.

1 Donner le rayon de convergence R de cette série entière.

2 Y a-t-il convergence en 1 ? en -1 ?

3 Calculer $f(x)$ lorsque x appartient à l'intervalle ouvert de convergence.

Exercice 9 (Série entière dont le coefficient général suit une relation de récurrence) 2

Soit (a_n) la suite définie par $a_1 = 1$ et $a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$. Donner le domaine de définition et effectuer le calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ pour les valeurs de x qui rendent la série entière convergente.

Exercice 10 (Domaine de convergence d'une série entière) 2

1 Déterminer le domaine de convergence de la série entière $\sum z^{n^2}$.
2 Donner un équivalent de la somme en $1-$.

Exercice 11 (Somme d'une série entière par la méthode de l'équation différentielle) 2

On considère la suite réelle (u_n) définie par $u_0 = u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{2}{n+2} u_n,$$

la série entière $\sum_{n \geqslant 0} u_n x^n$, et on note R son rayon de convergence, S sa somme.
1 Déterminer R.
2 Former une équation différentielle linéaire du premier ordre satisfaite par S, et en déduire l'expression de S à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 12 (Étude au bord d'une série entière) 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 x^n \ln(1-x) \mathrm{d}x$.
1 Déterminer le rayon de convergence R de $\sum u_n x^n$.
2 Comportement en R ?

4.3. Développement en série entière

Exercice 13 (Développements élémentaires en série entière) 0

Développer en série entière au voisinage de 0 les fonctions suivantes. On précisera le rayon de convergence de la série entière obtenue.
1 $x \mapsto \ln(1+2x^2)$.
2 $x \mapsto \frac{1}{x-a}$ (où $a \in \mathbb{C}^*$).
3 $x \mapsto \ln(a+x)$ (où $a > 0$).
4 $x \mapsto \frac{e^x}{1-x}$.
5 $x \mapsto \ln(1+x-2x^2)$.
6 $x \mapsto \ln(1+x+2x^2)$.
7 $x \mapsto (4+x^2)^{-3/2}$.
8 $x \mapsto \frac{x^2+x-3}{(x-2)^2(2x-1)}$.

Exercice 14 (Fonction développable en série entière nulle sur le cercle unité) 2

Soit f une fonction complexe, continue sur disque unité fermé D' et nulle sur le cercle unité. On suppose que $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. Montrer que $f = 0$.

Exercice 15 (Relation intégrale entre deux fonctions développables en séries entières) 2

On considère une suite réelle bornée $(a_n)_{n\geqslant 1}$. Pour $x \in]-1,1[$, on pose $f(x) = \sum_{n\geqslant 1} a_n x^n$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n.$$

Montrer que pour tout $x > 1$:

$$\frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} g(t) \mathrm{d}t.$$

Exercice 16 (Développement en série entière d'une fonction par intégration) 2

1 Développer $f\ : t \mapsto \arctan(1+t)$ en série entière au voisinage de 0.
2 Développer en série entière au voisinage de 0 la fonction $F\ : t \mapsto \int_{-\infty}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t^4+t^2+1}$.

Exercice 17 (Fonction définie par radicaux développable en série entière) 3

1 Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$ est développable en série entière en 0, et calculer le rayon de convergence et les coefficients de cette série entière.
2 Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{1+x+x^2}$ est développable en série entière en 0, et déterminer le rayon de convergence.

Exercice 18 (Développement en série entière d'une exponentielle d'une série entière) 4

(Mines-Ponts PSI 10) On note, pour $x \in \mathbb{R}$, et sous réserve d'existence :

$$f(x) = \exp\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}\right).$$

1 Quel est l'ensemble de définition D de f ?
2 Montrer que f est continue sur D.
3 Montrer que f est développable en série entière en 0 et déterminer le rayon de ce DSE en 0.

Exercice 19 (Développement en série entière et calcul des coefficients) 5

Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| < 1$.
Montrer que l'application $f\ : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ donnée par :

$$\forall\, z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(a^n z)$$

est définie sur $\mathbb{C}$, développable en série entière en 0, et déterminer le rayon et les coefficients de ce DSE en 0.

5. Oraux

Exercice 20 (Un développement en série entière (CCP PSI 08)) 3

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $f\ : x \mapsto \ln\left(1 - 2x\cos(\theta) + x^2\right)$. Développer f en série entière en 0 et donner le rayon de convergence de cette série.

Exercice 21 (Détermination délicate de rayon de convergence) 3

(Mines-Ponts PSI 10) Soit $F\ : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \int_0^x \sin(t^2)\mathrm{d}t$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin(t^2)\mathrm{d}t$.
1 Montrer que la série de terme général a_n est convergente.
2 Montrer que F admet une limite en $+\infty$.
3 Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général $a_n x^n$.

Exercice 22 (Minoration d'un rayon de convergence (Mines-Ponts PSI 10)) 3

1 Montrer que la série de terme général $1/(1+k^2)$ converge.
2 Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{1+k^2}$. Montrer que le rayon de la série entière de terme général $a_n x^n$ est $\geqslant 1$.

Exercice 23 (Combinatoire et séries entières (CCP MP 13)) 3

Soit $(d_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $d_0 = 1, d_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $d_{n+1} = n(d_n + d_{n-1})$.
1 Montrer que, pour $n \geqslant 2$, $n!/3 \leqslant d_n \leqslant n!$. En déduire le rayon de convergence de $S\ : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n$.
2 Montrer que S est solution de l'équation différentielle $(1-x)y' - xy = 0$.
3 Exprimer S à l'aide de fonctions usuelles. Exprimer d_n en fonction de n.

Exercice 24 (Équation fonctionnelle et série entière (CCP MP 13)) 3

Soient $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(ax)$.
1 Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2 Exprimer $f^{(n)}$ en fonction de f. En déduire $f^{(n)}(0)$.
3 Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général $\frac{1}{n!} a^{(n-1)n/2} x^n$.
4 On suppose $a \in]0, 1[$.
  i Soit $g : x \mapsto \sum_{n\geqslant 0} \frac{a^{(n-1)n/2}}{n!} x^n$. Montrer que g est définie, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(ax)$.
  ii Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(ax)$. Montrer que f est nulle.
  iii Déterminer l'ensemble des $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(ax)$.

Exercice 25 (Détermination d'un rayon de convergence (Mines d'Alès)) 3

Pour n dans $\mathbb{N}$, soit $I_n = \int_1^e (\ln x)^n \mathrm{d}x$.
1 Montrer que (I_n) converge vers une limite à préciser.
2 Nature des séries $\sum (-1)^n I_n, \sum I_n^\alpha$ où $\alpha > 0$.
3 Rayon de convergence de $\sum I_n x^n$.

Exercice 26 (Équivalent en 1 de la somme d'une série entière (TPE MP 13)) 3

1 Donner l'ensemble de définition de $\Phi\ : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}$.
2 Donner un équivalent de $\Phi(x)$ lorsque x tend vers 1.

Exercice 27 (DSE et application au calcul de la somme d'une série (TPE 13)) 3

Pour x dans $]-1, 1[$, soit $f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.
1 Trouver une équation différentielle linéaire d'ordre 1 dont f est solution. En déduire le développement en série entière de f sur $]-1, 1[$.
2 Calculer $1 + \frac{2.4}{2^2.1.3} + \frac{2.4.6}{2^3.1.3.5} + \dots$.

Exercice 28 (Série entière et suite de Fibonacci (CCP MP 13)) 3

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
1 Exprimer u_n en fonction de n.
2 Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière de terme général $u_n z^n$.

Exercice 29 (Un DSE avec du logarithme (CCP MP 13)) 3

Soit $f : x \mapsto \ln(x^2 - 5x + 6)$.
1 Déterminer le domaine de définition de f.
2 Développer f en série entière au voisinage de 0 en précisant l'intervalle maximal de convergence.

Exercice 30 (Somme d'une série entière) 3

Rayon de convergence et somme de $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{(-1)^n n} x^n$.

Exercice 31 (Somme d'une série entière (ENSEA)) 3

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $a_0 = a_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{a_n}{n+2}$.
1 Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant a_n \leqslant n^2$.
2 Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$. Déterminer le domaine de définition de f. Donner une équation différentielle vérifiée par f et en déduire une expression simple de f.

Exercice 32 (Encore un rayon de convergence (CCP MP 13)) 3

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \mathrm{d}t$.

1 Déterminer la limite de (a_n).

2 Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général $a_n x^n$.

Exercice 33 (Étude au bord d'une série entière (CCP MP 13)) 3

Soit $S : x \mapsto \sum_{n\geqslant 1} x^n \sin(1/\sqrt{n})$.

1 Déterminer le rayon de convergence de S.

2 Déterminer le comportement de S au bord de l'intervalle de convergence.

3 Montrer que la somme est continue sur $[-1, 1[$.

4 Montrer que $x \mapsto \sum_{n\geqslant 2} \left(\sin(1/\sqrt{n}) - \sin(1/\sqrt{n-1})\right) x^n$ converge normalement sur $[-1, 1]$. En déduire la limite de $(1-x)\, S(x)$ quand $x \to 1^-$.

Exercice 34 (Minoration du rayon de convergence d'une série entière (Télécom Sud Paris)) 3

1 Montrer que $\tan^{(n)}$ est un polynôme à coefficients entiers en tan.

2 Montrer que la série entière de terme général $\frac{\tan^{(n)}(0)}{n!}\, x^n$ converge sur $]-\pi/2, \pi/2[$.

Exercice 35 (Développements en série entière) 3

1 (CCP) Soit $f : x \mapsto \int_0^\pi \cos(x\cos\theta)\mathrm{d}\theta$.

i Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

ii Si $x \in \mathbb{R}$, calculer $x\, f''(x) + f'(x) + x\, f(x)$.

iii La fonction f est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ?

2 (CCP) Soit $f : x \mapsto e^{x^2/2} \int_x^{+\infty} e^{-t^2/2}\mathrm{d}t$.

i Déterminer le domaine de définition D de f. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.

ii Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0 et expliciter son développement.

3 (ENSAM) Soit $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{\mathrm{ch}(t)}\mathrm{d}t$. Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Développer F en série entière au voisinage de 0 et préciser le rayon de convergence.

CHAPITRE XV

Variables aléatoires discrètes

Sommaire

Ce chapitre sur les probabilités prolonge celui de MPSI, en passant du cas fini au cas (au plus) dénombrable.

Le formalisme s'appuiera sur le langage ensembliste et les familles sommables, que je vous invite à revoir si vous n'êtes pas encore au point. Il faut aussi être au point sur le cours de dénombrement.

Par variable aléatoire, nous entendrons variable aléatoire discrète.

Dans tout le chapitre, on se fixe un univers probabilisé (Ω, P).

Dans la suite, X, Y, X_1, X_2 etc. désigneront des variables aléatoires sur Ω (définitions à venir).

1. Espaces probabilisés

1.1. Notion de tribu. Probabilité sur un ensemble

Définition (Tribu)

On appelle *tribu* sur l'ensemble Ω, toute partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ telle que

(1) $\Omega \in \mathcal{A}$.

(2) $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire (dans Ω) : pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$.

(3) $\mathcal{A}$ est stable par union dénombrable : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{A}$, alors l'union $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ appartient à $\mathcal{A}$.

Un couple $(\Omega, \mathcal{A})$, où $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω, est appelé *espace probabilisable*.
Les éléments de $\mathcal{A}$ sont appelés *événements*.

1.a

On dit aussi parfois que les événements sont les parties *mesurables*, ou *observables*, de Ω.

Bien sûr, si $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω, alors $\emptyset \in \mathcal{A}$, et $\mathcal{A}$ est stable par union finie, par intersection au plus dénombrable et par différence ensembliste.

Exemple (Tribu)

(1) $\{\emptyset, \Omega\}$ est une tribu sur Ω (peu intéressante il est vrai), appelée *tribu grossière*, ou *tribu triviale*.

(2) $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu sur Ω, appelée parfois *tribu discrète*. C'est souvent celle que l'on considère lorsque Ω est au plus dénombrable.

i

Notion de tribu engendrée (hors programme)

On pourrait définir la notion de *tribu engendrée* par une famille de parties de Ω, ou par un ensemble de parties de Ω, comme la plus petite tribu, au sens de l'inclusion, possédant les termes de la famille ou contenant cet ensemble.
On montre son existence en observant qu'une intersection de tribus est une tribu.
Par exemple, si A est une partie de Ω, la tribu engendré par A est $\{\emptyset, \Omega, A, \Omega \setminus A\}$.
On peut remarquer que la tribu sur Ω engendrée par les singletons n'est pas toujours $\mathcal{P}(\Omega)$: en effet, cette tribu est constituée des parties de Ω qui sont au plus dénombrables, ou dont le complémentaire dans Ω est au plus dénombrable : ce n'est pas $\mathcal{P}(\Omega)$ si Ω est infini non dénombrable.

1.1

Définition (Événement élémentaire)

On appelle *événement élémentaire* tout singleton appartenant à $\mathcal{A}$.

1.b

Définition (Événement impossible, événement certain)

$\emptyset$ est appelé *événement impossible*, et Ω est appelé *événement certain*.

1.c

Définition (Événement contraire, conjonction et disjonction) 1.d

Si A est un événement, son événement *contraire* est son complémentaire (dans Ω). On le notera $\overline{A}$, et on le nommera « non A ».
Si A et B sont deux événements, on définit les événements « A et B » et « A ou B », correspondant respectivement à $A \cap B$ et $A \cup B$.
A et B sont dits *incompatibles* s'ils sont disjoints.

À ce stade, on peut voir le langage probabiliste comme un nouveau vocabulaire pour des opérations ensemblistes, proche du registre logique. D'ailleurs, l'inclusion $A \subset B$ entre deux événements pourra se lire « A implique B » dans le langage probabiliste.

Définition (Probabilité) 1.e

Une *probabilité* sur un ensemble probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$ est une application P définie sur $\mathcal{A}$, à valeurs dans $[0,1]$, telle que

(1) $P(\Omega) = 1$.

(2) *(σ-additivité)* Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements deux à deux disjoints :
$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

Si P est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$, on dit que $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un *espace probabilisé*.

Il faut bien comprendre que $(\Omega, \mathcal{A})$ admet plusieurs et même une infinité de probabilités, sauf dans le cas sans intérêt probabiliste où $\mathcal{A}$ est la tribu triviale $\{\emptyset, \Omega\}$. Le choix d'une probabilité relève de la personne qui modélise, dans ce registre probabiliste, une situation concrète. Vous n'aurez pas à effectuer cette étape de modélisation dans les épreuves de concours (du moins en maths).

Dorénavant, sauf mention contraire, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé.

Définition (Événements négligeables, événements presque sûrs) 1.f

Un événement A est dit *négligeable* (resp. *presque sûr*) si $P(A) = 0$ (resp. $P(A) = 1$).

Bien sûr, $\emptyset$ est négligeable, et Ω est presque sûr, mais ce ne sont pas toujours les seuls événements de ce type.

En admettant provisoirement certaines propriétés énoncées dans la proposition 1.b ci-après, on a :

Proposition (Se donner une probabilité) 1.a

Si Ω est fini ou dénombrable et si $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, une probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{A})$ correspond à la donnée, via la formule
$$P(\{\omega\}) = p_\omega,$$
d'une famille $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ de réels positifs sommable de somme 1.

Démonstration

□

Exercice (Donner une probabilité sur les événements élémentaires)

1 Soit $p \in]0,1[$. Déterminer la valeur du réel s afin que la famille $(s(1-p)^{k-1})_{k\in\mathbb{N}^*}$ définisse une probabilité sur $\mathbb{N}^*$.
2 Peut-on définir une probabilité sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ de sorte que chaque événement élémentaire soit équiprobable ?

1

1.2. Propriétés élémentaires des probabilités

Proposition (Propriétés des probabilités)

(1) $P(\emptyset) = 0$.

(2) *(additivité finie)* Pour tous événements $A_1, \dots, A_n$ *incompatibles deux à deux,*

$$P(\cup_{1\leqslant i\leqslant n} A_i) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

(3) Pour tout événement A, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

(4) Pour tous événements A et B,

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B).$$

(5) P est une application croissante (pour l'ordre d'inclusion dans $\mathcal{A}$ et l'ordre usuel sur $[0,1]$), *i.e.* pour tous événements A et B :

$$A \subset B \Rightarrow P(A) \leqslant P(B).$$

1.b

Démonstration

□

Ainsi, A est négligeable si et seulement si $\overline{A}$ est presque sûr.

Exercice (Sous-additivité finie) — 2

1 Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une famille d'événements. Montrer l'inégalité suivante (*sous-additivité finie*) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P\left(\bigcup_{1\leqslant k\leqslant n} A_k\right) \leqslant \sum_{1\leqslant k\leqslant n} P(A_k).$$

2 En déduire que si A, B et C sont trois événements équiprobables vérifiant $P(A\cap B\cap C) = 0$, alors $P(A) \leqslant \frac{2}{3}$.

Proposition (Continuité croissante) — 1.c

Si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'événements croissante pour l'inclusion, alors :

$$P(A_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right).$$

Démonstration

On se place dans une telle situation. Posons $B_0 = A_0$ et, pout tout $n \in \mathbb{N}$:

$$B_{n+1} = A_{n+1} \setminus A_n$$

On vérifie que pour tout $N \in \mathbb{N}$, $A_n = \bigcup_{0\leqslant i\leqslant n} B_i$ et que $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \bigcup_{1\in\mathbb{N}} B_i$. De plus, les B_i sont incompatibles deux à deux. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P(A_n) = \sum_{0\leqslant i\leqslant n} P(B_i) \leqslant \sum_{i\in\mathbb{N}} P(B_i) = P\left(\bigcup_{1\in\mathbb{N}} B_i\right) = P\left(\bigcup_{1\in\mathbb{N}} A_i\right)$$

d'où le résultat. □

Cette proposition n'est pas sans rappeler le théorème de convergence dominée [1] (dans le cas d'une suite croissante de fonctions continues par morceaux positives, convergeant simplement vers une fonction intégrable).

En utilisant le passage au complémentaire, on en déduit immédiatement :

Proposition (Continuité décroissante) — 1.d

Si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'événements décroissante pour l'inclusion, alors :

$$P(A_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right).$$

Proposition (Sous-additivité) — 1.e

Si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'événements, alors :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

1. Ou plus précisément le théorème de convergence monotone.

Démonstration

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P\left(\bigcup_{0 \leqslant i \leqslant n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=0}^{n} P(A_i) \leqslant \sum_{i=0}^{\infty} P(A_i)$$

(d'après la première question de 2) et on conclut par continuité croissante.

□

Corollaire (Réunion d'événements négligeables) 1.f

Une réunion finie ou dénombrable d'événements négligeables est négligeable.

Par passage au complémentaire, une intersection au plus dénombrable d'événements presque sûrs est presque sûre.

Définition (Système complet d'événements) 1.g

On appelle *système complet d'événements* toute partition au plus dénombrable de Ω par des événements, c'est-à-dire toute famille au plus dénombrable d'événements deux à deux incompatibles, dont la réunion égale Ω.

Exemple (Système complet d'événements) ii

Si les singletons sont des événements, et si Ω est au plus dénombrable, alors $(\{\omega\})_{\omega \in \Omega}$ est un système complet d'événements.

Proposition (Formule des probabilités totales) 1.g

Soit $(A_i)_{i \in I}$ un système complet d'événements. Pour tout événement B, on a :

$$P(B) = \sum_{i \in I} P(B \cap A_i).$$

Démonstration

□

2. Probabilités conditionnelles et indépendance

2.1. Probabilités conditionnelles

On cherche souvent à déterminer des probabilités en connaissant des informations supplémentaires, par exemple la probabilité que l'on soit admissible à l'ECP sachant que l'on a eu mention très bien au Bac (et qu'on est en Spé). C'est l'objet des probabilités *conditionnelles*.

Définition (Probabilité conditionnelle)

Soit A et B deux événements. On suppose que $P(B) > 0$ (on dira alors que l'on peut *conditionner par* B). On appelle *probabilité (conditionnelle)* de A sachant B et on note $P_B(A)$ ou $P(A|B)$ le réel

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

2.a

Probabilité conditionnelle : approche heuristique fréquentiste

Comme l'indique la terminologie, $P(A|B)$ doit nous donner la probabilité que l'événement A se réalise sachant que B s'est réalisé. Prenons le cas d'une probabilité uniforme, comme pour deux lancers d'un dé, pour lequel $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$ et où tous les événements élémentaires sont équiprobables. Supposons que nous cherchions la probabilité que l'on obtienne 8 ou plus en lançant deux fois un dé (événement A) sachant que l'on a obtenu au moins 4 au premier lancer (événement B). On regarde donc, dans le sous-univers $\Omega' = \{(l_1, l_2) \in [\![1, 6]\!]^2, l_1 \geqslant 4\}$ de Ω l'événement $A' =$« on a obtenu 8 ou plus », *i.e.*

$$A' = \{(4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

La fréquence de l'évenement A' dans l'univers Ω' est $\frac{\mathrm{Card}(A')}{\mathrm{Card}(\Omega')}$, soit ici $\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$. À y regarder de plus près, on a $A' = A \cap B$ et $\Omega' = B$, d'où la justification heuristique de cette définition dans le cas d'une probabilité uniforme.

2.1

L'application P_B est une probabilité

On vérifie facilement (en revenant à la définition) que l'application P_B est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$. En revanche, la notation $P(A|B)$ ne signifie nullement que « $A|B$ » soit un événement, *i.e.* un élément de $\mathcal{A}$ (reprendre la remarque précédente pour s'en convaincre). En particulier, on ne confondra pas la probabilité que A se réalise sachant que B l'est et la probabilité que les événements A et B se réalisent.

2.2

Exercice (Lorsque $P_B = P_{B'}$)

On considère deux événements B et B' de probabilités non nulles. Caractériser le fait que $P_B = P_{B'}$.
Réponse : $B \setminus B'$ et $B' \setminus B$ sont néligeables.

3

Soit A et B deux événements, où $P(B) > 0$. La formule (évidente)

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

permet tout d'abord d'écrire une version plus éclairante de la formule des probabilités totales, lorsque les événements ne sont pas négligeables :

Proposition (Formule des probabilités totales, version avec conditionnement)

Soit $(A_i)_{i \in I}$ un système complet d'événements non négligeables. Pour tout événement B, on a :

$$P(B) = \sum_{i \in I} P(B|A_i)P(A_i)$$

2.a

Elle peut également se généraliser en :

Proposition (Formule des probabilités composées)

Soit $A_1, \ldots, A_n$ des événements tels que $P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$. On a :
$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

2.b

Démonstration

$\square$

Exercice (Formule des probabilités composées)

On considère une urne contenant 4 boules blanches et 3 boules noires. On tire une à une et sans remise 3 boules de l'urne. Quelle est la probabilité pour que la première boule tirée soit blanche, la seconde blanche et la troisième noire ?
Réponse : $\frac{6}{35}$.

4

Voici encore une formule algébriquement évidente, mais dont la signification ne l'est pas :

Proposition (Première formule de Bayes)

Si A et B sont deux événements tels que $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$, alors
$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}.$$

2.c

Cette formule est intéressante dans la mesure où elle permet de « remonter le temps » : pour reprendre l'exemple du lancer de deux dés, elle nous permet de connaître la probabilité que l'on ait obtenu 4 ou plus au premier lancer sachant que l'on a obtenu 8 ou plus au total, ou, pour reprendre l'exemple de l'étudiant en Spé, la probabilité que l'on ait eu une mention très bien sachant qu'on a été admissible à l'ECP.

Cette « inversion », parfois appelée *formule de probabilité des causes*, peut aussi se généraliser à plusieurs événements :

Proposition (Seconde formule de Bayes)

Si $(A_i)_{i \in I}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles et si B est un événement de probabilité non nulle, alors pour tout $j \in I$:
$$P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{\sum_{i \in I} P(B|A_i)P(A_i)}$$

2.d

Exercice (Gens à lunettes)

On compte dans une population 45% d'hommes et 55% de femmes. Un homme sur trois porte des lunettes, et une femme sur cinq porte des lunettes.
Quelle est la probabilité qu'une personne portant des lunettes soit une femme ?
Réponse : $\frac{11}{26}$.

5

2.2. Indépendance d'événements

Définition (Couple d'événements indépendants)

Soit (A, B) un couple d'événements. On dit que (A, B) est un *couple d'événements indépendants* (ou que A et B sont *indépendants*) si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

2.b

Indépendance de deux événements

- A et B sont indépendants si et seulement si $\overline{A}$ et B sont indépendants.
- Il n'y a donc pas de lien entre indépendance et incompatibilité (aucune de ces propriétés n'entraîne l'autre). Cependant, deux événements incompatibles sont indépendants si et seulement si l'un (au moins) est de probabilité nulle.
- Si par exemple $P(B) \neq 0$, alors l'indépendance de A et B équivaut à ce que $P(A|B) = P(A)$. Intuitivement, cela signifie que la réalisation (ou non) de B n'influe en rien sur celle de A (et réciproquement).

2.3

On souhaite généraliser la notion d'indépendance à une famille d'événements. On propose

Définition (Indépendance mutuelle d'une famille d'événements)

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements. On dit que $(A_i)_{i \in I}$ est une *famille d'événements (mutuellement) indépendants* (ou que les événements A_i, où i parcourt I, sont *(mutuellement) indépendants*, ou *indépendants dans leur ensemble*) si, pour toute partie finie F de I,

$$P\left(\bigcap_{i \in F} A_i\right) = \prod_{i \in F} P(A_i).$$

2.c

Bien sûr, il n'y a rien à vérifier dans le cas où F est vide ou est un singleton.

Exemple (Indépendance (mutuelle) de trois événements)

A_1, A_2, A_3 sont mutuellement indépendants signifie que

(1) $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2), P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3), P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3)$, *i.e.* A_1, A_2, A_3 sont deux à deux indépendants.

(2) $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$.

Pour quatre événements A_1, A_2, A_3, A_4, il faut, pour vérifier leur indépendance mutuelle, vérifier entre autres que

$$P(A_1 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1)P(A_2)P(A_4)$$

i

Sous-famille d'une famille d'événements indépendants

Toute sous-famille d'une famille d'événements mutuellement indépendants est une famille d'événements mutuellement indépendants. 2.4

Indépendance de n événements

- L'indépendance de $A_1, \dots, A_n$ **ne se caractérise pas par**

$$P\left(\bigcap_{i\in[\![1,n]\!]} A_i\right) = \prod_{i\in[\![1,n]\!]} P(A_i).$$

  En effet, cette dernière relation serait toujours vérifiée si par exemple A_n était l'événement impossible, et elle ne dirait alors rien du lien entre les autres événements. Cette dernière condition est seulement nécessaire, pas suffisante (si $n \geqslant 3$).
- L'indépendance de $A_1, \dots, A_n$ **ne se caractérise pas par** l'indépendance deux à deux des événements $A_1, \dots, A_n$. En effet, en supposant seulement cette dernière propriété, rien ne permettrait de déduire la relation pourtant légitime en cas d'indépendance 2.5

$$P\left(\bigcap_{i\in[\![1,n]\!]} A_i\right) = \prod_{i\in[\![1,n]\!]} P(A_i).$$

  L'indépendance deux à deux est une condition nécessaire non suffisante de l'indépendance (mutuelle) de $A_1, \dots, A_n$.

Dans le cas où les A_i ont des probabilités toutes non nulles, on peut réexprimer l'indépendance en termes de probabilités conditionnelles, se traduisant informellement par : pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, la réalisation de tout ou partie des autres événements A_j ($j \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}$) n'influe en rien sur celle de A_i.

Exercice (Indépendance et boule tricolore)

On considère une urne contenant quatre boules : une rouge, une verte, une bleue et une tricolore (bleue, verte, rouge). On tire une boule, on note Ω l'univers $\{bleue, verte, rouge, tricolore\}$, et on considère les événements « la boule tirée contient du rouge », « la boule tirée contient du vert », et « la boule tirée contient du bleu » notés respectivement R, V et B. Vérifier que ces événements sont indépendants deux à deux mais pas dans leur ensemble. 6

3. Variables aléatoires discrètes

3.1. Variables aléatoires, vecteurs aléatoires

Définition (Variable aléatoire discrète)

Étant donnés un ensemble E et un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, une *variable aléatoire discrète* (en abrégé une v.a. ou une v.a.d.) définie sur Ω est une application X de Ω dans E telle que

(1) $X(\Omega)$ soit fini ou dénombrable. 3.a

(2) pour tout x de $X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{A}$. L'événement $X^{-1}(\{x\})$ sera noté $(X = x)$.

Lorsque $E \subset \mathbb{R}$, la variable aléatoire est dite *réelle*.

On a

$$(X = x) = X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) = x\}$$

Soit $X\ :\Omega \to E$ une variable aléatoire. X confère naturellement à E une structure d'espace probabilisé :

Définition (Loi d'une variable aléatoire)

Pour tout $x \in X(\Omega)$, notons

$$p_x = P(X^{-1}(\{x\})) = P(\{\omega \in \Omega, X(\omega) = x\}).$$

La famille $(p_x)_{x\in X(\Omega)}$ définit une probabilité P_X sur $X(\Omega)$, appelée *loi de la variable aléatoire* X. On dit alors que X *suit* la loi P_X.
En fait, on étend sans difficulté cette probabilité sur $(E, \mathcal{P}(E))$, en posant, pour toute partie A de E

$$P_X(A) = P(\{\omega \in \Omega, X(\omega) \in A\} = P_X(A \cap X(\Omega))$$

On notera $X \sim Y$ lorsque les v.a. X et Y suivent la même loi, et $X \sim \mathcal{L}$ ou $X \hookrightarrow \mathcal{L}$ lorsque X suit la loi $\mathcal{L}$.

3.b

Si $X\ :\Omega \to E$ est une v.a., et si A est une partie de E, alors on vérifie que $X^{-1}(A)$, *i.e.* $\{\omega \in \Omega, X(\omega) \in A\}$ est un événement, et on le note $(X \in A)$:

Dans le cas particulier où X est une v.a. réelle, pour tout réel x, nous noterons respectivement $(X \geqslant x)$, $(X \leqslant x)$, $(X > x)$ et $(X < x)$ les événements

$$X^{-1}([x, +\infty[),\ X^{-1}(]-\infty, x]),\ X^{-1}(]x, +\infty[),\ X^{-1}(]-\infty, x[)$$

c'est-à-dire

$$\{\omega \in \Omega, X(\omega) \geqslant x\},\ \{\omega \in \Omega, X(\omega) \leqslant x\},\ \{\omega \in \Omega, X(\omega) > x\},\ \{\omega \in \Omega, X(\omega) < x\}.$$

Deux v.a. de même loi ne sont pas toujours égales

Si on modélise le lancer de deux dés équilibrés en travaillant sur $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$, par des variables aléatoires $X\ :\Omega \to [\![1, 6]\!]$ et $Y\ :\Omega \to [\![1, 6]\!]$, alors ces deux v.a. suivent la loi uniforme sur $[\![1, 6]\!]$, mais ne sont pas égales pour autant.

3.1

En fait, la loi d'une v.a. X est une information intermédiaire entre la donnée de la v.a. (*i.e.* de l'application $X\ :\Omega \to E$), et l'image de la v.a., qui ne nous donne que les valeurs prises par X.

D'un point de vue probabiliste, ces deux informations sont peu pertinentes : la première donne une importance trop grande à Ω, que l'on n'explicite en pratique jamais, la seconde ne nous permet pas de savoir la fréquence avec laquelle on atteint telle ou telle valeur, et est donc trop imprécise.

La donnée pertinente consiste en la donnée conjointe :

(1) de l'ensemble des valeurs prises par X.

(2) pour chacune de ces valeurs x, de la *mesure* de l'ensemble de ses antécédents, autrement dit de $P(X = x)$.

Deux v.a. de même loi n'ont pas toujours même image

Deux v.a. de même loi n'ont pas toujours même image, puisque l'une, mettons X, peut prendre une valeur x que l'autre ne prend pas, et telle que $X^{-1}(\{x\})$ soit négligeable.

3.2

On utilisera sans trop de considérations théoriques les notations $X+Y$ (si une addition est définie dans E), XY (si une multiplication est définie dans E), $f(X)$ (où f est une fonction de source E), et même $X=Y$ (qui est l'événement $\{\omega \in \Omega, X(\omega)=Y(\omega)\}$).

3.2. Variables aléatoires indépendantes

On se fixe ici deux variables aléatoires X et Y, sur E et F respectivement.

Définition (Loi conjointe, lois marginales de (X,Y))

On appelle *loi conjointe* de (X,Y) et on note $P_{(X,Y)}$ l'application donnée par :

$$\forall (x,y) \in E \times F, \quad P_{(X,Y)}(x,y) = P(X=x \text{ et } Y=y).$$

P_X et P_Y sont appelées *lois marginales* de (X,Y).

3.c

Supposons E et F de cardinaux respectifs m et n. $P_{(X,Y)}$ est alors donné par les nm scalaires

$$p_{i,j} \overset{def}{=} P((X,Y)=(x_i,y_j)),$$

que l'on peut fournir dans un tableau

$X \backslash Y$	y_1	$\dots$	y_n
x_1	$p_{1,1}$	$\dots$	$p_{1,n}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
x_m	$p_{m,1}$	$\dots$	$p_{m,n}$

Tous les coefficients sont positifs ou nuls, et leur somme vaut 1.

La loi marginale de X (resp. Y) est ici obtenue en sommant les colonnes (resp. les lignes) de ce tableau.

Il faut noter qu'*a priori*, les lois marginales ne déterminent pas la loi conjointe (elles nous donnent $m+n$ équations pour ces mn inconnues).

Bien entendu, la donnée de ce tableau permet de trouver la valeur de $P(X \in A \text{ et } Y \in B)$, pour tout $(A,B) \in \mathcal{P}(X(\Omega)) \times \mathcal{P}(Y(\Omega))$.

Définition (Loi conditionnelle de Y sachant $(X=x)$.)

Soit $x \in X(\Omega)$. On suppose $P(X=x)>0$. On appelle *loi conditionnelle de Y sachant $X=x$* l'application donnée par :

$$P(Y=y|X=x) = \frac{P(X=x \text{ et } Y=y)}{P(X=x)} = \frac{P_{(X,Y)}(x,y)}{P_X(x)}.$$

3.d

Encore une fois, le tableau précédent fournit facilement ces lois conditionnelles.

On étend aisément cette définition de loi conditionnelle au conditionnement par $X>x$ ou autres inégalités.

Exercice (Loi conjointe)

On tire avec remise deux fois un jeton, dans une urne contenant quatre jetons numérotés de 1 à 4. On note X et Y les résultats des premier et second tirages respectivement, et $Z=\max(X,Y)$.

1 Donner la loi conjointe de (X,Y), les lois conditionnelles.

2 Même question pour (X,Z).

7

On étend sans difficulté ces notions au cas d'un n-uplet de variables aléatoires.

Définition (Couple de variables aléatoires indépendantes) 3.e

On dit que les variables X et Y sont *indépendantes* si pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$
$$P((X, Y) = (x, y)) = P(X = x)P(Y = y)$$

X et Y sont indépendants si et seulement si pour tout $(A, B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$,

$$P((X, Y) \in A \times B) = P(X \in A)P(Y \in B)$$

Lorsque X et Y sont indépendantes, les lois marginales permettent de retrouver la loi conjointe.

Lorsque X et Y sont à valeurs dans des ensembles finis, X et Y sont indépendants si et seulement si la matrice ci-dessus est de rang 1.

Définition (Variables aléatoires mutuellement indépendantes) 3.f

On dit que les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont *mutuellement indépendantes*, ou que la famille $(X_1, \dots, X_n)$ est une *famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes*, si pour tout $(x_i) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$, on a :

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i).$$

Proposition (Variables mutuellement indépendantes) 3.a

Si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, alors pour tout $(A_1, \dots, A_n) \in \prod_{i=1}^{n} \mathcal{P}(X_i(\Omega))$, les événements $(X_i \in A_i)$ sont mutuellement indépendants.

Démonstration

□

La réciproque est évidemment vraie.

Corollaire (Sous-famille d'une famille finie de v.a. indépendantes) 3.b

Toute sous-famille d'une famille finie $(X_1, \dots, X_n)$ de variables aléatoires indépendantes est une famille de variables aléatoires indépendantes.

Démonstration

□

Définition (Famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes) 3.g

On dit que les variables aléatoires X_i, où $i \in I$, sont *mutuellement indépendantes*, ou que la famille $(X_i)_{i\in I}$ est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes, si pour toute partie finie F de I, les variables aléatoires X_i, $i \in F$ le sont.
Dans le cas où toutes ces variables aléatoires sont en outre de même loi, on dira que ce sont des *variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées* (abréviation v.a.i.i.d.).

Cette définition est compatible avec la précédente grâce au corollaire.

Définitions de l'indépendance mutuelle, cas des événements et des v.a. (facultative) 3.3

La définition de l'indépendance mutuelle de $X_1, \dots, X_n$ semblait différer de celle de n événements $A_1, \dots, A_n$, en ce que l'une mentionnait chaque X_i, $i \in [\![1, n]\!]$, tandis que l'autre exigeait une propriété *pour toute partie finie F de* $[\![1, n]\!]$. Ce qui précède montre qu'en fait les deux points de vue dans ces définitions sont cohérents.
En fait, si on voulait calquer l'indépendance mutuelle des événements $A_1, \dots A_n$ sur la définition de l'indépendance mutuelle de $X_1, \dots, X_n$, il suffit d'observer que les événements $A_1, \dots, A_n$ sont indépendants si et seulement si, pour toute famille $(B_1, \dots, B_n)$ d'événements, où pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $B_i \in \{A_i, \overline{A_i}\}$, on a :

$$P\left(\bigcap_{i\in[\![1,n]\!]} B_i\right) = \prod_{i\in[\![1,n]\!]} P(B_i).$$

Cela revient d'ailleurs à l'indépendance mutuelle des variables aléatoires $\chi_{A_1}, \dots, \chi_{A_n}$.

Proposition (Fonctions de variables indépendantes) 3.c

Si X et Y sont indépendantes, alors les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ le sont aussi.

Démonstration

□

Ce résultat s'applique notamment au cas classique où $X = (X_1, \dots, X_p)$ et $Y = (X_{p+1}, \dots, X_n)$, et lorsque X_1, …, X_n sont mutuellement indépendantes.

Comme pour les événements, on ne confondra pas l'indépendance mutuelle et l'indépendance deux à deux.

On modélise souvent une succession d'expériences aléatoires indépendantes par une suite (finie ou non) (X_i) de variables aléatoires indépendantes. De plus, ces variables aléatoires sont souvent *identiquement distribuées*, *i.e.* de même loi : c'est le cas par exemple lorsqu'on réitère plusieurs fois la même expérience, comme lancer un dé ou tirer une boule rouge dans une urne (avec remise).

Intuitivement, l'existence d'une telle suite finie de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant des lois fixées est claire. Le théorème suivant, admis, assure la possibilité de mathématiser une telle suite d'expériences :

Théorème d'existence d'espaces probabilisés

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une probabilité $\mathcal{L}_n$ sur un ensemble $\mathcal{E}_n$. Il existe alors un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n aille de Ω dans $\mathcal{E}_n$, et suive la loi $\mathcal{L}_n$.

3.d

Démonstration

Hors programme (admise).

□

3.3. Lois usuelles

On présente ici des lois usuelles.

Définition (Loi uniforme)

On dit que X suit la *loi uniforme* sur un ensemble fini $\{x_1, \dots, x_n\}$ de cardinal n si
$$P_X(x_k) = \frac{1}{n}$$
pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

3.h

Le lancer d'un dé équilibré suit une loi uniforme sur $[\![1, 6]\!]$.

Définition (Loi de Bernoulli)

On dit que X suit la *loi de Bernoulli* de paramètre $p \in [0,1]$ si elle est à valeurs dans $\{0,1\}$, et si $P(X=1)=p$ et $P(X=0)=1-p$. Cette loi est notée $\mathcal{B}(p)$.

3.i

On note parfois q le réel $1-p$.

La loi de Bernoulli peut être vue comme évaluant la probabilité de succès d'une expérience : il y a succès avec probabilité p (et échec avec probabilité $1-p$).

On peut modéliser le jeu de pile ou face infini comme une suite d'épreuves de Bernoulli mutuellement indépendantes.

Exemple (Loi de Bernoulli)

Pour tout événement A inclus dans Ω, l'indicatrice de A suit une loi de Bernoulli de paramètre $P(A)$ (égal à $\frac{\operatorname{Card} A}{\operatorname{Card} \Omega}$ dans le cas particulier où Ω est fini et la probabilité sur Ω uniforme).

i

Définition (Loi binomiale)

On dit que X suit la *loi binomiale* de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$ si son support est $[\![0,n]\!]$, et si, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$:

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

On note $\mathcal{B}(n,p)$ cette loi.

3.j

On note parfois q le réel $1-p$.

Exercice (Somme de v.a.i.i.d. de Bernoulli)

On suppose que $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$. Montrer que $X_1 + \cdots + X_n$ suit la loi $\mathcal{B}(n,p)$.

8

Le nombre de succès lors de la répétition de n expériences de Bernoulli indépendantes de paramètre p suit donc la loi $\mathcal{B}(n,p)$.

Exemple (Loi binomiale)

Cette loi est aussi celle du nombre de succès lors de n tirages avec remise dans un modèle d'urnes. Plus précisément, considérons par exemple une urne dans laquelle se trouvent des boules rouges et bleues, et que l'on tire une boule rouge avec une probabilité p. Si on effectue n tirages avec remise, la variable aléatoire donnant le nombre de boules rouges tirées suit la loi binomiale de paramètres n et p.

ii

Et sans remise ?

Supposons avoir N boules dans une urne, m blanches et $N-m$ noires. On considère la variable aléatoire X donnant le nombre de boules blanches tirées après n tirages sans remise, où n est fixé (et $n \leqslant N$). Un simple dénombrement donne, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$:

$$P(X = k) = \frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Cette loi est appelée *loi hypergéométrique* de paramètres $p \overset{def}{=} \frac{m}{N}$, n et N.
Cette loi n'est pas mentionnée dans le programme.

3.4

Définition (Loi géométrique)

Soit p dans $]0, 1[$. On dit que $X : \Omega \to \mathbb{N}^*$ suit la *loi géométrique* de paramètre p, notée $\mathcal{G}(p)$, si

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = k) = (1-p)^{k-1}p.$$

3.k

C'est la loi de la variable aléatoire donnant le rang du premier succès dans une suite d'épreuves de Bernoulli mutuellement indépendantes de paramètre p.

Proposition (Caractérisation des lois géométriques comme lois sans mémoire)

Une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ est *sans mémoire*, *i.e.* vérifie

$$\forall (k, n) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad P(X > n + k | X > n) = P(X > k),$$

si et seulement si elle suit une loi géométrique.

3.e

Démonstration

$\square$

Vous avez vu en TS une loi sans mémoire (mais elle était continue) : la loi exponentielle.

Définition (Loi de Poisson)

Soit λ dans $\mathbb{R}_+^*$. On dit que $X : \Omega \to \mathbb{N}$ suit la *loi de Poisson* de paramètre λ, notée $\mathcal{P}(\lambda)$, si, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P(X = n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$$

3.1

La proposition suivante montre comment, en un certain sens, la loi binomiale « converge » vers la loi de Poisson :

Proposition (Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson)

Si, pour tout n, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_n)$ et si (np_n) converge vers $\lambda > 0$, alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X_n = k) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

3.f

Démonstration

$\square$

I : simulation de cette approximation.

Interprétation de la loi de Poisson comme loi des événements rares

En fait, la loi de Poisson fournit une bonne modélisation du nombre d'événements rares : nombre d'accidents sur une portion de route, nombre d'erreurs typographiques dans une page, etc.
En effet, supposons que l'on étudie un phénomène vérifiant :

(1) Les observations dans des intervalles disjoints sont indépendants.

(2) La loi du nombre d'observations dans un intervalle de temps donné ne dépend que de la durée de cet intervalle.

(3) Lorsque la durée de l'intervalle d'observation tend vers 0, la probabilité d'observer deux fois au moins le phénomène est négligeable devant celle d'en observer une exactement.

On peut alors montrer que le nombre d'observations dans un intervalle de temps donné suit une loi de Poisson.

3.5

4. Moments d'une variable aléatoire

4.1. Espérance

Définition (Espérance d'une v.a. réelle positive)

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, l'*espérance* de X est la somme, dans $[0, +\infty]$, de la famille $(x\, P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$. On la note $\mathrm{E}(X)$, de sorte que

$$\mathrm{E}(X) \overset{def}{=} \sum_{x \in X(\Omega)} x\, P(X = x)$$

On dira que X *admet une espérance (finie)* si $\mathrm{E}(X) < +\infty$.

4.a

PC : énergie moyenne de systèmes à spectre discret.

Définition (Variable aléatoire d'espérance finie)

Si X est une variable aléatoire réelle, on dira que X est d'*espérance finie*, ou que X *admet une espérance (finie)* si la famille $(x\, P\,(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable. Dans ce cas, la somme de cette famille est l'*espérance* de X, et est notée $\mathrm{E}(X)$:

$$\mathrm{E}(X) \overset{def}{=} \sum_{x \in X(\Omega)} x\, P\,(X = x)$$

La variable aléatoire X est dite *centrée* si son espérance est nulle.

4.b

En fait, l'espérance de X ne dépend que de la loi que X suit : on aurait pu parler d'espérance d'une loi, mais ce n'est pas ce qu'a retenu l'usage.

Bien sûr, toute variable constante est d'espérance finie, égale à la valeur qu'elle prend.

Espérance, moyenne

$E(X)$ s'interprète comme la moyenne des valeurs prises par X, *pondérées* par leurs probabilités d'apparition. Dans le cas d'une variable aléatoire équidistribuée sur $\{x_1, \dots, x_n\}$, son espérance est donc la moyenne usuelle

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n}.$$

On parle d'espérance en référence aux jeux d'argent : si X représente le gain du joueur, $E(X)$ est le gain moyen auquel il peut s'attendre, ou encore le gain que le joueur peut espérer.

4.1

Exemple (Espérances classiques)

(1) Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, alors $E(X) = p$.

(2) Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, alors $E(X) = np$.

(3) Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, alors $E(X) = \frac{1}{p}$.

(4) Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, alors $E(X) = \lambda$.

i

4.2. Le théorème de transfert et autres propriétés de l'espérance

Proposition (Propriétés de l'espérance)

On considère deux variables aléatoires réelles X et Y admettant des espérances, et une troisième variable aléatoire Z.

(1) (linéarité) l'espérance est une forme linéaire, *i.e.*, l'ensemble $L^1(\Omega, \mathbb{R})$ des variables aléatoires admettant une espérance est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et, pour tous réels λ et μ :

$$\mathrm{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda\, \mathrm{E}(X) + \mu\, \mathrm{E}(Y).$$

(2) (positivité) si $X \geqslant 0$, alors $\mathrm{E}(X) \geqslant 0$.

(3) (croissance) l'espérance est une fonction croissante, *i.e.* si $X \leqslant Y$, alors $\mathrm{E}(X) \leqslant \mathrm{E}(Y)$.

(4) $|\,\mathrm{E}(X)| \leqslant \mathrm{E}(|X|)$.

(5) Si $|Z| \leqslant X$, alors Z est d'espérance finie.

4.a

Démonstration

□

On pourra en particulier observer qu'une variable aléatoire bornée admet une espérance finie.

Vous avez bien sûr vu des formules analogues dans le cours d'intégration : en fait, il existe une théorie unifiant ces domaines, appelée *théorie de la mesure*.

Théorème (Formule de transfert)

Soit X une variable aléatoire discrète, f une fonction définie sur $X(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$; alors $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $(P(X=x)\ f(x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable ; si tel est le cas :

$$\mathrm{E}(f(X)) = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x)\ P(X=x).$$

4.b

Démonstration

Non exigible.
Considérons la famille $(f(x)P(X=x))_{x\in X(\Omega)}$. Notons, pour tout y dans l'image $f(X)(\Omega)$ de $f(X)$:

$$I_y = \{x \in X(\Omega), f(x) = y\}$$

Il est clair que $(I_y)_{y\in f(X)(\Omega)}$ forme une partition au plus dénombrable de $X(\Omega)$.
De plus, pour tout $y \in f(X)(\Omega)$, la famille $(f(x)P(X=x))_{x\in I_y}$ est sommable (c'est la multiplication par le scalaire y de la famille sommable $(P(X=x))_{x\in I_y}$), de somme

$$\sum_{x\in I_y} f(x)P(X=x) = y\sum_{x\in I_y} P(X=x) = yP(X\in I_y) = yP(f(X)=y)$$

D'après le théorème de sommation par paquets, la famille $(f(x)P(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable si et seulement si la famille $(|y|P(f(X)=y)_{y\in f(X)(\Omega)}$ est sommable, *i.e.* $f(X)$ admet une espérance finie, et, le cas échéant, sa somme est aussi celle de $(yP(f(X)=y)_{y\in f(X)(\Omega)}$, c'est-à-dire l'espérance de $f(X)$.

□

On observe que l'espérance de $f(X)$ est déterminée par la loi de X.

On peut aussi remarquer que la linéarité de l'espérance est une conséquence de la formule de transfert appliquée à $f\ : (x,y)\mapsto \lambda x+\mu y$ (où on a préalablement fixé deux réels λ et μ).

Exercice (Formule de transfert)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Calculer $E\left(\frac{1}{X(1+X)}\right)$. 9

Proposition (Espérance d'un produit de variables aléatoires indépendantes)

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes d'espérances finies, alors : 4.c

$$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\ \mathrm{E}(Y).$$

Démonstration

Cela se déduit facilement de la formule de transfert en prenant la variable aléatoire (X, Y) et la fonction $f\ : (x, y) \mapsto xy$.

□

Si on ne veut pas utiliser la formule de transfert, on peut considérer la famille $(xP(X = x)yP(Y = y))_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}$: si X et Y sont d'espérances finies, alors cette famille est sommable de somme $E(X)E(Y)$. En sommant par paquets à xy constant, on constate que cette famille a aussi pour somme $E(XY)$.

La réciproque de la proposition 4.c est fausse :

Proposition (Inégalité de Markov)

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a : 4.d

$$P(|X| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathrm{E}(|X|)}{\varepsilon}.$$

Démonstration

□

Illustration

4.3. Variance, écart type et covariance

Définition (Moments d'une v.a. réelle) — 4.c

Soit $k \in \mathbb{N}$. Si X^k admet une espérance finie, alors on appelle *moment d'ordre k de X* le réel $\mathrm{E}(X^k)$.

Proposition (V.a. admettant un moment d'ordre 2) — 4.e

L'ensemble $L^2(\Omega, \mathbb{R})$ des variables aléatoires réelles définies sur Ω admettant un moment d'ordre 2 est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Démonstration

$\square$

Proposition (Moment d'ordre 2 et espérance) — 4.f

Si une variable aléatoire X admet un moment d'ordre 2, elle est d'espérance finie.

Démonstration

$\square$

Exercice (Moments d'ordre inférieur)

Plus généralement, montrer que si X admet un moment d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$, alors X admet un moment d'ordre j, pour tout $j \in [\![1, k]\!]$.

10

Définition (Variance, écart type)

Lorsque X admet un moment d'ordre 2, on appelle *variance* de X et on note $\mathrm{V}(X)$ le réel positif

$$\mathrm{V}(X) \overset{def}{=} \mathrm{E}((X - \mathrm{E}(X))^2)$$

On appelle *écart type* de X et on note $\sigma(X)$ (ou σ_X) le réel positif

$$\sigma(X) \overset{def}{=} \sqrt{\mathrm{V}(X)}.$$

On dit que X est *réduite* si elle est de variance 1 (*i.e.* d'écart type 1).

4.d

Bien sûr, la variable aléatoire $X - \mathrm{E}(X)$ est centrée. Pour donner un indicateur numérique de l'écart entre X et son espérance, c'est-à-dire de la dispersion de X, on pourrait proposer $E(|X - E(X)|)$. Toutefois, cet indicateur est assez peu commode, et on lui préfère la variance, qui est également un indicateur de dispersion.

Cependant, espérance et variance ne sont pas homogènes : si X correspond à des longueurs, l'espérance est une longueur mais la variance une surface. L'écart type est quant à lui bien homogène à une longueur.

PC : écart quadratique énergétique.

Notes aux concours

À un concours, on cherche à faire en sorte que les épreuves aient un poids conforme à leurs coefficients : contrairement à ce qu'on pourrait croire, ce n'est pas la moyenne mais l'écart type que le jury doit harmoniser : si l'écart type est nul, ou presque, cela signifie que tous les candidats ont eu la même note, proche de la moyenne. Cette épreuve n'est donc pas discriminante, elle n'a aucune influence sur le classement (quelle que soit la moyenne).

Par exemple, si en maths la moyenne est de 6, avec un écart type de 5, et si elle est de 18 en physique, avec un écart type de 1, ce sont les mathématiques qui permettront de faire la différence aux concours.

Cela dit, pour des raisons de lisibilité, les moyennes sont souvent proches de 10.

4.2

Proposition (Formules pour la variance)

On suppose que X admet un moment d'ordre 2. On a alors :

(1) (formule de Koenig) $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$.

(2) pour tous réels a et b : $\mathrm{V}(aX + b) = a^2\,\mathrm{V}(X)$.

4.g

Démonstration

□

La formule de Koenig donne une méthode pratique de calcul de la variance.
Il est normal que l'ajout de la *constante* b soit sans influence sur la dispersion, et donc sur la variance.

Définition (v.a. centrée réduite associée à une v.a.)

On suppose que $X \in L^2(\Omega, \mathbb{R})$, et que $\sigma(X) > 0$. La variable aléatoire $\frac{X-E(X)}{\sigma(X)}$ est alors appelée *variable aléatoire centrée réduite associée à* X.

4.e

Exercice (Loi uniforme et variance)

On considère une variable aléatoire X suivant une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Calculer son espérance et sa variance.

11

Exemple (Variances classiques)

(1) Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, alors $V(X) = p(1-p)$.
(2) Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, alors $V(X) = np(1-p)$.
(3) Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, alors $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$.
(4) Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, alors $V(X) = \lambda$.

Indication : on pourra utiliser la relation $X^2 = X(X-1) + X$.

ii

Proposition (Inégalité de Cauchy-Schwarz probabiliste)

Si X et Y admettent chacun un moment d'ordre 2, alors XY est d'espérance finie et $\mathrm{E}(XY)^2 \leqslant \mathrm{E}(X^2)\ \mathrm{E}(Y^2)$.

4.h

Démonstration

$\square$

Proposition (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev) 4.i

Soit $\varepsilon > 0$. On a :

$$P(|X - \mathrm{E}(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathrm{V}(X)}{\varepsilon^2}$$

Démonstration

$\square$

Cette inégalité permet donc de quantifier le fait qu'une v.a. prenne des valeurs proches de son espérance.

Exercice (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev) 12

On jette 3600 fois un dé. Minorer la probabilité que le nombre d'apparitions du 1 soit compris entre 480 et 720.

Définition (Covariance de deux v.a.) 4.f

Si $X, Y \in L^2(\Omega, \mathbb{R})$, on appelle *covariance* de X et Y et on note $\mathrm{Cov}(X,Y)$ le scalaire

$$E((X - E(X))(Y - E(Y))).$$

Bien sûr, $\mathrm{Cov}(X,X) = V(X)$.

Proposition (Formule pour la covariance) 4.j

On a, lorsque $X, Y \in L^2(\Omega, \mathbb{R})$: $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.

Démonstration

□

Covariance de v.a. indépendantes

Si X et Y sont indépendantes, alors $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.
Attention cependant : la réciproque est fausse.

4.3

Proposition (Variance d'une somme)

Soit $X, Y \in L^2(\Omega, \mathbb{R})$.

(1) On a : $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X, Y)$.

(2) En particulier, si X et Y sont indépendantes, $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.

(3) Plus généralement, si $X_1, \ldots, X_q$ sont des variables *deux à deux* indépendantes admettant un moment d'ordre 2, alors

$$V(X_1 + \cdots + X_q) = V(X_1) + \cdots + V(X_q).$$

4.k

Démonstration

□

On observe que la dernière formule est vraie dès que les X_i sont indépendantes deux à deux : il n'est pas nécessaire de les supposer *mutuellement* indépendantes.

Exemple (Variance d'une variable aléatoire binomiale)

En appliquant cette formule à la somme de n v.a.i.i.d. de Bernoulli de paramètre p, on retrouve la variance d'une v.a. de loi $\mathcal{B}(n, p)$.

iii

Exercice (Coefficient de corrélation) 13

On appelle *coefficient de corrélation* de X et Y (admettant des moments d'ordre 2, et de variances non nulles) et on note $\rho(X, Y)$ le réel

$$\rho(X, Y) \stackrel{def}{=} \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

1 Montrer que $-1 \leqslant \rho(X, Y) \leqslant 1$.

2 Que vaut le coefficient de corrélation si X et Y sont indépendantes ? La réciproque est-elle vraie ?

3 Montrer que $\rho(X, Y) \in \{-1, +1\}$ si et seulement si X et Y sont presque sûrement des fonctions affines l'une de l'autre, *i.e.* il existe des réels non nuls a et b, et un réel c tq : $aX + bY + c = 0$ presque sûrement.

4.4. Loi faible des grands nombres

Théorème (Loi faible des grands nombres) 4.1

Si $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes, de même loi et admettant un moment d'ordre 2, alors, si $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $m = \mathrm{E}(X_1)$, on a,

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Démonstration

□

Vous devez savoir retrouver, pour $\varepsilon > 0$, l'inégalité :

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

où σ est l'écart type commune des X_k.

I : simulation d'une suite de tirages.

5. Fonctions génératrices

Ici, X est une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Définition (Fonction génératrice)

On appelle *fonction génératrice* de X et on note G_X la fonction donnée par :

$$G_X(t) \stackrel{def}{=} \mathrm{E}(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)\, t^n.$$

5.a

On observe que G_X est définie en 1, et que $G_X(1) = 1$.

La série entière définissant G_X est de rayon supérieur ou égal à 1 et converge normalement sur le disque unité fermé (*i.e.* le disque fermé de centre 0 et de rayon 1). En particulier, G_X est continue sur ce disque, et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur le disque unité ouvert.

On peut déterminer les coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul grâce à la série de Taylor : appliqué au contexte des fonctions génératrices, cela nous indique que G_X détermine la loi de X, par la formule :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X=n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$$

Proposition (Fonction génératrice d'une somme finie de v.a.i. à valeurs naturelles)

Si $(X_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est une famille de v.a.i. à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors

$$G_{X_1+\cdots+X_n} = G_{X_1} \ldots G_{X_n}$$

5.a

Démonstration

$\square$

Proposition (Utilisation de la fonction génératrice dans le cas d'un RCV plus grand que 1)

On suppose que le rayon de convergence de $\sum P(X=n)t^n$ est strictement plus grand que 1.

La variable aléatoire X admet alors un moment à tout ordre, et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$E(X(X-1)\ldots(X-(k-1))) = G_X^{(k)}(1)$$

5.b

Démonstration

$\square$

En fait, on peut donner un résultat plus fin, que l'on présente pour les moments d'ordre 1 et 2 (qui nous permettront de calculer espérance et variance) :

Proposition (Moments d'ordre 1 et 2 et fonction génératrice)

(1) La variable aléatoire X est d'espérance finie si et seulement si G_X est dérivable en 1. On a alors dans ce cas :
$$\mathrm{E}(X) = G_X'(1)$$
(2) La variable aléatoire X admet un second moment si et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1. On a alors dans ce cas :
$$\mathrm{E}(X(X-1)) = G_X''(1)$$

5.c

Démonstration

Nous ne montrons que le premier point, le second étant similaire (en plus technique).
Supposons que X admette une espérance. La série $\sum nP(X=n)$ est alors convergente à termes positifs, donc absolument convergente.
La série entière dérivée $\sum nP(X=n)t^{n-1}$ (commençant à l'indice 1) est donc normalement convergente sur $[-1,1]$: ainsi, d'après le théorème de dérivation des séries de fonctions, G_X est dérivable en 1, et
$$G_X'(1) = E(X)$$
Réciproquement, supposons que G_X soit dérivable en 1. On sait que pour tout $t \in [0,1[$:
$$G_X'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} nP(X=n)t^{n-1}$$
donc G_X' est croissante sur $[0,1[$.
En utilisant par exemple l'égalité des accroissements finis, on montre que G_X' est continue en 1. En particulier, $G_X'(1)$ majore G_X' sur $[0,1]$.
Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, tout $t \in [0,1[$, on a
$$\sum_{n=1}^{N} nP(X=n)t^{n-1} \leqslant G_X'(t),$$
puis, en faisant tendre t vers 1 :
$$\sum_{n=1}^{N} nP(X=n) \leqslant G_X'(1)$$
Ainsi, la série $\sum nP(X=n)$ est à termes positifs, et la suite de ses sommes partielles est majorée par $G_X'(1)$: cette série converge, et sa somme $\mathrm{E}(X)$ vérifie
$$\mathrm{E}(X) \leqslant G_X'(1)$$
□

Si G_X est deux fois dérivable en 1, alors X admet une variance, et

$$V(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - G_X'(1)^2,$$

Vous devez officiellement savoir *retrouver* cette expression de la variance, mais il serait nuisible de l'apprendre par cœur : elle se retrouve immédiatement à partir de la proposition précédente.

Exemple (Fonctions génératrices)

(1) Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, alors $G_X(t) = (pt + q)$.
(2) Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, alors $G_X(t) = (pt + q)^n$.
(3) Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, alors $G_X(t) = \frac{pt}{1-qt}$.
(4) Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, alors $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$.

i

On peut observer que dans tous ces cas classiques, le rayon de convergence est strictement plus grand que 1, et donc que la proposition 5.b suffit pour faire le lien entre les moments de X et sa fonction génératrice.

Exercice (Espérance, variance, et fonction génératrice)

Retrouver les valeurs de l'espérance et de la variance dans ces cas classiques à partir de leurs fonctions génératrices.

14

Exercice (Somme de deux v.a.i. suivant des lois de Poisson)

On considère deux v.a.i. X et Y suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ.

1 Trouver la loi de $X + Y$ à l'aide des fonctions génératrices.

2 Retrouver ce résultat par un calcul élémentaire.

Remarque : on pourra s'amuser à se poser la même question lorsque X et Y suivent des lois binomiales $\mathcal{B}(m,p)$ et $\mathcal{B}(n,p)$.

15

6. Feuille de TD 15 : Variables aléatoires discrètes

6.1. Probabilité sur un univers fini

Exercice 1 (Probabilités sur les cartes) 0

1 Au Tarot, à cinq joueurs, quelle est la probabilité d'obtenir au moins un bout dans une main ? *On rappelle qu'un jeu de Tarot est constitué de* 78 *cartes dont* 3 *cartes appelées « bout », et qu'à* 5 *joueurs, les mains sont de* 15 *cartes.*

2 On considère un jeu de 52 cartes dont on pioche 5 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir un full (3 cartes d'une même hauteur et 2 autres d'une autre et même hauteur) ?

Exercice 2 (Probabilités sur les dés) 0

1 On lance deux dés équilibrés. Montrer que la probabilité qu'au moins l'un de ces deux dés donne un nombre pair est égale à $\frac{3}{4}$.

2 On lance un dé équilibré 2 fois de suite.

- **i** Quelle est la probabilité que la somme des numéros obtenus soit égale à 8 ?
- **ii** Il y a 11 sommes possibles. Pourquoi la réponse à la question précédente n'est-elle pas $\frac{1}{11}$?

3 On lance 3 dés distincts. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 faces identiques ? Et 3 faces distinctes ?

4 On lance un dé équilibré jusqu'à obtenir un 6 pour la troisième fois. Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants :

- **i** A_n : « le troisième 6 apparait au n-ième lancer » (où $n \geqslant 3$)
- **ii** B_n : « au n-ième lancer le troisième 6 n'est toujours pas apparu » (où $n \geqslant 3$)
- **iii** C : « le troisième 6 n'apparait jamais. »

5 On lance un dé équilibré jusqu'à obtenir un 6 pour la quatrième fois. Déterminer la probabilité de l'événement A_n : « le quatrième 6 apparait au n-ième lancer » (où $n \geqslant 4$).

Exercice 3 (Probabilités sur les chaussettes) 0

1 Un tiroir contient 15 paires de chaussettes toutes différentes. On prend 6 chaussettes. Quelle est la probabilité d'obtenir :

- **i** 3 paires complètes ?
- **ii** au moins une paire ?
- **iii** exactement une paire ?

2 Un tiroir contient n chaussettes dont 3 rouges. Quelle doit être la valeur de n pour qu'en prenant au hasard 2 chaussettes, la probabilité qu'on obtienne 2 chaussettes rouges soit égale à $\frac{1}{2}$?

Exercice 4 (Probabilités diverses) 0

1 On range les 20 tomes d'une encyclopédie sur une étagère, complètement au hasard. Quelle est la probabilité que les tomes 1 et 2 se trouvent côte à côte ?

2 Une loterie compte 1000 billets dont 2 gagnants. Combien faut-il acheter de billets, pour avoir au moins une chance sur deux de gagner quelque chose ?

3

i On choisit au hasard une partie à 3 éléments de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ avec $n \geqslant 3$. Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants :

– A : « la partie contient 1 et 2 »
– B : « la partie ne contient ni 1 ni 2 »
– C : « la partie contient 1 ou 2 »

ii Reprendre les trois questions précédentes, lorsque l'on choisit au hasard une partie quelconque de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ avec $n \geqslant 3$.

Exercice 5 (Les délices de la randonnée) 0

Un randonneur emporte 6 rations, prises au hasard dans un stock de 18 rations, 6 avec un menu A, 6 avec un menu B, et 6 avec un menu C. Quelle est la probabilité que les 6 rations emportées soient composées d'exactement deux menus A, deux menus B, et deux menus C ? Quelle est la probabilité que les six rations soient toutes d'un même menu ?

Exercice 6 (9 avant 7) 0

On effectue des lancers répétés d'une paire de dés et on observe pour chaque lancer la somme des points indiqués par les deux dés. Calculer la probabilité de l'événement E : *dans la suite des résultats observés, la première obtention d'un 9 a lieu avant la première obtention d'un 7.*

Exercice 7 (Le paradoxe du chevalier de Méré) 2

1 Si l'on jette 4 fois un dé à six faces, est-il plus probable qu'on obtienne au moins un 6 ou qu'on n'en obtienne pas ?

2 Maintenant on jette 24 fois deux dés à six faces, est-il plus probable qu'on obtienne au moins un double 6 ou qu'on n'en obtienne pas ?

Exercice 8 (Propagation d'une rumeur) 2

Une information est transmise à l'intérieur d'une population. Avec une probabilité p, c'est l'information correcte qui est transmise à chaque étape d'une personne à une autre. Avec une probabilité $1-p$, c'est l'information contraire qui est transmise. On note p_n la probabilité que l'information après n transmissions soit correcte.

1 Donner une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n.

2 En déduire la valeur de p_n en fonction de p et de n.

3 En déduire la valeur de $\lim_n p_n$. Qu'en pensez-vous ?

Exercice 9 (Dérangements à Noël) 4

Les n invités d'un repas de Noël déposent un cadeau au pied du sapin. L'hôte prend l'initiative de distribuer au hasard un cadeau à chacun de ses invités. Quelle est la probabilité que personne ne reçoive le cadeau qu'il a amené ?

6.2. Conditionnement et indépendance

Exercice 10 (Test sanguin) 0

Une maladie affecte une personne sur mille. On dispose d'un test sanguin qui détecte la présence de cette maladie chez 99% des malades. Mais le test donne un résultat faussement positif chez $0,2\%$ des personnes saines testées.
Quelle est la probabilité qu'une personne soit réellement malade lorsque son test est positif ?

Exercice 11 (Indépendances et dés) 0

On lance deux dés équilibrés et on considère les évènements A « le premier dé donne un nombre pair », B « le second dé donne un nombre pair » et C « les deux dés donnent des nombres de même parité ». Les événements A et B sont-ils indépendants ? Même question avec A et C, avec A et $B \cap C$ et avec $B \cup C$.

Exercice 12 (Indépendance et boules) 0

1 Une urne contient 20 boules blanches et 30 boules noires. On tire successivement et sans remise 3 boules. Quelle est la probabilité que la première soit noire, la deuxième blanche, et la troisième noire ?

2 Deux urnes U_1 et U_2 contiennent au départ chacune 12 boules blanches et 13 boules noires. On tire une boule de U_1, on note sa couleur, et on la met dans U_2. On tire alors dans U_2. Quelle est la probabilité de tirer deux fois une boule noire ?

3 L'urne 1 contient 10 boules blanches et 2 boules noires. L'urne 2 contient 2 boules blanches et 2 boules noires. On choisit, au hasard, l'une de ces 2 urnes indiscernables et on pioche 2 boules dans cette urne.

i Quelle est la probabilité que les 2 boules tirées soient blanches ?

ii L'expérience est réalisée, et les 2 boules tirées sont blanches. Quelle est la probabilité que l'urne choisie soit la 1 ?

Exercice 13 (Indépendance et lancers d'une pièce) 0

On lance indéfiniment une pièce équilibrée. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note P_k l'événement « obtenir Pile au k-ème lancer » et $A_k = P_k \cap \overline{P_{k+1}}$. La famille $(A_k)_k$ est-elle une famille d'événements mutuellement indépendants ? d'événements indépendants deux à deux ?

Exercice 14 (Jeu télévisé) 0

Dans un jeu télévisé, un candidat doit choisir une question de repêchage, en tirant un papier au hasard parmi trois papiers.
Il a une question facile (3 chances sur 4 de donner la réponse exacte), une question moyenne (2 chances sur 5), et une question difficile (1 chance sur 5).
Sachant que le candidat a donné la réponse exacte à la question qu'il a tirée, quelle est la probabilité conditionnelle que la question tirée ait été la question facile ?

Exercice 15 (De l'arithmétique à l'aide de probas) 2

Soit $n > 1$ un entier fixé. On choisit de manière équiprobable un entier x dans $\{1, \ldots, n\}$. Pour tout entier $m \leqslant n$, on note A_m l'événement "m divise x". On note également B l'événement "x est premier avec n". Enfin, on note $p_1, \ldots, p_r$ les diviseurs premiers de n.

1 Exprimer B en fonction des A_{p_k}.

2 Pour tout $m \leqslant n$ qui divise n, calculer la probabilité de A_m.

3 Montrer que les événements $A_{p_1}, \ldots, A_{p_r}$ sont mutuellement indépendants.

4 En déduire la probabilité de B.

5 Application : on note $\phi(n)$ le nombre d'éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Démontrer que

$$\phi(n) = n \prod_{k=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Exercice 16 (Sauterelles à foison) 3

On considère une sauterelle se déplaçant par sauts successifs sur les trois sommets A, B et C d'un triangle. Au début de l'expérience, on la place sur le sommet A et ensuite elle se déplace de la manière suivante :
– si elle se trouve en A, elle saute sur l'un des trois sommets de façon équiprobable,
– si elle se trouve en B, alors elle fait un saut sur place,
– si elle se trouve en C, alors elle fait un saut sur place une fois sur trois, et elle saute en B sept fois plus souvent qu'en A.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n (respectivement B_n et C_n) l'évènement : « au n-ème saut la sauterelle choisit le sommet A (resp. B et C) » et on note a_n, b_n et c_n leur probabilité respective.

1 Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n. Exprimer de même b_{n+1} et c_{n+1}.

2 Exprimer c_{n+2} en fonction de c_n et c_{n+1}.

3 En déduire une expression de c_n en fonction de n.

4 Étudier la convergence des suites $(a_n)_n, (b_n)_n$ et $(c_n)_n$.

Exercice 17 (Prisonniers) 3

Trois prisonniers sont dans une cellule. Ils savent que deux vont être condamnés à mort et un gracié, mais ils ne savent pas qui. L'un d'entre eux va voir le gardien et lui demande : « Je sais bien que tu ne peux rien me dire, mais tu peux au moins me montrer un de mes compagnons qui sera exécuté ». Le gardien réfléchit, se dit que de toutes manières au moins l'un des deux autres prisonniers sera condamné, et s'exécute. Le prisonnier lui répond alors : « Merci, avant, j'avais une chance sur trois d'être gracié, et maintenant, j'ai une chance sur deux. » A-t-il raison de croire que sa probabilité d'être exécuté a varié ?

Exercice 18 (Lancers de pièces) 3

On dispose de deux pièces d'apparence identique, la pièce A donnant Pile avec la probabilité $a \in]0,1[$, et la pièce B donnant Pile avec la probabilité $b \in]0,1[$.
Pour le premier lancer, on choisit une pièce au hasard, et pour les lancers suivants, on adopte la stratégie suivante : si on obtient Pile, on garde la pièce pour le lancer suivant, et si on obtient Face, on change de pièce pour le lancer suivant.
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k l'évènement « le k-ème lancer se fait avec la pièce A » et E_k l'évènement « le k-ème lancer donne Pile ».

1 Déterminer une relation entre $P(E_k)$ et $P(A_k)$.

2 Déterminer une relation entre $P(A_{k+1})$ et $P(A_k)$.

3 En déduire $P(A_k)$ puis $P(E_k)$.

6.3. Loi d'une variable aléatoire

Exercice 19 (Détermination de lois) 0

Déterminer la loi de la variable aléatoire X, dans les situations suivantes.

1 On range au hasard 10 objets dans 3 tiroirs. X est le nombre d'objets dans le premier tiroir.

2 Un fermier a cinq poules, quatre lapins et trois moutons : X est le nombre de pattes de l'animal choisi (au hasard) pour le déjeuner.

3 Un dé cubique équilibré porte un nombre sur chacune de ses faces : -2 sur 3 faces, 1 sur 2 faces, et 4 sur une face. On lance le dé deux fois de suite. X est la somme des points obtenus.

4 Lors d'un vide-grenier, quinze ordinateurs sont mis en vente, dont six sont en panne. Une personne en achète trois au hasard. X est le nombre d'ordinateurs en état de marche achetés par cette personne.

5 Une cible circulaire est composée de 3 zones qui rapportent respectivement $1, 2$ ou 3 points. Elles sont touchées respectivement avec les probabilités $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ et $\frac{1}{6}$. Un joueur tire deux fois dans la cible, et l'on suppose que ses deux tirs sont indépendants. X est la somme des points obtenus.

Exercice 20 (Nul n'est censé ignorer la loi) 2

Dans chacune des situations ci-dessous reconnaître la loi de X parmi les lois usuelles et préciser son ou ses paramètres.

1 On lance un dé équilibré. On note X le nombre obtenu.

2 On lance un dé équilibré 10 fois de suite. On note X le nombre de 6 obtenus.

3 On dispose d'une urne contenant 6 boules blanches et 7 boules noires. On en pioche successivement 3 sans remise. On note X le nombre de boules blanches obtenues.

4 On dispose d'une urne contenant 6 boules blanches et 7 boules noires. On effectue des tirages successifs avec remise jusqu'à ce qu'on obtienne une boule blanche. On note X le nombre de tirages nécessaire.

5 On dispose d'une urne contenant 6 boules blanches et 7 boules noires. On effectue 9 tirages successifs avec remise. On note X le nombre de boules blanches obtenues.

Exercice 21 (Construction d'une loi) 2

Soit α et β deux réels et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $p_k = a\frac{\alpha^k+\beta^k}{k!}$.
1 Suivant les valeurs de α et β, discuter l'existence de a pour que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puisse définir la loi de probabilité d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$. Le cas échéant, déterminer a.
2 Peut-il arriver que X suive une loi de Poisson ?

Exercice 22 (Loi de Pascal) 2

On lance une pièce de monnaie dont la probabilité de tomber sur pile vaut p. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de lancers nécessaire pour obtenir r fois pile. Quelle est la loi de X ?

Exercice 23 (Variables aléatoires et urnes) 0

On dispose de deux urnes U et V. L'urne U contient 3 boules noires et 2 boules blanches et l'urne V contient 4 boules noires et 1 boule blanche.
1 On choisit une urne au hasard et on extrait successivement 3 boules, avec remise à chaque fois de la boule tirée. On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules noires tirées. Déterminer $P(X = 0)$.
2 On choisit une urne au hasard et on extrait successivement 3 boules, sans remise de la boule tirée. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de boules noires tirées. Déterminer $P(Y = 3)$.

Exercice 24 (Quel avion choisir ?) 2

A et B sont deux avions ayant respectivement 4 et 2 moteurs. Les moteurs sont supposés indépendants les uns des autres, et ils ont une probabilité p de tomber en panne. Chaque avion arrive à destination si moins de la moitié de ses moteurs tombe en panne. Quel avion choisissez-vous ? (on discutera en fonction de p).

6.4. Couples de variables aléatoires

Exercice 25 (Loi d'un couple) — 2

1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$. Déterminer la loi de $X-Y$.

2 Soit n et m deux entiers naturels non nuls, et $p \in]0,1[$. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{B}(n,p)$ et $\mathcal{B}(m,p)$.

i Déterminer la loi conjointe de X et Y.

ii Déterminer la loi de $X+Y$.

3 La loi d'un couple de variables aléatoires (X,Y) est donnée par le tableau suivant que l'on complètera :

$X\backslash Y$	1	2	3
1	0	0,4	0
2	0,1	0,2	0,1
3	0	0	$\ldots$

i Déterminer les lois marginales de (X,Y).

ii Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

iii Calculer $E(X)$ et $E(Y)$. Soit $U=\min(X,Y)$ et $V=\max(X,Y)$.

iv Écrire la table de la loi conjointe de U et V, puis en déduire les lois de U et de V.

v Déterminer directement la loi de V.

4 Soit, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $p_{i,j} = \lambda ij$.

i Déterminer λ pour que ceci définisse une loi conjointe.

Pour cette valeur de λ, soit (X,Y) un couple de variables aléatoires réelles admettant cette loi conjointe.

ii Déterminer les lois marginales de (X,Y).

iii X et Y sont-elles indépendantes ?

iv Donner la valeur de $\mathrm{Cov}(X,Y)$, et en déduire la valeur de $E(XY)$.

Exercice 26 (Indépendance dans un couple) — 2

Soit $p \in]0,1[$. On considère deux variables aléatoires X et Y dont la loi conjointe est donnée par le tableau suivant que l'on complétera :

$X\backslash Y$	0	1
0	$\frac{2}{3}-p$	$p-\frac{1}{6}$
1	p	

1 Montrer que $\frac{1}{6} \leqslant p \leqslant \frac{1}{2}$.

2 Déterminer les lois marginales du couple, puis déterminer l'espérance et la variance de X et Y.

3 Pour quelle valeur de p les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 27 (Loi conjointe de v.a.d.) — 2

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, telles que :

$$P\big((X=i)\cap(Y=j)\big) = \frac{a}{2^{i+j}},$$

pour tous i,j de $\mathbb{N}^*$.

1 Calculer a.

2 Déterminer les lois marginales de X et Y.

3 X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 28 (Minimum, maximum) 3

1 On considère une urne contenant N jetons numérotés de 1 à N. On tire simultanément n jetons de l'urne et on note X le plus petit des numéros obtenus et Y le plus grand. Donner la loi marginale du couple.

2 On lance deux dés équilibrés, on note U_1 et U_2 les variables aléatoires correspondant aux résultats obtenus. On appelle $X = \min(U_1, U_2)$ et $Y = \max(U_1, U_2)$.

i Donner loi et espérance de X.

ii Exprimer $X + Y$ en fonction de U_1 et U_2. En déduire $E(Y)$.

iii Exprimer XY en fonction de U_1 et U_2. En déduire $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

6.5. Espérance, variance, moments

Exercice 29 (Voulez-vous jouer ?) 0

On vous propose de jouer, autant de fois que vous le voulez, à un jeu. Selon la situation, acceptez-vous de jouer ?

1 Vous lancez un dé : si vous obtenez 6, vous gagnez 6 euros, et perdez 1 euro sinon.

2 Vous lancez deux dés, et vous gagnez 5 euros si vous sortez 7, et perdez 1 euro sinon.

3 Vous lancez deux dés : si vous obtenez un double i, vous gagnez i euros. Sinon, vous perdez 1 euro.

Exercice 30 (Un professeur sévère) 0

Un professeur a la réputation d'avoir un écart-type supérieur à sa moyenne. Cela est-il possible ? (le professeur ne donne pas de notes strictement négatives)

Exercice 31 (Dé truqué) 0

On considère un dé cubique truqué, de telle sorte que la probabilité d'obtenir la face numérotée k est proportionnelle à k (on suppose que les faces sont numérotées de 1 à 6). Soit X la variable aléatoire associée au lancer de ce dé.

1 Déterminer la loi de X, calculer son espérance.

2 On pose $Y = 1/X$. Déterminer la loi de Y, et son espérance.

Exercice 32 (Comparatif de deux indicateurs de dispersion) 2

Soit σ_X l'écart type d'une variable aléatoire X, et l'écart moyen $\sigma = E(|X - E(X)|)$.
Comparer σ et σ_X et traiter le cas d'égalité.

Exercice 33 (Calculs d'espérance et de variance) 0

1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Soit X une v.a. à valeurs dans $\{0, 1, ..., n\}$ telle que :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad P(X = k) = \binom{n}{k} \frac{\beta}{k+1}.$$

Déterminer β, $E(X)$, et $V(X)$.

2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0, 1[$ et $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$. On définit la v.a. Y de la façon suivante :
– Si $X = k$ avec $k > 0$, alors $Y = k$.
– Si $X = 0$, alors Y prend une valeur quelconque avec équiprobabilité dans $\{1, ..., n\}$.
Déterminer la loi et l'espérance de Y.

3 On tire n boules dans une urne de N boules, numérotées de 1 à N. X est le plus grand des numéros obtenus. Déterminer la loi et l'espérance de X.

Exercice 34 (Vaches laitières) 2

Les vaches laitières sont atteintes par une maladie M avec le probabilité $p = 0.15$. Pour dépister la maladie M dans une étable de n vaches, on fait procéder à une analyse de lait. Deux méthodes sont possibles :
– **Première méthode** On fait une analyse sur un échantillon de lait de chaque vache.
– **Seconde méthode** On effectue d'abord une analyse sur un échantillon de lait provenant du mélange des n vaches. Si le résultat est positif, on fait une nouvelle analyse, cette fois pour chaque vache.

On voudrait connaître la méthode la plus économique (*i.e.* celle qui nécessite en moyenne le moins d'analyses). Pour cela, on note X_n la variable aléatoire du nombre d'analyses réalisées dans la deuxième méthode. On pose $Y_n = \frac{X_n}{n}$.

1 Déterminer la loi et l'espérance de Y_n.

2 En déduire la réponse à la question posée (dépendant de n).

Exercice 35 (Première obtention de deux piles consécutifs) 2

On joue à pile ou face avec une pièce non équilibrée. A chaque lancer, la probabilité d'obtenir pile est 2/3, et donc celle d'obtenir face est 1/3. Les lancers sont supposés indépendants, et on note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir, pour la première fois, deux piles consécutifs. Pour $n \geqslant 1$, on note p_n la probabilité $P(X = n)$.

1 Expliciter les événements $(X = 2)$, $(X = 3)$, $(X = 4)$, et déterminer la valeur de p_2, p_3, p_4.

2 Montrer que l'on a $p_n = \frac{2}{9} p_{n-2} + \frac{1}{3} p_{n-1}$, $n \geqslant 4$.

3 En déduire l'expression de p_n pour tout n.

4 Rappeler, pour $q \in]-1, 1[$, l'expression de $\sum_{n=0}^{+\infty} n q^n$, et calculer alors $E(X)$.

Exercice 36 (Deuxième obtention d'un pile) 2

Soit $p \in]0,1[$. On dispose d'une pièce amenant "pile" avec la probabilité p. On lance cette pièce jusqu'à obtenir pour la deuxième fois "pile". Soit X le nombre de "face" obtenus au cours de cette expérience.

1 Déterminer la loi de X.

2 Montrer que X admet une espérance, et la calculer.

3 On procède à l'expérience suivante : si X prend la valeur n, on place $n+1$ boules numérotées de 0 à n dans une urne, et on tire ensuite une boule de cette urne. On note alors Y le numéro obtenu. Déterminer la loi de Y. Calculer l'espérance de Y.

4 On pose $Z = X - Y$. Donner la loi de Z et vérifier que Z et Y sont indépendantes.

Exercice 37 (Entropie d'une v.a. finie) 2

Soit X une variable aléatoire discrète prenant la valeur x_i avec probabilité p_i, pour $i = 1, \dots, n$. On définit l'*entropie* de X par :

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln(p_i).$$

1 Calculer $H(X)$ si X est constante.

2 Calculer $H(X)$ si X est équidistribuée.

3 Trouver la valeur maximale de $H(X)$ pour X parcourant l'ensemble des variables aléatoires discrètes prenant au plus n valeurs.

Exercice 38 (De jolies inégalités) 2

Soit X une variable aléatoire réelle.

1 Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, strictement croissante, et $a \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer

$$P(|X| \geqslant a) \leqslant \frac{E(g(|X|))}{g(a)}$$

2 On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. Montrer, pour tous $\varepsilon, \lambda > 0$:

$$P(X - np > n\varepsilon) \leqslant E(\exp(\lambda(X - np - n\varepsilon)))$$

Exercice 39 (Inégalité de Cantelli) 2

On se propose de démontrer l'inégalité de Cantelli : si X est une v.a. ayant une espérance m et un écart type σ, on a :

$$\forall t > 0, \quad P(X - m \geqslant t) \leqslant \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + t^2}$$

1 Vérifier que l'on peut se ramener au cas $m = 0$ (ce que l'on fait désormais).

2 Montrer que pour tout $u \geqslant 0$:

$$P(X \geqslant t) \leqslant P((X+u)^2 \geqslant (t+u)^2) \leqslant \frac{\sigma^2 + u^2}{(t+u)^2}$$

3 Conclure en choisissant une valeur adéquate de u.

Exercice 40 (Une formule pour $E(X)$ dans un cas particulier) 3

1 Soit $N \in \mathbb{N}$ et X une variable aléatoire de support inclus dans $[\![0, N]\!]$.
Montrer que : $E(X) = \sum_{k=0}^{N} P(X > k)$.
2 On considère une urne de N boules numérotées de 1 à N. On effectue un tirage simultané de n boules, et on note X le plus grand numéro obtenu. Déterminer $E(X)$.

Exercice 41 (Calculs d'espérance et variance) 3

1 Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(n, p)$. Calculer l'espérance de $Y = \frac{1}{X+1}$.
2 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, n]\!]$, telle qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$P(X = k) = a\binom{n}{k}$$

Calculer espérance et variance de X.

6.6. V.a.i.i.d.

Exercice 42 (Tirages dans une urne) 0

Dans la suite du problème n désigne un entier supérieur ou égal à 2. On considère une urne $\mathcal{U}$ contenant n boules numérotées de 1 à n et indiscernables au toucher.
On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise de la boule dans l'urne $\mathcal{U}$.
Soit k un entier supérieur ou égal à 1. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire égale au nombre d'obtentions de la boule numéro i au cours des k premiers tirages.
1 Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Donner la loi de X_i. Rappeler l'espérance et la variance de X_i.
2 Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$.
  i Montrer que X_i et X_j ne sont pas indépendantes.
  ii Déterminer la loi de la variable aléatoire $X_i + X_j$.

Exercice 43 (Épreuves consécutives à plusieurs résultats possibles) 2

On considère une suite de n épreuves répétées indépendantes, chaque épreuve ayant k résultats possibles $r_1, \ldots, r_k$. On note p_i la probabilité de réalisation du résultat r_i lors d'une épreuve donnée.
Pour $i \in [\![1, k]\!]$, notons X_i le nombre de réalisations du résultat r_i au cours des n épreuves.
1 Expliquer pourquoi $\mathrm{V}(X_1 + \cdots + X_k) = 0$.
2 Quelle est la loi de X_i ? Que vaut sa variance ?
3 Pour $i \neq j$, donner la loi et la variance de $X_i + X_j$.
4 En déduire $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$.
5 Contrôler ce résultat en développant $\mathrm{V}(X_1 + \cdots + X_k)$ et en utilisant la première question.

Exercice 44 (Cible) 3

Soit $p \in]0,1[$ et $q = 1 - p$. Soit n un entier naturel.
On considère n joueurs qui visent une cible. Chaque joueur effectue deux tirs. À chaque tir, chaque joueur a la probabilité p d'atteindre la cible. Les tirs sont indépendants les uns des autres.
On définit la variable aléatoire X égale au nombre de joueurs ayant atteint la cible au premier tir et la variable aléatoire Z égale au nombre de joueurs ayant atteint la cible au moins une fois à l'issue des deux tirs.

1 Déterminer la loi de X. Rappeler son espérance et sa variance.

2 Montrer que Z suit une loi binomiale, et donner ses paramètres. Donner son espérance et sa variance.
On note $Y = Z - X$.

3 Que représente la variable aléatoire Y ? Déterminer sa loi.

4 Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 45 (Produit consécutif de Bernoulli) 3

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.i.i.d. de Bernoulli de paramètre p. On pose $Y_n = X_n X_{n+1}$.

1 Déterminer la loi de Y_n.

2 Discuter, selon les valeurs de i et j, l'indépendance de Y_i et Y_j.

3 Pour tout $n \geqslant 2$, donner la matrice des variances-covariances du vecteur $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$.

4 En déduire la variance de $\sum_{i=1}^n Y_i$.

5 Reprendre ces questions, en supposant que les (X_n) soient mutuellement indépendantes, et que X_n suive $\mathcal{B}(p^n)$ pour tout n.

7. Oraux

Exercice 46 (Minimum de deux v.a.i. suivant $\mathcal{G}(p)$) 0

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Soit $Z = \min\{X, Y\}$. Montrer que Z suit une loi géométrique.

Exercice 47 (Lemme de Borel-Cantelli et loi du zero-un de Borel) 1

Soit $(A_n)_n$ une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On note $pn = P(An)$ On note B l'événement

$$B \stackrel{def}{=} \bigcap_{n\geqslant 1} \bigcup_{k\geqslant n} A_k$$

c'est-à-dire

$$B = \{\omega \in \Omega, \operatorname{Card}(n \in \mathbb{N}, \omega \in A_n) = \infty\}$$

1 On suppose que la série $\sum P(A_n)$ converge. Montrer que $P(B) = 0$.
C'est le *lemme de Borel-Cantelli.*

2 On suppose que les événements A_n sont indépendants et que la série $\sum P(A_n)$ diverge.

i Montrer que l'événement $\overline{B}$ est égal à

$$\bigcup_{n\geqslant 1} \bigcap_{k\geqslant n} \overline{A_k}$$

ii Exprimer $P(\cap_{k=n}^{m} \overline{A_k})$ en fonction des p_k.

iii Montrer que la série $\sum \ln(1 - p_k)$ est divergente.

iv En déduire que $P(B) = 1$.

Ainsi, si $\sum P(A_n)$ diverge (resp. converge), alors $P(B) = 1$ (resp. $P(B) = 0$) : c'est la *loi du zero-un de Borel* (également appelée *second lemme de Borel-Cantelli*).

3 Soit α un réel strictement positif et (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes telles que pour tout n, X_n suive la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{n^\alpha}$.

i Montrer que $E(X_n) \to_n 0$.

ii On suppose que $\alpha \in]0, 1[$. Montrer qu'avec une probabilité égale à 1, l'ensemble $\{n, X_n = 1\}$ est infini.

iii On suppose que $\alpha > 1$. Montrer qu'avec une probabilité égale à 1, l'ensemble $\{n, X_n = 1\}$ est fini.

Exercice 48 (Caractérisation des lois de Poisson par relations entre espérances) 2

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé sur lequel sont définies toutes les variables aléatoires de l'exercice.
Soit N une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1

i Montrer que, pour toute fonction g définie sur $\mathbb{N}$ telle que les espérances existent, on a :

$$\mathrm{E}(Ng(N)) = \lambda\,\mathrm{E}(g(N+1))$$

ii Calculer $\mathrm{E}\left(\frac{1}{N+1}\right)$.

2 Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle qu'il existe un réel λ vérifiant, pour toute fonction g telle que les espérances existent :

$$\mathrm{E}(Tg(T)) = \lambda\,\mathrm{E}(g(T+1))$$

La variable aléatoire T suit-elle une loi de Poisson ?

3 Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On définit une variable aléatoire S par

$$S \overset{def}{=} \sum_{k=1}^{N} X_k$$

(où N est la loi introduite dans l'énoncé).
Montrer que, pour toute fonction g telle que les espérances existent, on a :

$$\mathrm{E}(Sg(S)) = \lambda\,\mathrm{E}(X_0 g(S+X_0))$$

Exercice 49 (Identité de Wald) 2

Soit N et $X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que les variables $X_1, X_2, \ldots$ suivent toutes une même loi de fonction génératrice G_X et on pose

$$S \overset{def}{=} \sum_{k=1}^{N} X_k$$

1 Établir que $G_S(t) = G_N(G_X(t))$ pour tout $t \in]-1, 1[$

2 On suppose que les variables admettent une espérance. Établir l'identité de Wald :

$$\mathrm{E}(S) = \mathrm{E}(N)\,\mathrm{E}(X_1)$$

Exercice 50 (Probabilité d'égalités de variables aléatoires) 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $Y_1, \ldots, Y_n$ des variables aléatoires indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant toutes la loi de Poisson de paramètre $\frac{\lambda}{n}$, avec $\lambda > 0$.

1 Déterminer la loi de la variable aléatoire $S_n \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{n} Y_i$.

2 Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par : $f(x) = 1 - (1-x)e^x$. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, on a $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

3 Pour tout entier $n > \lambda$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note U_i une variable aléatoire indépendante de Y_i et suivant la loi de Bernoulli de paramètre $f\left(\frac{\lambda}{n}\right)$.
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, soit X_i la variable aléatoire définie par $X_i = 0$ si $Y_i = U_i = 0$, 1 sinon.
Déterminer la loi de X_i.

4 Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a : $P(X_i \neq Y_i) \leqslant \frac{\lambda^2}{n^2}$.

5 En déduire $\lim_{n\infty} P\left(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i = Y_i)\right)$.

Exercice 51 (Probabilité de convergence d'une série) 3

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et suivant toutes la loi géométrique de paramètre p, où $p \in]0,1[$.
On pose $q = 1 - p$ et on note α un réel strictement positif et différent de 1.
On va chercher à calculer la probabilité de l'événement

$$A \overset{def}{=} \{\omega \in \Omega, \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha X_n(\omega)} \text{ converge}\}$$

1 Calculer la probabilité de A lorsque $\alpha > 1$.
On suppose désormais $\alpha \in]0,1[$. On pose $\beta = 1 - \alpha$.
2
i Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$P\left(\bigcup_{n=k}^{\infty}(X_n > n^\beta)\right) \leqslant \sum_{n=k}^{\infty} q^{n^\beta - 1}$$

ii Étudier la convergence de la série de terme général $q^{n^\beta - 1}$.
iii En déduire

$$\lim_{k\to\infty} P\left(\bigcup_{n=k}^{\infty}(X_n > n^\beta)\right)$$

iv En déduire que

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\left(\bigcup_{n=k}^{\infty}(X_n > n^\beta)\right)\right) = 0$$

Dans la suite de l'exercice, on note

$$A_\beta \overset{def}{=} \{\omega \in \Omega, X_n(\omega) > n^\beta \text{ pour un nombre fini de valeurs de} n \text{ uniquement}\}$$

3
i Montrer que

$$A_\beta = \bigcup_{k=1}^{\infty}\left(\bigcap_{n=k}^{\infty}(X_n \leqslant n^\beta)\right)$$

ii Montrer que $P(A_\beta) = 1$.
4
i Montrer que pour tout $\omega \in A_\beta$, la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha X_n(\omega)}$ diverge.
ii En déduire la probabilité de l'événement A.

Exercice 52 (Fonction génératrice d'un couple de variables aléatoires) 3

1 Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{N}$.

i Dire pourquoi pour tout $(x, y) \in [-1, 1]^2$, la famille

$$(P(X = n \cap Y = m)x^n y^m)_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$$

est sommable. On note $G_{(X,Y)}(x, y)$ sa somme.

ii Montrer que $G_{(X,Y)}(x, y) = E(x^X y^Y)$.

On suppose désormais que, pour tout $(x, y) \in [-1, 1]^2$:

$$G_{(X,Y)}(x, y) = \frac{py}{\ln(1-p)} \frac{\ln(1-pxy)}{1-(1-p)y}$$

où $p \in]0, 1[$.

2

i Déterminer $G_X(x)$ pour tout $x \in [-1, 1]$.

ii Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$: $\ln(1 - px) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n}{n!} x^n$.

iii En déduire la loi marginale de X.

3

i Montrer que les variables aléatoires X et $Y - X$ vérifient, pour tout $(x, y) \in [-1, 1]^2$:

$$G_{(X,Y-X)}(x, y) = G_X(x)G_{Y-X}(y)$$

ii Déterminer la loi de $Y - X$.

CHAPITRE XVI

Espaces préhilbertiens réels

Sommaire

Dans ce chapitre, le corps de base des espaces vectoriels considérés est $\mathbb{R}$. Notre objectif est de donner un cadre formel à la géométrie euclidienne. Cette axiomatisation de la notion d'orthogonalité sera aussi de grande utilité en analyse, notamment dans le cadre des approximations de fonctions.

E désignera un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et n un entier naturel non nul.

Selon le contexte, I désignera un intervalle d'intérieur non vide ou un ensemble d'indexation d'une certaine famille.

1. Produit scalaire

1.1. Produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

Définition (Application (définie) positive) 1.a

Une application $f : E^2 \to \mathbb{R}$ est dite *positive* si

$$\forall x \in E, \quad f(x,x) \geqslant 0$$

Dans ce cas, f est dite *définie positive* si en outre

$$\forall x \in E, \quad f(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$$

Définition (Produit scalaire)

On dit qu'une application $f : E^2 \to \mathbb{R}$ est un *produit scalaire* (sur E) si f est une forme bilinéaire symétrique, définie positive.
On appelle *espace préhilbertien (réel)* un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire.

1.b

On note souvent $< x, y >$ ou $(x|y)$ ou $x \cdot y$ le produit scalaire de deux vecteurs x et y.

Exemple (Produits scalaires)

(1) Soit $u = (u_1, \dots, u_n)$ et $v = (v_1, \dots, v_n)$ deux éléments quelconques de $\mathbb{R}^n$. L'application
$$(u, v) \mapsto \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$
est un produit scalaire, appelé *produit scalaire canonique (ou usuel)* de/sur $\mathbb{R}^n$.

(2) Soit $P = \sum_{k \geqslant 0} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k \geqslant 0} b_k X^k$ des polynômes réels. On pose
$$(P|Q) = \sum_{k \geqslant 0} a_k b_k,$$
somme bien définie puisque $(a_n b_n)$ est presque nulle. On définit ainsi un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ sur $\mathbb{R}[X]$, dit *canonique*.

(3) Produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([a, b])$ $(a, b \in \mathbb{R}, a < b)$: $(f, g) \mapsto \int_a^b fg$.

(4) Plus généralement, si $L_c^2(I, \mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions continues de carré intégrable sur I, alors
$$(f, g) \in (L_c^2(I, \mathbb{R}))^2 \mapsto \int_I fg$$
est un produit scalaire.

i

(5) Si $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ désigne l'ensemble des suites réelles telles que $\sum u_n^2$ converge, alors
$$(u, v) \in l^2(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n$$
est un produit scalaire.

(6) Si $w\ : I \to \mathbb{R}_+^*$ est une fonction telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t \mapsto t^n w(t)$ soit intégrable, alors
$$(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2 \mapsto \int_I P(t)Q(t)w(t)\mathrm{d}t$$
est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

(7) Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continues et 2π-périodiques. L'application :
$$(f, g) \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)\mathrm{d}t$$
est un produit scalaire sur E.

(8) Si F est un sous-espace vectoriel de E préhilbertien, alors le produit scalaire sur E induit une structure préhilbertienne sur F.

Définition (Espace euclidien)

Un *espace euclidien* est un espace préhilbertien réel de dimension finie.

1.c

Exemple (Espaces euclidiens)

(1) Les espaces $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, munis de leurs produits scalaires usuels (c'est-à-dire canoniques) sont des espaces euclidiens.

(2) L'espace $\mathcal{C}^0([0,1])$, muni du produit scalaire ci-dessus, n'est pas euclidien, car il n'est pas de dimension finie. Cependant, ses sous-espaces vectoriels de dimension finie sont des espaces euclidiens pour la structure induite.

ii

Un même espace peut en général être muni de plusieurs produits scalaires.
Dans la suite, sauf contexte particulier, E désigne un espace préhilbertien (réel) de produit scalaire $(\cdot|\cdot)$.

1.2. Norme et distance associées à un produit scalaire

Proposition (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

On a :

$$\forall (u,v) \in E^2, \quad (u|v)^2 \leqslant (u|u)(v|v).$$

De plus, il y a égalité si et seulement si (u,v) est liée.

1.a

Démonstration

□

Dans le cas de $\mathbb{R}^n$ euclidien canonique, l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit :

$$\left(\sum_{i=1}^n u_i v_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^n u_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n v_i^2\right).$$

Dans le cas intégral, on reconnaît l'inégalité de Cauchy-Schwarz déjà vue :

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b g^2(t)\mathrm{d}t\right).$$

Exercice (Produit scalaire canonique matriciel)

Faire la première partie de la première question de l'exercice 2 de TD.

1

Définition (Norme associée à un produit scalaire)

On définit une norme sur E (dite *associée au produit scalaire* $(\cdot|\cdot)$) en posant, pour tout vecteur u de E :

$$\|u\| \stackrel{def}{=} \sqrt{(u|u)}$$

1.d

Démonstration

Justification du fait que l'on obtienne bien une norme :

□

Une telle norme est dite *préhilbertienne*, ou *euclidienne* (on emploie parfois ce dernier terme même lorsque E n'est pas de dimension finie). On dit aussi qu'elle *dérive* d'un produit scalaire.

On peut dès lors reformuler l'inégalité de Cauchy-Schwarz de façon géométrique, facile à retenir :

$$\forall (u,v) \in E^2, \quad |(u|v)| \leqslant \|u\| \, \|v\| \, .$$

Comme pour toute norme, on a la *seconde inégalité triangulaire* : $\forall (u,v) \in E^2, |\, \|u\| - \|v\| \,| \leqslant \|u+v\|$ (ou encore $|\, \|u\| - \|v\| \,| \leqslant \|u-v\|$, ce qui rappelle que la norme est une fonction 1-lipschitzienne).

Exemple (Norme euclidienne)

Dans $\mathbb{R}^n$ euclidien canonique, la norme euclidienne est donc donnée par

$$\|u\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}.$$

On reconnaît en particulier la norme usuelle dans le plan $\mathbb{R}^2$ et l'espace $\mathbb{R}^3$.

iii

Pour tous réels α et β, tous vecteurs u et v de E, on a :

$$\|\alpha u + \beta v\|^2 = \alpha^2 \|u\|^2 + 2\alpha\beta(u|v) + \beta^2 \|v\|^2$$

Proposition (Identité du parallélogramme)

On a, pour tout $(u,v) \in E^2$:

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

1.b

Illustration

Proposition (Identités de polarisation) 1.c

Pour tout $(u, v) \in E^2$:

$$\begin{aligned}(u|v) &= \frac{1}{2}\left(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u-v\|^2\right).\end{aligned}$$

Ainsi, grâce à ces identités de polarisation, il y a autant d'information dans la norme euclidienne que dans le produit scalaire : la connaissance de la norme nous permet de retrouver le produit scalaire dont elle est issue.
Cependant, toutes les normes ne sont pas issues d'un produit scalaire (une condition nécessaire étant qu'elle vérifie l'identité du parallélogramme) :

À un produit scalaire, on peut associer une norme, et donc une distance, donnée par

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad d(x, y) \stackrel{def}{=} \|y - x\|$$

2. Orthogonalité

2.1. Familles orthonormales et orthogonales

Comme dans tout evn, un vecteur u de E est dit *unitaire* (ou encore *normé*) si $\|u\| = 1$.
Si u est un vecteur non nul de E, on appelle *normalisé* de u le vecteur $\frac{u}{\|u\|}$.

Définition (Vecteurs orthogonaux) 2.a

Deux vecteurs u et v de E sont dits *orthogonaux* si $(u|v) = 0$. On note alors parfois $u \perp v$.

Exemple (Vecteurs orthogonaux)

(1) Le seul vecteur orthogonal à lui-même est le vecteur nul.

(2) Le seul vecteur orthogonal à tous les vecteurs de E est donc *a fortiori* le vecteur nul.

(3) Pour le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}[X]$, des polynômes respectivement pair et impair sont orthogonaux.

(4) Pour le produit $(f,g) \mapsto \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\mathrm{d}t$ sur $\mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$, des fonctions respectivement paire et impaire sont orthogonales.

(5) Si on munit E de deux produits scalaires, deux vecteurs peuvent être orthogonaux pour l'un mais pas pour l'autre.

i

Définition (Famille orthogonale, orthonormée)

On dit qu'une famille $(u_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est *orthogonale* si les u_i sont orthogonaux deux à deux. Si de plus ils sont unitaires, la famille est alors dite *orthonormale* (ou *orthonormée*).

2.b

Exercice (Suite orthogonale)

On munit l'espace E des fonctions continues 2π-périodiques du produit scalaire $(f,g) \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi]} fg$.
On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $e_{2n}\ : t\mapsto \cos(nt)$ et $e_{2n+1}\ : t\mapsto \sin(nt)$.
Montrer que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale de E.

2

Proposition (Expression d'un produit scalaire en base orthonormée)

On suppose que E est un espace euclidien de dimension n, et que $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ est une base orthonormée de E. Soit $u = \sum_{i=1}^n u_i e_i$ et $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$ des vecteurs de E donnés avec leurs décompositions respectives dans $\mathcal{B}$. On a :

$$(u|v) = \sum_{i=1}^n u_i v_i.$$

En particulier,

$$\|u\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2}.$$

2.a

Démonstration

$\square$

Attention ! Cette expression du produit scalaire *dans une base orthonormée* est très agréable, mais cette formule n'est *pas valable* pour une base quelconque.

Expression matricielle d'un produit scalaire en base orthonormée

2.1

Si on note, dans le contexte de la proposition précédente, $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$,

on a

$$(u|v) = \operatorname{tr}(({}^tU)V)$$

et même, si on identifie $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}$ (ce que l'on fera souvent en pratique) :

$$(u|v) = ({}^tU)V$$

Exercice (Produit scalaire orthonormalisant une base)

3

Montrer, réciproquement, que si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, de base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, et si on pose

$$(u|v) = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

pour tous vecteurs $u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i$ et $v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i$ de E, alors on obtient un produit scalaire sur E, pour lequel $\mathcal{B}$ est orthonormale.

Ainsi, pour toute base d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle, il existe un unique produit scalaire rendant cette base orthonormée.

D'ailleurs, ces résultats s'étendent sans difficulté à un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension infinie.

Exemple (Familles orthonormées)

ii

Dans tous les exemples de produits scalaires canoniques (*i.e.* dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}[X]$), la base canonique de l'espace sous-jacent est une base orthonormée, d'où leur nom.

La famille $(u_i)_{i\in I}$ est orthonormale si et seulement si pour tout $(i,j) \in I^2$, on a $(u_i|u_j) = \delta_{i,j}$.

Proposition (Liberté d'une famille orthogonale de vecteurs non nuls)

2.b

Une famille orthogonale constituée de vecteurs tous non nuls est libre. En particulier, toute famille orthonormée de vecteurs de E est libre.

Démonstration

□

Ainsi, une base orthonormée de E euclidien de dimension n n'est rien d'autre qu'une famille orthonormée, de cardinal n.

Autrement dit, $(e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormée de E (de dimension n) si et seulement si $n = p$ et

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad (e_i|e_j) = \delta_{i,j}$$

Proposition (Relation de Pythagore) 2.c

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille orthogonale. On a, pour toute sous-famille finie J de I :

$$\left\|\sum_{i\in J} u_i\right\|^2 = \sum_{i\in J} \|u_i\|^2$$

Démonstration

□

Réciproquement, si $\|u_1+u_2\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2$, alors (u_1, u_2) est orthogonale. Cependant, on peut trouver trois vecteurs u_1, u_2, u_3 tels que

$$\|u_1+u_2+u_3\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 + \|u_3\|^2$$

sans que ces vecteurs soient orthogonaux.

La relation de Pythagore permet de retrouver la proposition 2.b.

La question de l'existence d'une base orthonormale se pose naturellement, ainsi que celle de l'obtention d'une telle base.

2.2. Bases orthonormées d'un espace euclidien

Soit $a \in E$. L'application $\varphi_a \;: x \mapsto (a|x)$ est une forme linéaire sur E. Son noyau est E si $a = 0_E$, et l'hyperplan constitué des vecteurs orthogonaux à a sinon.

De plus, l'application

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & E & \to & E^* \\ & a & \mapsto & \varphi_a \end{array}$$

est linéaire injective de E sur son dual $E^* = \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$.

Proposition (Isomorphisme explicite entre un espace euclidien et son dual) 2.d

On suppose E euclidien. L'application Φ est alors un isomorphisme de E sur E^*. En particulier, pour toute forme linéaire f sur E, il existe un unique vecteur a de E tel que $f = \varphi_a$, *i.e.*

$$\forall x \in E, \quad f(x) = (a|x).$$

Démonstration

□

Exemple (Produit vectoriel) — iii

Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique, fixons deux vecteurs u et v. L'application $x \mapsto \det(u, v, x)$ (det désigne le déterminant dans la base canonique) est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$, ce qui conduit à la définition du *produit vectoriel* $u \wedge v$.
On a en particulier $\det(u, v, u \wedge v) = (u \wedge v | u \wedge v) = \|u \wedge v\|^2 \geqslant 0$.

Ainsi, dans un espace euclidien, toute forme linéaire est le produit scalaire par un vecteur donné, et ce vecteur est unique. En dimension infinie, une forme linéaire n'est pas nécessairement le produit scalaire par un vecteur donné :

Proposition (Existence d'une base orthonormale dans un espace euclidien) — 2.e

Tout espace euclidien de dimension non nulle admet une base orthonormée.

Démonstration

Par récurrence (pour l'hérédité, considérer un vecteur unitaire et l'hyperplan des vecteurs qui lui sont orthogonaux).

□

Proposition (Décomposition d'un vecteur dans une base orthonormée) — 2.f

Soit E un espace euclidien, de base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Pour tout vecteur u de E, on a :

$$u = \sum_{i=1}^{n} (u|e_i) e_i.$$

Démonstration

□

Attention ! Cette formule n'est *a priori* valable que si la base est *orthonormée*.

Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E, et si $f \in \mathcal{L}(E)$, alors la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est égale à
$$((f(e_j)|e_i))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

2.3. Orthogonal d'une partie de E

F désigne ici un sous-espace vectoriel de E.

Définition (Orthogonal d'une partie)

Soit A une partie de E. On appelle *orthogonal* de A (dans E), et on note $A^\perp$ ou A°, l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à tous les vecteurs de A :
$$A^\perp \overset{def}{=} \{x \in E,\ \forall\, a \in A, (a|x) = 0\}$$
Deux parties non vides A et B de E sont dites *orthogonales* si
$$\forall (a, b) \in A \times B, \quad (a|b) = 0$$

2.c

Illustration

Exemple (Orthogonal d'une partie)

(1) $\{0_E\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0_E\}$.
(2) Les sous-espaces de $\mathcal{C}^0([-1, 1])$ constitués respectivement des fonctions paires et impaires sont orthogonaux pour le produit scalaire $(f, g) \mapsto \int_{[-1,1]} fg$.
(3) Si deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont supplémentaires et orthogonaux, alors on obtient une base orthonormée de E en concaténant des base orthonormées de F et de G.

iv

Proposition (Propriétés de l'orthogonal)

Soit A et B deux parties de E.

(1) A et B sont orthogonales si et seulement si $A \subset B^\perp$ (si et seulement si $B \subset A^\perp$).
(2) Si $A \subset B$, alors $B^\perp \subset A^\perp$.
(3) $A \subset A^{\perp\perp}$.
(4) $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E (même si A n'en est pas un).
(5) $A^\perp = (\mathrm{Vect}(A))^\perp$. En particulier, si F est engendré par $(f_i)_{i\in I}$, alors $u \in F^\perp$ si et seulement si u est orthogonal à tous les vecteurs f_i, $i \in I$.
(6) F et $F^\perp$ sont en somme directe.

2.g

Démonstration

□

3. Projecteurs orthogonaux

3.1. Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

Soit F un sous-espace vectoriel de E. On sait que $F^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E, en somme directe avec F. Cependant, F et $F^{\perp}$ ne sont pas toujours supplémentaires :

Définition (Supplémentaire orthogonal) 3.a

Lorsque $F \oplus F^{\perp} = E$, on appelle $F^{\perp}$ le *supplémentaire orthogonal* de F (dans E).

Proposition (Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace de dimension finie) 3.a

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Les sous-espaces F et $F^{\perp}$ sont alors bien supplémentaires.

Démonstration

Raisonner par conditions nécessaires, en utilisant une base orthonormée de F (puis faire la synthèse).

□

Définition (Projecteur orthogonal, projection orthogonale)

Lorsque F et $F^\perp$ sont supplémentaires, on définit le *projecteur orthogonal* sur F comme le projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$: c'est un endomorphisme de E. On le note p_F.
p_F induit un morphisme de E sur F, appelé *projection orthogonale* de E sur F.

3.b

Asymétrie des rôles entre F et son orthogonal

On présume que si F et $F^\perp$ sont supplémentaires, alors on peut définir le projecteur orthogonal $p_{F^\perp}$ sur $F^\perp$, et que de plus

$$p_F + p_{F^\perp} = \operatorname{Id}_E$$

Cela est tout à fait correct, et on peut d'ailleurs aussi observer que dans ce cas, $F^{\perp\perp} = F$.
Cependant, il est aussi possible que $F^\perp$ et $F^{\perp\perp}$ soient supplémentaires, sans que F et $F^\perp$ le soient (ce qui revient à dire que l'inclusion de F dans $F^{\perp\perp}$ est stricte).
Dans ce cas, on peut parler de $p_{F^\perp}$ mais pas de p_F.
Le travail précédent montre toutefois que si F est de dimension finie, ce problème ne se pose pas.

3.1

On suppose désormais F de dimension finie, et on considère une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de F

Proposition (Expression du projeté orthogonal dans une base orthonormale)

Le projecteur orthogonal p_F sur F est donné, pour tout $x \in E$, par :

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)e_i$$

3.b

Démonstration

$\square$

PC : polariseur, loi de Malus.
Soit $u \in E$. On rappelle que la distance de u à F est notée $d(u, F)$, et définie par

$$d(u, F) = \inf\{\|u - x\|, x \in F\}$$

Proposition (Interprétation de la distance d'un vecteur à un sous-espace) 3.c

Le projeté orthogonal de u sur F est l'unique élément v de F qui minimise la distance de u à F, *i.e.* tel que

$$\forall x \in F, \quad d(u, v) \leqslant d(u, x)$$

En particulier :

$$d(u, F) = \|u - p_F(u)\| = \|p_{F^\perp}(u)\|.$$

Illustration

Démonstration

$\square$

Calcul pratique de distance

Comment, en pratique, calculer la distance d'un vecteur u à un sous-espace F ? Déjà, si on travaille en dimension finie, comme $d(u,F) = \|p_{F^\perp}(u)\|$, il est parfois avantageux de s'intéresser à $F^\perp$ (si par exemple F est un hyperplan et qu'il est facile de trouver un vecteur non nul de $F^\perp$).
Ensuite, on peut tenter de trouver une base orthonormée $(e_1,\dots,e_p)$ de F, afin d'exprimer $p_F(u)$. On a même un raccourci dans ce cas, car le théorème de Pythagore permet de donner la formule :

$$d(u,F)^2 = \|u\|^2 - \sum_{i=1}^{p} (u|e_i)^2.$$

Une autre approche consiste à déterminer $p_F(u)$ sans chercher une base orthonormée de F, mais en le caractérisant comme unique vecteur v de F tel que $u-v$ soit orthogonal à tout vecteur de F : on prend alors une base (non orthonormée) $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_p)$ de F, on décompose v dans $\mathcal{B}$: $v = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$, et on résout le système d'inconnues $\lambda_1,\dots,\lambda_p$, d'équations $(v|e_j) = (u|e_j)$ (j parcourant $[\![1,p]\!]$). Une fois v déterminé, on calcule $d(u,F) = \|u-v\|$.

3.2

Exercice (Un calcul de distance)

1 Pour le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, calculer la distance de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ à $F = \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, puis à $G = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

Réponse : $1/\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$ respectivement.

2 Pour le produit scalaire $(f,g) \mapsto \int_{[-1,1]} fg$ sur $\mathcal{C}^0([-1,1])$, calculer la distance de $g : t \mapsto t^3$ et sin à $\mathrm{Vect}(f_0,f_1,f_2)$, où $f_k\ (t) = t^k$ pour tout $(k,t) \in [\![0,2]\!] \times [-1,1]$.

4

Proposition (Inégalité de Bessel)

Pour tout $x \in E$:

$$\sum_{i=1}^{n} (x|e_i)^2 \leqslant \|x\|^2$$

3.d

Démonstration

$\square$

Par conséquent, si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormée, la série $\sum (x|e_n)^2$ est toujours convergente, et sa somme est inférieure ou égale à $\|x\|^2$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x|e_n)^2 \leqslant \|x\|^2$$

3.2. Suites orthonormales de vecteurs d'un espace préhilbertien réel

Dans cette sous-section, E est un espace préhilbertien de dimension infinie.

Définition (Suite totale)

Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de E. On dit que cette suite est *totale* si $\mathrm{Vect}(e_n, n\in\mathbb{N})$ est dense dans E :

$$\overline{\mathrm{Vect}(e_n, n\in\mathbb{N})} = E$$

3.c

Proposition (Approximation par des projetés orthogonaux)

Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite orthonormale totale d'éléments de l'espace préhilbertien E.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, soit p_n le projecteur orthogonal de E sur $\mathrm{Vect}(e_0,\dots,e_n)$.
Pour tout x de E, $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors vers x, et

$$\textit{(Égalité de Parseval)} \quad \sum_{n=0}^{\infty}(e_n|x)^2 = \|x\|^2$$

3.e

Démonstration

Raisonnons par l'absurde, en supposant l'existence de x dans E tel que $(p_n(x))$ ne converge pas vers x. Posons, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $F_n \overset{def}{=} \mathrm{Vect}(e_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$d(x,F_n) = \|x-p_n(x)\|$$

et, comme $F_n\subset F_{n+1}$,

$$d(x,F_{n+1}) \leqslant d(x,F_n)$$

Par conséquent, la suite réelle positive $(d(x,F_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, et ne tend pas vers 0 (car $(p_n(x))_n$ ne tend pas vers x) : $(d(x,F_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\alpha>0$.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, tout $y\in F_n$, on a

$$0<\alpha\leqslant d(x,y)$$

donc pour tout $y\in\cup_{n\in\mathbb{N}}F_n$:

$$0<\alpha\leqslant d(x,y)$$

or $\cup_{n\in\mathbb{N}}F_n = \mathrm{Vect}(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donc

$$0<\alpha\leqslant d(x,\mathrm{Vect}(e_n)_{n\in\mathbb{N}})$$

puis

$$0<\alpha\leqslant d(x,\overline{\mathrm{Vect}(e_n)_{n\in\mathbb{N}}})$$

d'où une contradiction avec le fait que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit totale.
Pour tout $x\in E$, on a bien convergence de $(p_n(x))_n$ vers x. En particulier, l'application $x\in E\mapsto\|x\|^2$ étant continue, on a convergence de $(\|p_n(x)\|^2)_n$ vers $\|x\|^2$, ce qui donne l'égalité de Parseval (grâce au caractère orthonormé de $(e_n)_n$).

□

Il faut bien noter que la formule de Parseval n'est valable que sous la double hypothèse que la suite (e_n) soit *totale* et *orthonormale*.

Exemple (Suite totale) i

Soit $w : [a,b] \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction continue, où $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. On munit $E \overset{def}{=} \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ du produit scalaire donné, par

$$(f|g) \overset{def}{=} \int_{[a,b]} fgw$$

pour tout $(f,g) \in E^2$.
La famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ (où l'on a identifié un polynôme avec la fonction qu'il induit sur $[a,b]$) est totale.
En effet, pour tout $f \in E$, on a $\|f\| \leqslant \sqrt{(b-a)\,\|w\|_{\infty,[a,b]}}\,\|f\|_{\infty,[a,b]}$, et le théorème de Weierstrass permet de conclure : pour $f \in E$, il existe une suite (P_n) de polynômes telle que $(\|f-P_n\|_{\infty,[a,b]})$ tende vers 0, et donc telle que $(\|f-P_n\|)$ tende également vers 0.

Exercice (Exemples de suites de polynômes orthogonaux) 5

On reprend les notations de l'exemple (6) p. 446.
Montrer que les familles suivantes sont des bases orthogonales de $\mathbb{R}[X]$ pour la structure préhilbertienne indiquée.
1 Pour $I = [-1,1]$ et $w = 1$, $L_n = ((X^2-1)^n)^{(n)}$ (ce sont les *polynômes de Legendre*).
2 Pour $I =]-1,1[$ et $w : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, T_n défini par $T_n(t) = \cos(n \arccos(t))$ pour tout $t \in [-1,1]$ (ce sont les *polynômes de Tchebychev*).
3 Pour $I = \mathbb{R}$ et $w : t \mapsto e^{-t^2}$, H_n défini par $H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(e^{-t^2})$ pour tout réel t (ce sont les *polynômes de Hermite*).

3.3. Projecteurs orthogonaux dans un espace euclidien

E désigne un espace euclidien, F un sous-espace vectoriel de E.

Proposition (Supplémentaire orthogonal) 3.f

On a $E = F \oplus F^\perp$ et $F^{\perp\perp} = F$.

Démonstration

□

Lorsqu'une structure euclidienne intervient, le supplémentaire orthogonal d'un sous-espace est souvent à privilégier par rapport aux autres supplémentaires.

Proposition (Théorème de la base orthonormée incomplète)

Soit E euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Toute famille orthonormée de E se complète en une base orthonormée de E.

3.g

Démonstration

$\square$

La symétrie s_F par rapport à F parallèlement à $F^\perp$ est appelée *symétrie orthogonale* par rapport à F.

Définition (reflexion)

On appelle *réflexion* de E toute symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan de E.

3.d

Illustration

On a $F = \operatorname{Ker}(s_F - \operatorname{Id}_E)$ et $F^\perp = \operatorname{Ker}(s_F + \operatorname{Id}_E)$. En particulier, si r est la réflexion par rapport à H, alors H est l'orthogonal de la droite $\operatorname{Ker}(r + \operatorname{Id}_E)$.

On a $p_{F^\perp} = \operatorname{Id}_E - p_F$, $s_F = 2p_F - \operatorname{Id}_E$, et $s_{F^\perp} = -s_F$. Cela permet par exemple d'exprimer simplement une réflexion :

Exercice (Image d'un vecteur par un projecteur ou une symétrie)

Soit $\vec{u}(3,1)$ et $\vec{w}(1,2)$. Donner l'image de $\vec{w}$ par les projecteurs orthogonaux sur $D = \mathbb{R}\vec{u}$ et $D^\perp$ respectivement, les symétries orthogonales par rapport à D et $D^\perp$ respectivement.

6

Exercice (Expression d'une réflexion)

Soit H un hyperplan de E, d'orthogonal dirigé par un vecteur a.

1 On suppose a unitaire. Exprimer $r(u)$ en fonction de u et de a, où $u \in E$ et r est la réflexion par rapport à H.

2 Donner une formule lorsque a n'est plus supposé unitaire.

3 Exemple : donner l'expression analytique de la réflexion du plan euclidien usuel par rapport à la droite d'équation $3x + 4y = 0$.

7

3.4. Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

On a vu que tout espace euclidien admettait une base orthonormée. On s'intéresse maintenant à un procédé constructif d'une telle base. Plus généralement, étant donné une famille libre $(e_i)_{i\in I}$ indexée par $\mathbb{N}^*$ ou un ensemble de la forme $[\![1, n]\!]$, on se demande comment *rectifier* cette famille afin d'obtenir une famille orthonormée.

Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt part de l'observation élémentaire suivante :

Lemme (Ajout orthonormé à un hyperplan)

Soit E euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose disposer d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_{n-1})$ d'un hyperplan $\mathcal{H}$ de E. Il existe alors exactement deux vecteurs permettant de compléter $\mathcal{B}$ en une base orthonormée de E, et ces deux vecteurs sont opposés.

3.h

Illustration

Proposition (Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt)

Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in I}$ une famille libre de E, où I est égal à $[\![1, n]\!]$ ou $\mathbb{N}^*$. Il existe alors une unique famille orthonormale $\mathcal{C} = (g_i)_{i\in I}$ de E vérifiant :

(1) $\forall k \in I, \quad \mathrm{Vect}(g_1, \dots, g_k) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$.

(2) $\forall k \in I, \quad (g_k|e_k) > 0$.

3.i

Définition (Orthonormalisation de Gram-Schmidt)

Dans ce contexte, on dit que $\mathcal{C}$ est l'*orthonormalisée de (Gram-)Schmidt* de $\mathcal{B}$.

3.e

Illustration

Nous poserons, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $F_k = \mathrm{Vect}(e_i)_{i \in [\![1,k]\!]}$, et p_{F_k} désignera le projecteur orthogonal sur F_k.

Démonstration

Unicité : en procédant par récurrence (finie ou non) sur k, on voit que nécessairement g_1 est le normalisé de e_1, et que si on suppose $g_1, \dots, g_{k-1}$ construits, un vecteur au plus est susceptible de convenir pour g_k, car g_k doit compéter $(g_1, \dots, g_{k-1})$ en une base orthonormée de F_k : deux choix sont possibles, au plus un d'entre eux respecte la condition $(g_k|e_k) > 0$.

□

Montrons maintenant l'existence, en posant $f_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$, et, pour tout $k \in I \setminus \{1\}$:

$$f_k = \frac{e_k - p_{F_{k-1}}(e_k)}{\left\|e_k - p_{F_{k-1}}(e_k)\right\|}$$

(f_k est bien défini car $e_k \notin F_{k-1}$, donc $\left\|e_k - p_{F_{k-1}}(e_k)\right\| \neq 0$).

Démonstration

Existence : vérifions que la famille $(f_k)_{k\in I}$ convient.
Tout d'abord, pour tout $k \in I \setminus \{1\}$, on a $f_k \in F_k$ et $e_k \in F_{k-1} + \mathbb{R}f_k$, donc une récurrence immédiate donne $\mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_k) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k) = F_k$ pour tout $k \in I$.
Ensuite, chaque f_k est unitaire par construction, et, si $k, l \in I$ où $k > l$, alors $f_k \in F_{k-1}^{\perp}$ et $f_l \in F_{k-1}$, donc f_k et f_l sont orthogonaux.
Il reste à établir la propriété (2). Soit $k \in I$. On a bien $(f_k|e_k) > 0$ si $k = 1$, et, si $k \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}
(f_k|e_k) &= \big(f_k|e_k - p_{F_{k-1}}(e_k) + p_{F_{k-1}}(e_k)\big) \\
&= \big(f_k|e_k - p_{F_{k-1}}(e_k)\big) \text{ car } f_k \in F_{k-1}^{\perp} \\
&= \left(\frac{e_k - p_{F_{k-1}}(e_k)}{\left\|e_k - p_{F_{k-1}}(e_k)\right\|} \Big| e_k - p_{F_{k-1}}(e_k)\right) \\
&= \left\|e_k - p_{F_{k-1}}(e_k)\right\| > 0
\end{aligned}$$

□

Orthonormalisation de Gram-Schmidt

On peut donc interpréter ce procédé de manière géométrique : f_1 est le normalisé de e_1, et pour tout $k \in I \setminus \{1\}$, f_k est le normalisé de $e_k - p_{F_{k-1}}(e_k)$ (on n'a conservé que la partie orthogonale à F_{k-1} de e_k, puis on a normalisé).
Par ailleurs, puisque $(f_1, \dots, f_{k-1})$ est une base orthonormée de F_{k-1}, on a

$$p_{F_{k-1}}(e_k) = \sum_{i=1}^{k-1} (e_k|f_i) f_i,$$

de sorte que

$$f_k = \frac{e_k - \sum_{i=1}^{k-1}(e_k|f_i)f_i}{\left\| e_k - \sum_{i=1}^{k-1}(e_k|f_i)f_i \right\|}.$$

3.3

Le procédé d'orthonormalisation de Schmidt est coûteux, c'est pourquoi il constitue un dernier recours : il vaut mieux trouver des informations pertinentes sur la structure euclidienne avant d'y faire appel. Si par exemple on trouve deux supplémentaires orthogonaux (non triviaux) de E, on obtiendra une base orthonormée de E en concaténant des bases respectives de ces sous-espaces.

Si on enlève la condition (2) et si $I = [\![1, n]\!]$, il y a 2^n bases possibles.

En pratique, ce procédé est utilisé dans le cas où $\mathcal{B}$ est une base de E, ou dans le cas où c'est une famille totale de E.

Exercice (Gram-Schmidt et polynômes orthogonaux)

Montrer que si (P_n) désigne la famille des polynômes de Legendre (resp. Tchebychev et Hermite), alors la famille de leurs normalisés $\left(\frac{P_n}{\|P_n\|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est l'orthonormalisée de Schmidt de la base canonique.

8

4. Isométries vectorielles d'un espace euclidien

Soit E un espace vectoriel euclidien non nul.

4.1. Groupe orthogonal

Définition (Endomorphisme orthogonal ou isométrie)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que l'endomorphisme f de E est *orthogonal*, ou que c'est une *isométrie vectorielle* (ou une *isométrie linéaire*) s'il conserve le produit scalaire, *i.e.* :

$$\forall (u, v) \in E^2, \quad (f(u)|f(v)) = (u|v)$$

4.a

Endomorphisme orthogonal

Les endomorphismes orthogonaux de E sont les endomorphismes de E qui « respectent » la structure euclidienne de E, *i.e.* qui respectent le produit scalaire, il est donc naturel de les étudier.

4.1

Proposition (Conservation du produit scalaire, conservation de la norme)

Un endomorphisme f de E est orthogonal si et seulement si il conserve la norme, *i.e.*

$$\forall\, u \in E, \quad \|f(u)\| = \|u\|$$

4.a

Démonstration

□

Cela justifie *a posteriori* la désignation des endomorphismes orthogonaux comme les isométries de E.
Tout endomorphisme orthogonal est en fait un automorphisme :

Exemple (Endomorphismes orthogonaux)

(1) Les applications Id_E et $-\mathrm{Id}_E$ sont des automorphismes orthogonaux de E.

(2) Plus généralement, toute symétrie orthogonale est un automorphisme orthogonal.

(3) Le seul projecteur orthogonal qui soit un endomorphisme orthogonal de E est Id_E.

(4) Si $f \in O(E)$ laisse stable un sous-espace vectoriel F de E, alors f induit un automorphisme orthogonal de F.

i

Exercice (Réflexion échangeant deux vecteurs distincts de même norme)

Soit $a, b \in E$, $a \neq b$, $\|a\| = \|b\|$. Montrer qu'il existe une unique réflexion échangeant a et b.

9

Proposition (Groupe orthogonal d'un espace euclidien)

L'ensemble des automorphismes orthogonaux de E est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$.

4.b

Démonstration

□

Définition (Groupe orthogonal d'un espace euclidien)

L'ensemble des automorphismes orthogonaux de E est appelé *groupe orthogonal* de E et noté $O(E)$.

4.b

Proposition (Caractérisation des automorphismes orthogonaux)

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E, et $f \in \mathcal{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) f est une isométrie.

(2) $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est orthonormée.

4.c

Démonstration

□

On pouvait s'attendre à ce que les endomorphismes orthogonaux (c'est-à-dire les endomorphismes respectant le produit scalaire) soient les endomorphismes « respectant » les « bonnes » bases de E, *i.e.* les bases orthonormées de E.

Corollaire (Caractérisation des automorphismes orthogonaux)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) f est orthogonal.

(2) f transforme chaque base orthonormale de E en une base orthonormale.

(3) f transforme une base orthonormale de E fixée en une base orthonormale.

4.d

Démonstration

□

Définition (Automorphismes orthogonaux positifs ou négatifs)

Soit E un espace euclidien, $f \in O(E)$. On dit que f est un *automorphisme orthogonal positif* ou *automorphisme orthogonal direct*, ou une *rotation (vectorielle)*, ou une *isométrie vectorielle directe* (resp. un *automorphisme orthogonal négatif* ou *automorphisme orthogonal indirect*), si $\det(f) > 0$ (resp. $\det(f) < 0$).
On note $SO(E)$ ou $O^+(E)$, et appelle *groupe spécial orthogonal de* E, l'ensemble des automorphismes orthogonaux positifs de E, $O^-(E)$ l'ensemble des automorphismes orthogonaux *négatifs* de E.

4.c

Démonstration

Justification du fait que $SO(E)$ soit bien un groupe (pour la composition) :

□

Nous verrons plus tard que les seuls déterminants possibles pour un automorphisme orthogonal sont 1 et -1.

Évidemment, $O^-(E)$ n'est pas un groupe pour la composition :

4.2. Matrices orthogonales

n désigne un entier naturel non nul.

Étant donné un endomorphisme f de E euclidien de dimension n, il est intéressant de pouvoir tester matriciellement son orthogonalité. Cela se fait bien si la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ dans laquelle on exprime f est orthonormée. On suppose donc $\mathcal{B}$ orthonormée.

Grâce à l'interprétation matricielle du produit scalaire, on a, en notant $M = M_{\mathcal{B}}(f)$ et $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de M, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$:

$$(f(e_i)|f(e_j)) = ({}^tC_i)C_j$$

Définition (Matrice orthogonale)

On dit que la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *orthogonale* si $({}^tM)M = I_n$.

4.d

Proposition (Lien entre automorphismes orthogonaux et matrices orthogonales)

Soit f un endomorphisme de E, et M la matrice de f dans la base *orthonormale* $\mathcal{B}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) f est un automorphisme orthogonal de E.

(2) M est une matrice orthogonale.

4.e

Démonstration

□

Attention ! Le lien entre automorphismes orthogonaux et matrices orthogonales s'effectue en *base orthonormée*.

On identifie $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^n$ euclidien canonique. On a alors,

$$(f(e_i)|f(e_j)) = ({}^tC_i)C_j = (C_i|C_j)$$

Proposition (Caractérisation de l'orthogonalité d'une matrice)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) M est orthogonale (*i.e.* $({}^tM)M = I_n$.)

(2) $M{}^tM = I_n$.

(3) M est inversible, et $M^{-1} = ({}^tM)$.

(4) Les vecteurs colonnes de M forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ euclidien canonique.

(5) Les vecteurs lignes de M forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ (euclidien canonique).

4.f

Démonstration

□

Chacune de ces propriétés aurait donc permis de définir l'orthogonalité d'une matrice.

Proposition (Matrice de changement de base entre bases orthonormées)

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E, et soit $\mathcal{B}'$ une base de E. La base $\mathcal{B}'$ est orthonormée si et seulement si la matrice de passage $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est orthogonale.

4.g

Démonstration

□

Proposition (Groupe orthogonal d'indice n)

L'ensemble $O(n)$ des matrices orthogonales de taille n est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

4.h

Définition (Groupe orthogonal d'indice n)

Le groupe $O(n)$ est appelé *groupe orthogonal* d'indice n.

4.e

Démonstration

□

Une matrice de $O(n)$ est nécessairement de déterminant 1 ou -1, mais la réciproque est fausse (si $n \geqslant 2$) :

Définition (Groupe spécial orthogonal)

Le *groupe spécial orthogonal d'indice* n, noté $SO(n)$ ou $O^+(n)$, est l'ensemble des matrices orthogonales de taille n de déterminant 1.
On pose également $O^-(n) = \{M \in O(n), \det M = -1\}$.
Les matrices de $SO(n)$ sont dites orthogonales *positives*, Les matrices de $O^-(n)$ sont dites orthogonales *négatives*

4.f

Démonstration

Justification du fait que $SO(n)$ soit un groupe multiplicatif :

□

Bien sûr, $O^-(n)$ n'est pas un groupe multiplicatif :

Échanger deux colonnes (ou deux lignes) d'une matrice orthogonale positive (resp. négative) la change en une matrice orthogonale négative (resp. positive). De même si on change une colonne (ou une ligne) en son opposée.

Exemple (Matrices orthogonales)

(1) La matrice

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

est orthogonale.

(2) Les matrices

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix},$$

où α décrit $\mathbb{R}$, sont orthogonales. Nous verrons plus tard qu'il s'agit des seules de taille 2.

ii

Exercice (Coefficients manquants d'une matrice orthogonale positive)

Compléter la matrice $A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 3 & . \\ -2 & 6 & . \\ 3 & . & . \end{pmatrix}$ en une matrice orthogonale positive. On pourra utiliser la notion de produit vectoriel.

10

Les groupes $O(E)$ et $O(n)$ sont isomorphes par choix d'une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E via $f \mapsto M_{\mathcal{B}}(f)$. De même pour $SO(E)$ et $SO(n)$.

Si $f \in O(E)$, alors $\det f = \pm 1$ (la réciproque est fausse), de sorte que $SO(E) = \{f \in O(E), \det(f) = 1\}$ et $O^-(E) = \{f \in O(E), \det(f) = -1\}$.

$\mathrm{Id}_E \in SO(E)$, mais $-\mathrm{Id}_E$ appartient à $SO(E)$ ou $O^-(E)$ selon la parité de $\dim E$

Exercice (Négativité des réflexions)

Montrer qu'une réflexion est toujours un automorphisme orthogonal négatif.

11

Exercice (Interprétation matricielle du procédé d'orthonormalisation de Schmidt)

Interpréter matriciellement le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

12

4.3. Le groupe orthogonal d'indice 2

Ici E est un plan euclidien (*i.e.* un espace euclidien E de dimension 2). On suppose notre espace orienté, *i.e.* muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ que l'on qualifie de directe : une autre base $\mathcal{B}'$ de E sera dite directe si $\det(P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}) > 0$ et indirecte si $\det(P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}) < 0$

La matrice de passage d'une base orthonormée à une autre est donc orthogonale positive si l'orientation est inchangée, orthogonale négative sinon.

Nous choisissons pour $\mathcal{B}$ une base orthonormée.

L'application det désignera le déterminant dans la base $\mathcal{B}$, mais aussi dans n'importe quelle base orthonormée directe (si $\mathcal{B}'$ est également orthonormée directe, alors $\det_{\mathcal{B}} = \det_{\mathcal{B}'}$).

Pour tout réel α, on note

$$R(\alpha) \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S(\alpha) \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Proposition (Description des éléments du groupe orthogonal d'indice 2)

On a

$$O(2) = \{R(\alpha), \alpha \in \mathbb{R}\} \cup \{S(\alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$$

et

$$SO(2) = \{R(\alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$$

4.i

Démonstration

□

Réduction des rotations vectorielles planes

Le spectre d'une rotation r de E est $\{1\}$ si $r = \mathrm{Id}_E$, $\{-1\}$ si $r = -\mathrm{Id}_E$, et est vide sinon.
Ainsi, $R(\alpha)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si $\alpha \in \pi\mathbb{Z}$, mais dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $R(\alpha)$ est diagonalisable pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

4.2

Proposition (Paramétrage du groupe spécial orthogonal d'indice 2)

L'application $R : \alpha \mapsto R(\alpha)$ est un morphisme surjectif du groupe commutatif $(\mathbb{R}, +)$ sur $SO(2)$, donc $SO(2)$ est commutatif. Le noyau de R est $2\pi\mathbb{Z}$.

4.j

Démonstration

□

Corollaire (Représentation matricielle d'une rotation vectorielle dans une base orthonormée directe)

Soit $r \in SO(E)$. Il existe un réel α, uniquement défini modulo 2π, tel que, pour toute base orthonormée directe $\mathcal{B}'$ de E :

$$M_{\mathcal{B}'}(r) = R(\alpha)$$

4.k

Définition (Mesure d'angle d'une rotation plane)

Dans ce contexte, α est appelé *mesure d'angle de la rotation* r du plan euclidien orienté E.

4.g

Démonstration

$\square$

Toujours dans ce contexte, l'angle de r est la classe d'équivalence de α modulo 2π.
Si on change l'orientation de E, l'angle de r est la classe d'équivalence de $-\alpha$ modulo 2π.

Interprétation des matrices orthogonales négatives d'indice 2

Les automorphismes orthogonaux négatifs du plan euclidien sont donc les réflexions (ici, les hyperplans sont des droites). Plus précisément, si $S(\alpha)$ est la matrice dans (e_1, e_2) de $s \in O(E)$, alors s est la symétrie orthogonale par rapport à $\mathbb{R}(\cos\frac{\alpha}{2}e_1 + \sin\frac{\alpha}{2}e_2)$. En particulier pour tout $s \in O^-(E)$, $\mathrm{Sp}(s) = \{-1, 1\}$.

4.3

Illustration

Exercice ($O(E)$ est engendré par les réflexions)

Montrer que tout produit de deux réflexions est une rotation, et que, réciproquement, toute rotation s'écrit comme produit de deux réflexions.
En particulier, le groupe $O(E)$ est engendré par ses réflexions.
En fait, ce résultat est plus général, on peut utiliser l'exercice de cours 9 page 465 pour le montrer.

13

4.4. Réduction des isométries vectorielles

On revient maintenant au cas général : E est un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$.

Il est clair que le spectre (réel) d'une isométrie est inclus dans $\{-1, 1\}$. On en déduit facilement qu'une isométrie est diagonalisable si et seulement si c'est une symétrie vectorielle (*i.e.* une involution).

On ne peut donc pas espérer pouvoir diagonaliser tous les endomorphismes orthogonaux (le cas de la dimension 2 permettait déjà de le voir).

Proposition (Orthogonal d'un sous-espace invariant par un automorphisme orthogonal)

Soit $\varphi \in O(E)$, et F un sous-espace vectoriel de E stable par φ. Le sous-espace F est alors globalement invariant par φ, *i.e.* $\varphi(F) = F$, et $F^{\perp}$ est également globalement invariant par φ, donc stable.

4.1

Démonstration

$\square$

Lemme de stabilité d'un plan ou d'une droite par un endomorphisme réel

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Il existe alors une droite ou un plan (vectoriels) de E, stable par f.

4.m

Démonstration

Utiliser un facteur irréductible du polynôme minimal de f.

□

Ce lemme est valable pour tout endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$, la structure euclidienne n'intervient pas.

Théorème (Réduction d'une isométrie vectorielle en base orthonormale) 4.n

Soit f une isométrie sur E. Il existe alors une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est de la forme

$$\begin{pmatrix} I_p & & & & \\ & -I_q & & & \\ & & R(\theta_1) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & R(\theta_s) \end{pmatrix}$$

pour certains entiers naturels p, q, s, et où $\theta_1, \ldots, \theta_s$ sont des éléments de $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

Démonstration

□

Exercice (Connexité par arcs du groupe spécial orthogonal) 14

Montrer que $SO(n)$ est connexe par arcs.

4.5. Réduction des isométries vectorielles directes d'un espace euclidien de dimension 3

On s'intéresse maintenant au cas particulier où E est euclidien orienté de dimension 3.

Corollaire (Réduction d'une isométrie vectorielle directe d'un espace euclidien de dimension 3)

On suppose que E est un espace euclidien orienté de dimension 3. Soit $r \in SO(E)$.
Il existe un réel θ et une base orthonormée directe de E dans laquelle la matrice de r est

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.o

Démonstration

□

Définition (Éléments caractéristiques d'une rotation vectorielle de l'espace)

Dans le contexte du corollaire précédent, si $E_1(r)$ est une droite vectorielle Δ orientée par un vecteur unitaire u, alors la droite $E_1(r)$ est appelée *axe* de la rotation r (orienté par u).
De plus, θ est uniquement défini modulo 2π, et indépendant de la base orthonormée directe de la forme (e_1, e_2, u) dans laquelle la matrice de r est réduite. Le réel θ est appelé *mesure d'angle* de la rotation r d'axe Δ orienté par u.

4.h

Bien sûr, orienter Δ par $-u$ conduit à changer θ en $-\theta$.
La forme réduite justifie donc *a posteriori* la terminologie « rotation ».

Illustration

Toujours dans le contexte du corollaire précédent, si $E_1(r)$ n'est pas une droite, alors $r = \mathrm{Id}_E$. Si $r \neq \mathrm{Id}_E$, on peut trouver θ (modulo 2π) en considérant la trace de r (qui donnera $\cos(\theta)$, et en regardant l'effet de r sur un vecteur non situé sur l'axe de r (ce qui donnera le signe de $\sin(\theta)$).

Exercice (Éléments caractéristiques d'une rotation (Banque CCP MP 15)) 15

Soit

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que $A \in \mathrm{SO}(3)$, et déterminer les éléments caractéristiques de l'endomorphisme r de $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique orienté associé.

SI : liaisons entre solides.

Étude des isométries vectorielle dans un espace euclidien orienté de dimension 3 (culturel) 4.4

Si f est une isométrie (vectorielle) d'un espace euclidien orienté de dimension 3, la détermination de $m \overset{def}{=} \dim(E_1(f))$ donne des informations intéressantes sur f :

(1) si $m = 3$, alors $f = \mathrm{Id}_E$.

(2) si $m = 2$, alors f est une réflexion (et donc un automorphisme orthogonal négatif).

(3) si $m = 1$, alors f est une rotation.

(4) si $m = 0$, alors f est la composée commutative d'une réflexion et d'une rotation, donc un automorphisme orthogonal négatif.

5. Endomorphismes symétriques d'un espace euclidien

5.1. Définition, caractérisation

Ici, E est un espace euclidien.

Définition (Endomorphisme symétrique d'un espace euclidien) 5.a

Un endomorphisme u de E est dit *symétrique* si, pour tout $(x, y) \in E^2$:

$$(u(x)|y) = (x|u(y))$$

Nous noterons $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de E.

Endomorphismes symétriques 5.1

$\mathcal{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

Exemple (Endomorphismes symétriques) i

(1) Les symétries orthogonales et les projecteurs orthogonaux sont des endomorphismes symétriques. Attention cependant, *un projecteur orthogonal n'est pas une symétrie vectorielle* (*i.e.* un endomorphisme involutif), sauf dans le cas exceptionnel où il est égal à Id_E.

(2) Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par un endomorphisme symétrique u, alors u induit un endomorphisme symétrique sur F.

Exercice (Image et noyau d'un endomorphisme symétrique)

Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Montrer que $\mathrm{Im}(u)$ et $\ker(u)$ sont supplémentaires orthogonaux dans E.

16

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. L'endomorphisme u de E est symétrique si et seulement si

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad (u(e_i)|e_j) = (e_i|u(e_j))$$

Proposition (Lien avec les matrices symétriques réelles)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, et soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) u est symétrique.

(2) La matrice M de u dans $\mathcal{B}$ est symétrique.

5.a

Démonstration

□

Attention, le lien entre endomorphisme symétrique et matrice symétrique se fait en *base orthonormée.*

Corollaire (Lien avec les matrices symétriques réelles)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) u est symétrique.

(2) Il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est symétrique.

(3) Dans toute base orthonormée de E, la matrice de u est symétrique.

5.b

Démonstration

□

Non stabilité de la symétrie d'un endomorphisme par composition

L'ensemble des endomorphismes symétriques de E (supposé de dimension supérieure ou égale à 2) n'est pas stable par composition. D'ailleurs, si $u, v \in \mathcal{S}(E)$, on peut vérifier que $u \circ v \in \mathcal{S}(E)$ si et seulement si $u \circ v = v \circ u$.

5.2

Proposition (Caractérisation des projecteurs orthogonaux)

Soit p un projecteur de E. Ce projecteur est orthogonal si et seulement si p est symétrique.

5.c

Démonstration

$\square$

Exercice (Une autre caractérisation des projecteurs orthogonaux)

Soit E un espace vectoriel euclidien et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Montrer l'équivalence des assertions suivantes :

(1) p est un projecteur orthogonal.

(2) $\forall x \in E, \quad \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

17

Illustration

5.2. Réduction des endomorphismes symétriques (théorème spectral)

Proposition (Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable)

Soit F un sous-espace vectoriel de E, stable par un endomorphisme symétrique u. Le sous-espace $F^\perp$ est alors également stable par u.

5.d

Démonstration

$\square$

Lemme d'orthogonalité de sous-espaces propres pour un endomorphisme symétrique

Deux sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

5.e

Démonstration

$\square$

Lemme d'existence d'une valeur propre pour un endomorphisme symétrique

Soit u un endomorphisme symétrique de l'espace euclidien E de dimension $n \geqslant 1$. Le spectre (réel) de u est alors non vide.

5.f

Démonstration

Utiliser le lemme 4.m, traiter le cas $n = 2$ à la main.

$\square$

Théorème spectral

Si u est un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E, alors E est somme directe orthogonale des sous-espaces propres de u ; de manière équivalente, il existe une base orthonormale diagonalisant u.

5.g

Démonstration

□

Interprétation matricielle du théorème spectral

Matriciellement, le théorème spectral peut s'exprimer ainsi : pour toute matrice symétrique réelle $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice diagonale *réelle* D et une matrice orthogonale P telles que

$$M = P^{-1}DP =^t PDP$$

5.3

SI : matrice d'inductance, matrice d'inertie.

Exercice (Quand un endomorphisme est à la fois orthogonal et symétrique)

Montrer de plusieurs façons que $f \in \mathcal{L}(E)$ est symétrique et orthogonal si et seulement si c'est une symétrie orthogonale.

18

Attention ! Une matrice symétrique complexe n'est pas toujours diagonalisable.

6. Retour sur l'interprétation matricielle du produit scalaire

Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, et soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E. Étant donné des vecteurs x et y de E, nous noterons X et Y les colonnes de leurs composantes dans $\mathcal{B}$. Nous savons qu'alors

$$(x|y) = ({}^tX)Y$$

Soit f un endomorphisme de E, et soit M sa matrice dans $\mathcal{B}$.

Le fait que f soit orthogonal s'exprime par le fait que, pour tous vecteurs x et y, $(f(x)|f(y)) = (x|y)$, soit, matriciellement, par

$$({}^t(MX)MY = ({}^tX)Y$$

soit encore

$$({}^tX)({}^tM)MY = ({}^tX)Y$$

Le fait que f soit symétrique s'exprime par le fait que, pour tous vecteurs x et y, $(f(x)|y) = (x|f(y))$, soit, matriciellement, par

$${}^t(MX)Y = ({}^tX)MY$$

soit encore

$$({}^tX)({}^tM)Y = ({}^tX)MY$$

Or on peut montrer que deux matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifient

$$\forall (X,Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), ({}^tX)AY = ({}^tX)BY$$

si et seulement si $A = B$.

On retrouve ainsi matriciellement que $f \in O(E)$ si et seulement si ${}^tMM = I_n$ et que $f \in \mathcal{S}(E)$ si et seulement si ${}^tM = M$.

Exercice (Expression matricielle d'un projecteur orthogonal)

1 Soit $\mathcal{C} = (c_1, \ldots, c_n)$ une base orthonormée de E euclidien, F un sous-espace vectoriel de E dont $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ est une base orthogonale.
On note $(X_1, \ldots, X_p) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ la matrice de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{C}$.
Montrer que la matrice P de p_F dans $\mathcal{C}$ est donnée par

$$P = \sum_{i=1}^{p} \frac{X_i({}^tX_i)}{({}^tX_i)X_i}.$$

19

Indication : Utiliser la formule de projection orthogonale en base orthonormée, et s'inspirer de la preuve matricielle du fait que $A^2 = \operatorname{tr}(A)A$ lorsque A est de rang 1.

2 Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique, on considère le plan H d'équation $x + 2y + 3z = 0$.

i Vérifier que $\vec{n}(1, 2, 3)$ est un vecteur normal non nul à H.

ii Donner les matrices dans la base canonique du projecteur orthogonal p_H sur H et de la réflexion r_H par rapport à H.

7. Feuille de TD 16 : Espaces préhilbertiens réels

7.1. Structure préhilbertienne, distance à un sous-espace

Exercice 1 (Base orthonormée) — 0 et 4

Soit E un espace euclidien de dimension n et soit $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs de E tels que

$$\forall\, x \in E, \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} < x, e_i >^2 .$$

1 On suppose les vecteurs de $\mathcal{F}$ unitaires. Montrer que $\mathcal{F}$ est une base orthonormée de E.

2 Montrer, sans supposer les vecteurs de $\mathcal{F}$ unitaires, que $\mathcal{F}$ est une base orthonormée de E.

Exercice 2 (Produit scalaire canonique matriciel) — 1

Pour tous éléments A, B de $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit $(A \mid B) = \mathrm{tr}({}^tAB)$.

1 Vérifier que c'est un produit scalaire. Pourquoi l'appelle-t-on produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Remarque : la même formule définit plus généralement un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, dit *canonique*.

2 Déterminer l'orthogonal de l'espace des matrices scalaires, des matrices symétriques.

3 Soit $P \in O(n)$. Montrer que les applications

$$\phi_P : A \longmapsto AP \text{ et } \psi_P : A \longmapsto P^{-1}AP$$

sont orthogonales.

4 Réciproquement, si ϕ_P ou $\psi_P \in O(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, est-ce que $P \in O(n)$? (réponses différentes pour ϕ et ψ).

Exercice 3 (Calculs de distances) — 0

1 *(X PC 09)*On munit $E = \mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire : Pour $P = \sum_i a_iX^i$ et $Q = \sum_i b_iX^i$, $(P|Q) = \sum_i a_ib_i$.
Soit $H = \{P \in E, P(1) = 0\}$.

i Trouver une base orthonormale de H.

ii Calculer $d(X, H)$.

2 Soit $\alpha = \inf\{\int_{-1}^{1} \left(ax^2 + bx + c - |x|\right)^2 dx : a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

i Déterminer un espace vectoriel euclidien $(E, (\cdot, \cdot))$, un sous-espace vectoriel F de E et $v \in E$ tel que $\alpha = d(v, F)^2$.

ii Déterminer $p \in F$ tel que $\alpha = \mathrm{d}(v, p)^2$ et calculer α.

Réponse : $\alpha = \frac{1}{96}$.

3 *(Mines MP 09)* Déterminer min $\left\{\int_{-1}^{1}(t^4 - at^2 - bt - c)^2 \mathrm{d}t, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\right\}$.

Réponse : $\frac{128}{11025}$.

4 *(Mines MP 09)* Soit $f\ : t \in]0, 1] \mapsto t\ln(t)$, prolongée par continuité en 0. Calculer $\min\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (f(t) - at - b)^2 \mathrm{d}t$ et déterminer les couples (a, b) qui réalisent ce minimum.

Réponse : le minimum cherché vaut $\frac{1}{108}$.

Exercice 4 (Majoration du déterminant) 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mu = \max |a_{i,j}|$. Montrer :

$$|\det(A)| \leqslant n^{n/2}\mu^n.$$

Exercice 5 (Endomorphismes préservant l'orthogonalité) 2

Soit E un espace euclidien. Quels sont les endomorphismes f de E tels que si $< x, y >= 0$, alors $< f(x), f(y) >= 0$.

Exercice 6 (Sous-espace sans supplémentaire orthogonal) 2

Donner un exemple de sous-espace n'admettant pas de supplémentaire orthogonal.

Exercice 7 (Endomorphisme de trace nulle dans un espace euclidien) 2

Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E, de trace nulle. Montrer l'existence d'une base orthonormée dans laquelle u a une matrice de diagonale nulle.

Exercice 8 (Perturbation d'une base orthonormée préservant la liberté) 3

(Mines-Ponts PSI 10) Soit E euclidien, de base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$, $v_1, \dots, v_n$ tels que $\|v_1\| + \dots + \|v_n\| < 1$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose $w_i = e_i + v_i$. montrer que $(w_1, \dots, w_n)$ est une base de E.

Exercice 9 (Condition suffisante pour qu'une famille soit génératrice) 3

Soit E euclidien de dimension n, $u_1, \dots, u_{n+1} \in E$ tels que pour tous $i, j \in [\![1, n+1]\!]$ distincts, $< u_i, u_j >< 0$.

1 Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ des scalaires non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i u_i = 0$.
Montrer que les λ_i non nuls sont tous de même signe, puis que les λ_i sont tous non nuls.

2 Montrer que $(u_1, \dots, u_n)$ engendre E.

Exercice 10 (Vecteurs de la sphère unité et produit scalaire contraint *(X MP 09)*) 4

Soit $\lambda < 1$ et A une partie de la sphère unité de E euclidien telle que pour tout couple (a, a') d'éléments distincts de A, on ait : $< a, a' >\leqslant \lambda$. Montrer que A est finie.

7.2. Isométries, matrices orthogonales

Exercice 11 (Inégalité entre coefficients pour une matrice orthogonale) 0

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\left|\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}\right| \leqslant n \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} |a_{i,j}| \leqslant n^{3/2},$$

et discuter des cas d'égalité.

Exercice 12 (Matrices orthogonales à coefficients entiers) 0

L'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \cap \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est-il fini ? Le cas échéant, donner son cardinal.

Exercice 13 (Matrice d'une symétrie orthogonale) 0

Donner la matrice canoniquement associée à la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\mathcal{D}$ donnée par le système :

$$\begin{cases} x - y + z & = & 0 \\ x + y + 2z & = & 0 \end{cases}$$

Exercice 14 (Expressions analytiques d'isométries de l'espace) 0

Donner l'expression analytique (dans $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique orienté) de

1 La rotation d'axe orienté par $(1, 0, -1)$, d'angle de mesure $\frac{2\pi}{3}$.

2 La rotation d'axe orienté par $(1, 1, 1)$, d'angle de mesure $\frac{\pi}{4}$.

3 La réflexion par rapport au plan d'équation $2x + 2y + z = 0$.

Exercice 15 (Transformations de l'espace) 0

Reconnaître les transformations géométriques linéaires dont les matrices respectives dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ sont :

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -6 \\ 3 & -6 & -2 \\ -6 & -2 & -3 \end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -7 & 4 & -4 \\ 4 & -1 & -8 \\ -4 & -8 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & -8 \\ 4 & -8 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 16 (Équivalences de propriétés d'un automorphisme orthogonal) 2

(CCP MP 13) Soit $f \in O(E)$. Montrer que les énoncés suivants sont équivalents :

1 $f \circ f = -\mathrm{Id}_E$.

2 $\forall x \in E, (f(x)|x) = 0$.

3 $\forall x, y \in E, (f(x)|y) = -(x|f(y))$.

Exercice 17 (Matrice circulaire de rotation) 3

1 Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$. Montrer que M est une matrice de rotation si et seulement si a, b, c sont les racines d'un polynôme de la forme $P = X^3 - X^2 + \lambda$ avec $\lambda \in \left[0, \frac{4}{27}\right]$.

2 Soit G l'ensemble des éléments de SO(3) dont les éléments sont de la forme $\begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$. G est-il un sous-groupe de $SO(3)$? Est-il fini ?

Exercice 18 (Matrices orthogonales préservant $\mathbb{R}_+^n$ (ENS MP 10)) 3

Quelles sont les $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $M(\mathbb{R}_+^n) \subset \mathbb{R}_+^n$.

Exercice 19 (Chemin dérivable dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$) 3

Soit n impair, $\Phi\ : t \in \mathbb{R} \to \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ dérivable. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\Phi'(t) \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 20 (Matrices égales à leur comatrices) 4

Quelles sont les matrices (carrées réelles) égales à leur comatrice ?

7.3. Endomorphismes et matrices symétriques

Exercice 21 (Équation matricielle avec la transposée) 0

(CCP MP 13) Déterminer les $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M^t MM = I_n$.

Exercice 22 (Équation d'inconnue matricielle) 0

Quels sont les éléments A de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tels que $\mathrm{tr}(A)^2 = n\,\mathrm{tr}(A^2)$.

Exercice 23 (Détermination du spectre d'un endomorphisme symétrique) 0

(CCP MP 13) Soient $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ non tous nuls et $A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & \cdots & a_n \\ a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

1 Montrer que A est diagonalisable.
2 Quel est le rang de A ? Qu'en déduit-on sur son spectre ?
3 Calculer A^2 et en déduire le polynôme caractéristique de A et son spectre.

Exercice 24 (Réduction d'un endomorphisme symétrique) 0

(CCP MP 13) Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien, (a, b) une famille libre de vecteurs unitaires de E et $f : x \in E \mapsto \langle a, x\rangle a + \langle b, x\rangle b$.

1 Montrer que f est un endomorphisme symétrique de E.

2 Déterminer ses éléments propres.

Exercice 25 (Spectre d'une matrice symétrique) 2

(CCP MP 13) Soient $n \geqslant 2$, $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}^+)$ non identiquement nulle et $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad a_{i,j} = \int_0^1 f(t)\, t^{i+j-2}\mathrm{d}t.$$

1 Montrer : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^t\, XAX \geqslant 0$.

2 Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que ${}^t\, XAX = 0$. Montrer : $X = 0$.

3 Montrer que les valeurs propres de A sont strictement positives.

Exercice 26 (Matrice symétrique à coefficients positifs) 2

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout (i,j) pour lequel $i \neq j$, $a_{i,j} \geqslant 0$.

Pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, on note $\tilde{X} = \begin{pmatrix} |x_1| \\ \vdots \\ |x_n| \end{pmatrix}$.

1 Montrer : $\forall\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^tXAX \leqslant {}^t\,\tilde{X}A\tilde{X}$.

2 Notons λ_0 la plus grande valeur propre de A. Établir

$$\forall\, X \in \ker(A - \lambda_0 I_n), \quad \tilde{X} \in \ker(A - \lambda_0 I_n).$$

Exercice 27 (Quand la composée de deux projecteurs orthogonaux est un projecteur) 4

Soit E un espace euclidien.

Soit p et q deux projecteurs orthogonaux de E. Montrer que p et q commutent si et seulement si $p \circ q$ est un projecteur.

8. Oraux

Exercice 28 (Matrice réelle commutant avec sa transposée (ENSAM PSI 08)) — 0

Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que N est nilpotente et commute avec sa transposée. Montrer que N est nulle.

Exercice 29 (Réduction d'un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}_n[X]$) — 0

(Mines Alès) Montrer que $P \mapsto (1-X^2)P'' - 2XP'$ définit un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)\,Q(t)\mathrm{d}t$. Déterminer ses valeurs propres.

Exercice 30 (Projeté orthogonal sur un plan) — 0

(CCP MP 13) Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. Montrer que $(f,g) \mapsto \int_0^1 x\,f(x)\,g(x)\mathrm{d}x$ définit un produit scalaire sur E. Déterminer le projeté orthogonal de $x \mapsto 1$ sur $\mathrm{Vect}\big(x \mapsto x, x \mapsto x^2\big)$.

Exercice 31 (Étude d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique) — 0

(CCP MP 13) On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire canonique et de la norme associée. Soient u un vecteur unitaire et $D = \mathrm{Vect}(u)$.
Si $a \in \mathbb{R}$, soit $f_a : x \mapsto x - a\,\langle x, u\rangle\, u$.
1 Montrer que f_a est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2 Montrer qu'il existe un unique réel non nul a_0 tel que : $\forall x \in \mathbb{R}^3$, $\|f_{a_0}(x)\| = \|x\|$.
3 Montrer que $\ker(f_{a_0} + \mathrm{Id}\,)$ et $\ker(f_{a_0} - \mathrm{Id}\,)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
4 Déterminer les éléments propres de f_a lorsque $a \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 32 (Réduction d'un endomorphisme symétrique obtenu à partir de colonnes) — 0

(CCP MP 13) Soient A et B deux vecteurs colonnes de $\mathbb{R}^n$ linéairement indépendants, $M = B\,{}^tA + A\,{}^tB$.
1 Montrer que M est diagonalisable.
2 Déterminer le noyau de M, puis les valeurs propres de M.

Exercice 33 (Réflexion envoyant un vecteur sur un autre) — 0

(CCP MP 13) On munit $\mathbb{R}^4$ de sa structure euclidienne canonique. Soient $u = (1,1,0,-1)$ et $v = (0,1,-1,1)$. Donner la matrice dans la base canonique de la réflexion envoyant u sur v.

Exercice 34 (Matrice d'une projection orthogonale) 0

(CCP MP 13) On munit $\mathbb{R}^4$ de sa structure euclidienne canonique. Soient $u = (1,1,1,0)$, $v = (1,0,0,-1)$ et $H = \mathrm{Vect}(u,v)$.

1 Déterminer une base orthonormale de H.

2 Donner la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur H.

Exercice 35 (Encore une matrice d'une projection orthogonale) 0

(CCP MP 13) On munit $\mathbb{R}^4$ de sa structure euclidienne canonique. Donner la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur le plan d'équations : $x+2y+z+2t=0$, $x-y+z-t=0$.

Exercice 36 (Résolution d'une équation matricielle avec trace et transposition) 0

(CCP MP 13) Pour $n \geqslant 3$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit (E) : $X + {}^tX = \mathrm{tr}(X)A$.

1 Résoudre (E) dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ quand A n'est pas symétrique.

2 Lorsque A est symétrique, résoudre (E) dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour $\mathrm{tr}(A) = 2$ et pour $\mathrm{tr}(A) \neq 2$.

Exercice 37 (Matrice de taille 2 dont le carré est la transposée) 0

(CCP MP 13) Soit $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $A \neq I_2$ et $A^2 =^t A$.

1 Trouver un polynôme annulateur de A.

2 Déterminer le spectre de A puis son déterminant.

3 Montrer que A est orthogonale puis donner les valeurs possibles de A.

Exercice 38 (Matrices symétriques admettant un certain polynôme annulateur) 0

(ENSEA) Déterminer les $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : $A^3 - A^2 + A - I_n = 0$.

Exercice 39 (Matrice antisymétrique construite à partir d'une matrice orthogonale) 0

(CCP PSI 08) Soit $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $I_n + M$ soit inversible, et $A = (I_n - M)(I_n + M)^{-1}$. Montrer que A est antisymétrique.

Exercice 40 (Inégalité de Hadamard (Navale MP 13)) 1

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

1 En utilisant l'algorithme de Gram-Schmidt, montrer que A s'écrit OT où O est dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et où T est triangulaire supérieure à termes diagonaux > 0.

2 En déduire $\det A^2 \leqslant \prod_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{i,j}^2\right)$.

Exercice 41 (Une expression du rang d'un projecteur orthogonal (ENSAM PSI 08)) 2

Soit p un projecteur orthogonal d'un espace euclidien E.
1 Montrer que $\|p(x)\|^2 =< p(x), x >$ pour tout $x \in E$.
2 Montrer que, pour toute base orthonormée (e_i) de E :

$$\sum_{i=1}^{n} \|p(e_i)\|^2 = \mathrm{rg}(p).$$

Exercice 42 (Matrice orthogonale définie par blocs à partir d'une autre) 2

(CCP MP 13) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\Phi(A) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{c|c} A & -A \\ A & A \end{array} \right)$.
1 Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\Phi(A)$ appartient à $\mathcal{O}_{2n}(\mathbb{R})$.
2 On suppose que $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Caractériser A. Les matrices A et $\Phi(A)$ sont-elles diagonalisables ?

Exercice 43 (Trace du produit d'éléments respectifs de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$) 2

(Télécom Sud Paris) Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ de valeurs propres positives et $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer : $\mathrm{tr}(AU) \leqslant \mathrm{tr}(A)$.

Exercice 44 (Deux sous-espaces orthogonaux dans un espace de fonctions) 3

(CCP MP 13) Soit $E = \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$. On définit un produit scalaire sur E en posant : $\forall (f,g) \in E^2$, $\langle f, g \rangle = \int_0^1 (f(t)\, g(t) + f'(t)\, g'(t))\, \mathrm{d}t$; on note $\| \ \|$ la norme euclidienne associée. On pose : $\mathcal{V} = \{f \in E,\ f'' = f\}$, $\mathcal{W} = \{f \in E,\ f(0) = f(1) = 0\}$ et
$H = \{f \in E,\ f(0) = \mathrm{ch}\, 1 \quad \text{et} \quad f(1) = 1\}$.
1 Montrer que $(\mathrm{ch}, \mathrm{sh})$ est une base de $\mathcal{V}$.
2 Si $f \in \mathcal{V}$ et $g \in E$, montrer : $\langle f, g \rangle = f'(1)\, g(1) - f'(0)\, g(0)$. Calculer $\langle \mathrm{sh}, \mathrm{ch} \rangle$, $\| \mathrm{sh} \|^2$ et $\| \mathrm{ch} \|^2$.
3 Si $f \in \mathcal{V}$ et $g \in \mathcal{W}$, montrer que $\langle f, g \rangle = 0$.
4 Soit $f \in H$. Calculer $\langle f, \mathrm{sh} \rangle$ et $\langle f, \mathrm{ch} \rangle$. En déduire les coordonnées dans la base $(\mathrm{ch}, \mathrm{sh})$ de la projection orthogonale $\pi_{\mathcal{V}}(f)$ de f sur $\mathcal{V}$.
5 Déterminer $\inf \left\{ \int_0^1 \left(f(t)^2 + f'(t)^2 \right) \mathrm{d}t,\ f \in H \right\}$.
6 Montrer que $\mathcal{W}$ est l'orthogonal de $\mathcal{V}$.

Exercice 45 (Simplification d'une expression liée à un élément de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ (Mines-Ponts PSI (3

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$. Simplifier

$$(1 - \mathrm{tr}(A))^2 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 3} (a_{i,j} - a_{j,i})^2$$

Exercice 46 (Étude des parties mid-convexes dans l^2 (X MP 10)) — 4

Soit l^2 l'espace vectoriel des suites réelles de carré sommable, muni de la norme $u \mapsto \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2}$. Soit F un fermé non vide de l^2 vérifiant la propriété : $\forall (x,y) \in F^2, \frac{x+y}{2} \in F$. On note d l'infimum des normes des éléments de F. Montrer qu'il existe un unique élément de F de norme d.

Exercice 47 ($A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \mapsto \max(\mathrm{Sp}(A))$ est convexe (ENS MP 10)) — 4

Soit $\Phi \; : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ qui à $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ associe sa plus grande valeur propre. Montrer que Φ est convexe.

Exercice 48 (Étude du spectre de la composée de deux projecteurs orthogonaux) — 5

(X MP 10) Soit E un espace euclidien, p et q dans $\mathcal{L}(E)$ deux projecteurs orthogonaux. Montrer que les valeurs propres de $q \circ p$ sont réelles et appartiennent à $[0, 1]$.

CHAPITRE XVII

Équations différentielles linéaires

Sommaire

Dans ce chapitre, on reprend, en l'élargissant considérablement, l'étude des équations différentielles faite en début de MPSI. Il offre l'occasion de mesurer le chemin parcouru, puisqu'il permettra de voir comment les techniques d'algèbre linéaire (y compris la réduction des endomorphismes) contribuent à des questions qui semblaient purement analytiques.

On fixe un evn E de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{K}$ (égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), $\mathcal{B}$ une base de E, et un intervalle I d'intérieur non vide. En pratique, $E = \mathbb{K}^p$, et $\mathcal{B}$ est la base canonique. On peut même ajouter que le plus souvent, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et p vaut 1 ou 2.

$\mathcal{F}(A, B)$ désigne l'ensemble des fonctions de A dans B, $D^n(I, E)$ désigne l'ensemble des fonctions n fois dérivables de I dans E.

On utilisera l'abréviation EDL pour « équation différentielle linéaire ».

L'exposé se scinde naturellement en deux parties principales :

(1) Une partie de résultats très puissants mais théoriques sur la résolution des EDL, centré autour du *théorème de Cauchy linéaire*.

(2) Une partie sur la résolution concrète des EDL, qui regroupe des méthodes variées, pour résoudre des équations différentielles diverses (vectorielles ou scalaires, homogènes ou pas, etc.).

La dichotomie pertinente n'est donc pas tant celle portant sur l'aspect vectoriel ou scalaire des équations, ni sur l'ordre de ces équations, que celle sur la *nature* des informations que fournissent les divers résultats.

Nous étudions des équations différentielles linéaires, la résolution générale des équations différentielle étant encore bien plus compliquée.

Nous n'apporterons pas une réponse exhaustive au problème de la résolution des équations différentielles linéaires : pour certaines d'entre elles, nous ne pourrons exploiter que le théorème de Cauchy linéaire.

1. Généralités et premières conséquences de la linéarité

1.1. Équation différentielle linéaire vectorielle d'ordre 1

Définition (Équation différentielle linéaire vectorielle) 1.a

On appelle *équation différentielle linéaire vectorielle d'ordre* 1 toute équation de la forme

$$\mathcal{E} \ : \quad x' = a(t)(x) + b(t),$$

d'inconnue $x\ : I \to E$, où a est une application continue de I dans $\mathcal{L}(E)$ et b une application continue de I dans E.

Une fonction $f\ : I \to E$ est dite *solution* de $\mathcal{E}$ si elle est dérivable sur I, et si, pour tout $t \in I$:

$$f'(t) = a(t)(f(t)) + b(t)$$

La fonction b est appelée *second membre* de $\mathcal{E}$, et $\mathcal{E}$ est dite *homogène* (ou *sans second membre*) si b est la fonction nulle.

L'*équation homogène associée* à $\mathcal{E}$ est l'équation

$$\mathcal{H} \ : \quad x' = a(t)(x)$$

Ne pas oublier que par définition, une solution doit être dérivable. On peut d'ailleurs remarquer qu'une solution de $\mathcal{E}$ est nécessairement de classe $\mathcal{C}^1$.

L'équation $\mathcal{E}$ admet une forme matricielle : pour tout $t \in I$, on note $B(t)$ et $A(t)$ les matrices respectives dans $\mathcal{B}$ de $b(t)$ et de $a(t)$ ($A(t)$ est une matrice carrée de taille p, $B(t)$ une matrice colonne). En notant X la colonne des fonctions composantes de x dans $\mathcal{B}$, l'équation $\mathcal{E}$ équivaut à l'équation matricielle

$$X' = A(t)X + B(t),$$

que l'on appelle *système différentiel linéaire* (d'ordre 1).

Exemple (Système différentiel) i

$$\begin{cases} x' &= tx + y + t^2 z - 3t^2 \\ y' &= x - 2ty + 3(1+t^3)z + t \\ z' &= x + 4ty + 9\sin(t)z - \cos(t^2) \end{cases}$$

est un système différentiel linéaire d'ordre 1 à trois équations et trois inconnues x, y, z (fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a, avec les notations ci-dessus :

$$A(t) = \begin{pmatrix} t & 1 & t^2 \\ 1 & -2t & 3(1+t^3) \\ 1 & 4t & 9\sin(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{pmatrix} -3t^2 \\ t \\ -\cos(t^2) \end{pmatrix}$$

Pour $(i,j) \in [\![1,3]\!]^2$, l'application $t \mapsto [A(t)]_{i,j}$ n'est pas, en général, linéaire (sauf si $(i,j) \in \{(1,1),(2,2),(3,2)\}$ sur cet exemple).

En revenant à $\mathcal{E}$, l'application $t \mapsto a(t)$ n'est pas, en général, linéaire : en revanche, pour tout $t \in I$ fixé, l'application $a(t)$ est linéaire.

Définition (Problème de Cauchy pour une EDL vectorielle d'ordre 1) 1.b

Soit $(t_0, x_0) \in I \times E$. Le système

$$\mathcal{C} \ : \quad \begin{cases} x' &= a(t)(x) + b(t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

est appelé *problème de Cauchy* associé à l'équation différentielle $\mathcal{E}$ d'ordre 1 et à la condition initiale

$$x(t_0) = x_0$$

On fixe désormais un tel problème de Cauchy.

Exemple (Problème de Cauchy)

Les problèmes de Cauchy pour les EDL scalaires d'ordre 1 vus en première année rentrent dans ce cadre. Par exemple, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' &= ty+t \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

admet pour unique solution la fonction $t \mapsto -1 + e^{t^2/2}$.

ii

Mise sous forme intégrale d'un problème de Cauchy

La fonction x est solution du problème de Cauchy $\mathcal{C}$ si et seulement si x est de classe $\mathcal{C}^1$, et, pour tout $t \in I$:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} (a(u)(x(u)) + b(u))\mathrm{d}u$$

Cela revient à dire que x est un point fixe de l'application

$$\psi \ : x \mapsto \left(t \mapsto x_0 + \int_{t_0}^{t} (a(s)(x(s)) + b(s))\mathrm{d}s \right)$$

de $\mathcal{C}^1(I, E)$ dans lui-même.

1.1

1.2. Équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n

Définition (Équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n)

On appelle *équation différentielle linéaire scalaire d'ordre* n toute équation de la forme

$$\mathcal{E}_n \ : \quad a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)y = b(t),$$

où $a_0, \ldots, a_n, b$ sont des fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$, et où a_n n'est pas identiquement nulle.

On dit que cette équation est *résolue* si a_n est constante de valeur 1.

Une fonction $f \ : I \to \mathbb{K}$ est dite *solution* de $\mathcal{E}_n$ si elle est n fois dérivable sur I, et si, pour tout $t \in I$:

$$a_n(t)f^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)f^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)f(t) = b(t)$$

La fonction b est appelée *second membre* de $\mathcal{E}_n$, et $\mathcal{E}_n$ est dite *homogène* (ou *sans second membre*) si b est la fonction nulle.

L'*équation homogène associée* à $\mathcal{E}_n$ est l'équation

$$\mathcal{H}_n \ : \quad a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)y = 0$$

1.c

Ne pas oublier que par définition, une solution de $\mathcal{E}_n$ doit être n fois dérivable. Si a_n ne s'annule pas, une solution de $\mathcal{E}_n$ est même de classe $\mathcal{C}^n$, et l'équation différentielle $\mathcal{E}_n$ a les mêmes solutions que l'équation résolue

$$\mathcal{E}'_n \ : \quad y^{(n)} + \alpha_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + \alpha_0(t)y = \beta(t),$$

où $\alpha_k = \frac{a_k}{a_n}$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ et $\beta = \frac{b}{a_n}$.

Hypothèse simplificatrice : sauf mention contraire (pour la définition d'un problème de Cauchy, et en fin de chapitre), on se place dans le cas où $\mathcal{E}_n$ est une équation différentielle résolue.

Soit $y\ : I \to \mathbb{K}$ une fonction n fois dérivable. En posant $Y \overset{def}{=} \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$,

$$A \overset{def}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B \overset{def}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix},$$

la résolution de $\mathcal{E}$ revient à celle du système différentiel linéaire d'ordre 1

$$Y' = A(t)Y + B(t)$$

Ainsi, nous pourrons appliquer les résultats relatifs aux EDL vectorielles d'ordre 1 au cas des EDL scalaires résolues d'ordre n.

Définition (Problème de Cauchy pour une équation linéaire scalaire d'ordre n) 1.d

Le système

$$\mathcal{C}_n \ : \quad \begin{cases} a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_0(t)y = b(t) \\ \forall\, k \in [\![0, n-1]\!],\ y^{(k)}(t_0) = y_k \end{cases}$$

est appelé *problème de Cauchy* associé à l'équation différentielle $\mathcal{E}_n$ d'ordre n et aux conditions initiales

$$y^{(k)}(t_0) = y_k,$$

$k \in [\![0, n-1]\!]$.

On fixe dans la suite un tel problème de Cauchy $\mathcal{C}_n$.

Exemple (Problème de Cauchy pour une EDL scalaire d'ordre n) iii

Vous avez vu, en MPSI, de tels exemples de problèmes de Cauchy, à l'ordre 2, comme :

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = e^{-t} + e^{2t} \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases}$$

Outre le passage de l'ordre 2 à l'ordre n, il faut noter que désormais, les coefficients $a_0, \dots, a_n$ ne sont plus nécessairement constants, mais des fonctions.

Le fait de définir ainsi un problème de Cauchy pour l'ordre n s'explique bien par le lien que l'on a établi entre les EDL scalaires résolues d'ordre n et les EDL vectorielles d'ordre 1 (les conditions initiales pour y correspondent à la donnée d'une condition initiale pour la colonne Y).

1.3. Premières conséquences de la linéarité

Pour toute EDL $\mathcal{G}$, nous noterons $\mathcal{S}_{\mathcal{G}}$ l'ensemble de ses solutions.

Les applications

$$x \mapsto (t \mapsto x'(t) - a(t)(x(t)))$$

et

$$y \mapsto a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y$$

sont linéaires (de $D^1(I, E)$ vers $\mathcal{F}(I, E)$ pour la première, de $D^n(I, \mathbb{K})$ vers $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ pour la seconde), car la dérivation, la multiplication par une fonction donnée le sont, et car pour tout $t \in I$, $a(t)$ est linéaire.

C'est la raison pour laquelle on parle d'équation différentielle *linéaire*.

Notons ∇ l'une quelconque de ces deux applications. Résoudre $\mathcal{E}$ comme $\mathcal{E}_n$ revient à déterminer $\nabla^{-1}(\{b\})$, c'est-à-dire les fonctions f telles que $\nabla(f) = b$.

Résoudre $\mathcal{H}$ comme $\mathcal{H}_n$ revient à déterminer le noyau de ∇.

En particulier, l'ensemble $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ des solutions de $\mathcal{H}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et celui de $\mathcal{E}$, s'il n'est pas vide, est un sous-espace affine de $\mathcal{F}(I, E)$, de direction $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$.

Autrement dit, si on dispose d'une *solution particulière* f_0 de $\mathcal{E}$, alors

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}} = f_0 + \ker(\nabla) = \{f_0 + h, h \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}\}$$

La linéarité des équations différentielles étudiées justifie donc l'approche suivante pour la résolution de $\mathcal{E}$:

(1) Résoudre d'abord $\mathcal{H}$.

(2) Trouver une solution particulière de $\mathcal{E}$.

(3) Conclure, en exprimant la solution générale [1] de $\mathcal{E}$ comme somme de la solution particulière trouvée, et de la solution générale de $\mathcal{H}$.

Cette linéarité justifie également la proposition suivante :

Proposition (Principe de superposition)

Soit b_1 et b_2 des fonctions continues de I dans E. On suppose que f_1 et f_2 sont des solutions respectives de

$$x' = a(t)(x) + b_1(t) \quad \text{et} \quad x' = a(t)(x) + b_2(t)$$

Pour tous scalaires λ_1 et λ_2, la fonction $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est alors solution de

$$x' = a(t)(x) + \lambda_1 b_1(t) + \lambda_2 b_2(t)$$

1.a

Démonstration

□

Le lecteur adaptera sans problème ce principe de superposition au cas des EDL scalaires d'ordre n.

Exemple (Résolution d'une EDL)

En première année, vous avez résolu une équation telle que

$$\mathcal{E} \;:\; y'' + y = \cos(2t)$$

en résolvant d'abord son équation homogène associée $\mathcal{H}$. La solution générale de $\mathcal{H}$ est

$$t \mapsto \lambda \cos(t) + \mu \sin(t), \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

On peut trouver une solution particulière, telle que $t \mapsto -\frac{1}{3}\cos(2t)$, ce qui permet de conclure : la solution générale de $\mathcal{E}$ est

$$t \mapsto -\frac{1}{3}\cos(2t) + \lambda \cos(t) + \mu \sin(t), \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

iv

1. La *solution générale* d'une équation consiste en l'écriture paramétrée de *toutes* ses solutions.

2. Résolution théorique : le théorème de Cauchy linéaire

Théorème de Cauchy linéaire, cas vectoriel

Le problème de Cauchy

$$\mathcal{C} \;:\; \left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & a(t)(x) + b(t) \\ x(t_0) & = & x_0 \end{array} \right.$$

admet une unique solution sur I.

2.a

Démonstration

Non exigible. Je ne donne que les grandes lignes. L'idée consiste à montrer que la fonction ψ définie dans la remarque 1.1 page 493 admet un unique point fixe.
Pour l'existence, on définit une suite récurrente (f_n) d'applications de I dans E par récurrence, de terme initial f_0 constante de valeur x_0, et d'itératrice ψ :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I, \quad f_{n+1}(t) \overset{def}{=} x_0 + \int_{t_0}^{t} (a(u)(f_n(u)) + b(u))\, \mathrm{d}u$$

On montre alors que cette suite de fonctions converge uniformément sur tout segment $|t_0, t|$ vers une fonction f, qui s'avère être un point fixe de ψ, et donc une solution de $\mathcal{C}$.
Pour l'unicité, on considère deux solutions f et g, et on utilise à nouveau ψ pour montrer que $f = g$ sur tout segment $|t_0, t|$.

□

Ce résultat est très important pour comprendre la structure de l'ensemble des solutions de $\mathcal{E}$.

Il permet par exemple de montrer qu'une solution non identiquement nulle d'une EDL vectorielle homogène d'ordre 1 ne s'annule jamais. Les résultats de ce genre, donnant des renseignements sur le comportement [2] des solutions d'une équation différentielle, sans pour autant expliciter lesdites solutions, sont dits *qualitatifs*.

Cependant, bien que la démonstration soit en partie effective (on construit une solution pour l'existence), il est rare qu'elle permette d'expliciter une solution. Il existe des cas simples où on peut calculer la suite de fonctions (f_n) puis sa limite simple f, unique solution de $\mathcal{C}$, mais cela reste marginal.

Corollaire (Cas des EDL scalaires résolues d'ordre n)

Le problème de Cauchy

$$\mathcal{C}_n \;:\; \left\{ \begin{array}{l} y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)y = b(t) \\ \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ y^{(k)}(t_0) = y_k \end{array} \right.$$

admet une unique solution sur I.

2.b

Nous verrons que ce résultat peut tomber en défaut si l'EDL scalaire d'ordre n n'est pas résolue.

Corollaire (Cas des équations homogènes vectorielles d'ordre 1)

Pour t_0 dans I, l'application

$$\Phi_{t_0} \;:\; \begin{array}{rcl} \mathcal{S}_{\mathcal{H}} & \to & E \\ x & \mapsto & x(t_0) \end{array}$$

est un isomorphisme de cet espace sur E.
En particulier, $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, E)$ de dimension p.

2.c

2. Comme l'étude des points d'annulation, de la monotonie, de la convexité, de la périodicité, de la limite en $+\infty$, etc.

Démonstration

□

Corollaire (Cas des équations scalaires résolues homogènes d'ordre n) 2.d

$\mathcal{S}_{\mathcal{H}_n}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ de dimension n. Pour t_0 dans I, l'application

$$\begin{array}{rcl} \Phi_{t_0} \ : \ \mathcal{S}_{\mathcal{H}_n} & \to & \mathbb{K}^n \\ y & \mapsto & (y(t_0), y'(t_0), \dots, y^{(n-1)}(t_0)) \end{array}$$

est un isomorphisme de cet espace sur $\mathbb{K}^n$.

Définition (Système fondamental de solutions,) 2.a

On appelle *système fondamental de solutions* de $\mathcal{H}$ (resp. de $\mathcal{H}_n$) toute base $(f_1, \dots, f_p)$ (resp. $(f_1, \dots, f_n)$) de $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ (resp. de $\mathcal{S}_{\mathcal{H}_n}$).

Définition (Wronskien pour une EDL vectorielle homogène d'ordre 1) 2.b

Étant donné une famille $(f_1, \dots, f_p)$ de solutions de $\mathcal{H}$, on appelle *wronskien* de $(f_1, \dots, f_p)$ dans la base $\mathcal{B}$ l'application

$$W \ : t \in I \mapsto \det_{\mathcal{B}}(f_1(t), \dots, f_p(t))$$

Définition (Wronskien pour une EDL scalaire homogène d'ordre n) 2.c

Étant donné une famille $(f_1, \dots, f_n)$ de solutions de $\mathcal{H}_n$, on appelle *wronskien* de $(f_1, \dots, f_n)$ l'application

$$W \ : t \in I \mapsto \det(f_j^{(i)}(t))_{(i,j) \in [\![0, n-1]\!] \times [\![1, n]\!]}$$

Exemple (Wronskien pour une EDL scalaire d'ordre 2)

On utilisera surtout le wronskien dans le cas d'une EDL homogène scalaire d'ordre 2 (c'est le seul wronskien qui figure explicitement au programme), qui vaut dans ce cas

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix}$$

Par exemple, pour l'équation différentielle $y'' + y = 0$, un système fondamental de solution est (f_1, f_2), où $f_1 \stackrel{def}{=} \cos$ et $f_2 \stackrel{def}{=} \sin$. Le wronskien à l'instant $t \in \mathbb{R}$ est le déterminant de la matrice

$$Wm(t) \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire 1. D'ailleurs, on peut remarquer plus précisément que $Wm(t)$ est une matrice orthogonale positive. On a donc notamment : $Wm(t)^{-1} =^t Wm(t)$.

i

Proposition (Caractérisation des systèmes fondamentaux de solutions)

Soit $f_1, \ldots, f_p$ des solutions de $\mathcal{H}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) $(f_1, \ldots, f_p)$ est un système fondamental de solutions de $\mathcal{H}$.

(2) Il existe $t \in I$ tel que $W(t) \neq 0$.

(3) Pour tout $t \in I$, $W(t) \neq 0$.

2.e

Démonstration

□

On a bien sûr une proposition analogue pour $\mathcal{H}_n$.

Exercice (Wronskien)

1 Vérifier que dans le contexte de la définition 2.b, le wronskien W est solution de l'équation différentielle

$$y' = \mathrm{tr}(a(t))y$$

2 En déduire une expression du wronskien, en supposant sa valeur en un instant t_0 connue.

1

3. Résolution pratique

Le théorème de Cauchy linéaire nous a permis de comprendre la structure des ensembles de solutions de $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_n$, et même $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}_n$. Cependant, hormis la fonction nulle pour les équations homogènes, il ne nous a fourni aucune expression exploitable pour résoudre ces diverses équations. La présente section a pour but de donner des techniques de résolution de certaines des équations différentielles considérées.

3.1. Rappels sur l'exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice

On rappelle que l'on a défini l'exponentielle d'un élément u d'une $\mathbb{K}$-algèbre normée de dimension finie, comme la somme de la série exponentielle (absolument convergente)

$$\sum \frac{u^n}{n!}$$

On la note $\exp(u)$ ou e^u.

En particulier, cela définit l'exponentielle d'un endomorphisme a de E, ou d'une matrice carrée A de taille p.

Tous les résultats de cette sous-section ont été établis. Vous pouvez donner un résumé de démonstration dans les cadres adéquats.

Proposition (Continuité de l'exponentielle) 3.a

La fonction exponentielle, de $\mathcal{L}(E)$ dans lui-même, est continue.

Démonstration

□

De même bien sûr pour la fonction exponentielle de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ dans lui-même.

Proposition (Exponentielle de la somme de deux endomorphismes qui commutent) 3.b

Si a et b sont deux endomorphismes de E tels que $ab = ba$, alors

$$\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$$

Démonstration

Non exigible.
On peut utiliser la notion de produit de Cauchy de séries absolument convergentes. □

On peut en particulier observer que $\exp(a)$ est un automorphisme de E, d'inverse $\exp(-a)$.
Plus précisément,

$$\begin{array}{rccc} \varphi_a : & \mathbb{K} & \to & \mathrm{GL}(E) \\ & t & \mapsto & \exp(ta) \end{array}$$

est un morphisme du groupe $(\mathbb{K}, +)$ vers $(\mathrm{GL}(E), \circ)$.

Proposition (Dérivation d'un paramétrage exponentiel) 3.c

L'application $\varphi_a : t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(ta)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et, pour tout réel t :

$$\varphi_a'(t) = a\varphi_a(t) = \varphi_a(t)a = a\exp(ta) = \exp(ta)a$$

Démonstration

□

Le lecteur adaptera sans problème ces résultats au cadre matriciel.

3.2. Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants

On se place dans le cas particulier, mais fréquemment étudié en pratique, où a est une fonction constante, que l'on confondra avec son unique valeur, qui est ici un endomorphisme de E.

Théorème (Résolution d'un problème de Cauchy vectoriel homogène à coefficients constants)

Soit $a \in \mathcal{L}(E)$, et $x_0 \in E$. L'unique solution du problème de Cauchy homogène

$$x' = a\,(x)\,, \quad x(t_0) = x_0$$

est la fonction

$$f \ : t \mapsto \exp((t - t_0)a)(x_0)$$

3.d

Démonstration

□

Ce théorème se démontre en quelques lignes si on utilise le théorème de Cauchy linéaire, mais il n'est pas très compliqué de proposer une preuve autosuffisante.

La traduction matricielle est laissée au lecteur.

Sur le calcul de l'exponentielle d'une matrice

Comment, en pratique, calculer l'exponentielle d'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?
Si A est nilpotente, c'est très facile :

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{A^k}{k!}$$

Si A est diagonalisable, ce n'est pas difficile, car si $A = P^{-1}DP$, alors

$$\exp(A) = P^{-1}\exp(D)P$$

Dans le cas général, on pourra utiliser la réduction la plus fine vue en cours, à savoir celle consistant à écrire A comme la somme d'une matrice nilpotente et d'une matrice diagonalisable qui commutent (pour la multiplication).
Pour les calculs explicites, le programme se borne aux deux cas suivants : A diagonalisable ou $n \leqslant 3$.
On peut observer que le comportement asymptotique des solutions est essentiellement régi par le signe de la partie réelle des valeurs propres de la matrice A.

3.1

La réduction de A donne donc des renseignements sur les solutions de l'équation $X' = AX$. On pourra utiliser l'observation suivante :

Proposition (Solutions d'une EDL homogène à coefficients constants et vecteurs propres) 3.e

Soit V un vecteur non nul, et $\lambda \in \mathbb{K}$. La fonction

$$t \mapsto e^{\lambda t} V$$

est solution de

$$X' = AX$$

si et seulement si V est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

Démonstration

□

Bien sûr, pour savoir si λ est valeur propre de A, on pourra tester si $\chi_A(\lambda) = 0$.
Dans le cas d'une EDL scalaire d'ordre n « vectorialisée », on a

$$A \overset{def}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

et on peut vérifier qu'alors

$$\chi_A = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$$

donc λ est valeur propre si et seulement si λ est solution de l'*équation caractéristique*

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

c'est-à-dire racine du *polynôme caractéristique*

$$P \overset{def}{=} X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$$

En pratique, si on note $(\lambda_i, r_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ la famille des racines de P, données avec leurs multiplicités, on peut vérifier qu'un système fondamental de solution

$$y^{(n)} + a_{(n-1)}y^{n-1} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

est constitué des $t \mapsto t^k e^{\lambda_i t}$, où i décrit $[\![1, p]\!]$, et, pour i fixé, k décrit $[\![0, r_i - 1]\!]$.

Exercice (Système différentiel) 2

(CCP MP 13) Résoudre $X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} -3/2 & 2 & -1/2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3/2 & -6 & 9/2 \end{pmatrix}$.

3.3. La technique du facteur intégrant

En MPSI, vous avez résolu les équations différentielles de la forme

$$(\mathcal{H}) \quad : \quad y' + a(t)y = 0$$

où $a \, : I \to \mathbb{K}$ est une fonction continue. Il s'agit d'une EDL scalaire homogène d'ordre 1 résolue.

Si vous êtes attentifs, vous remarquerez que le présent cours ne permet pas de résoudre ce type d'équation, sauf dans le cas où a est en fait constante.

Si vous avez bonne mémoire, vous vous souvenez que $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ est une droite vectorielle (le cours de Spé permet aussi de le montrer), dirigée par $t \mapsto e^{-A(t)}$, où A est une primitive de a (ça, ce n'est pas dans le cours de Spé). Cela se retrouve facilement en utilisant un *facteur intégrant* : en multipliant $\mathcal{H}$ par $e^{A(t)}$ (qui ne s'annule pas), on obtient l'équation équivalente

$$\frac{\mathrm{d}ye^{A(t)}}{\mathrm{d}t} = 0$$

facile à résoudre.

Exercice (Une équation différentielle de MPSI (Banque CCP MP 15))

On considère les deux équations suivantes :

$$\mathcal{H} \ : 2xy' - 3y = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{E} \ : 2xy' - 3y = \sqrt{x}$$

1 Résoudre l'équation $\mathcal{H}$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

2 Résoudre l'équation $\mathcal{E}$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$, puis sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

3

Exponentielle matricielle et résolution d'EDL vectorielles homogènes (digression facultative)

Il est tentant d'extrapoler cette formule pour résoudre une équation différentielle *vectorielle* homogène

$$(\mathcal{H}') \quad : \quad y' + a(t)y = 0$$

en introduisant une primitive A de a.

D'ailleurs, le théorème 3.d affirme que cette extrapolation est légitime lorsque a est constante.

On peut s'attendre à ce que, plus généralement, $f \ : t \mapsto e^{-A(t)}$ soit solution de $\mathcal{H}'$, mais *ce n'est pas toujours le cas*. Le problème vient du fait qu'on ne peut pas dériver f en $t \mapsto -a(t)e^{-A(t)}$: pour $t \in I$ fixé,

$$e^{-A(t+h)} = e^{-A(t) - ha(t) + o(h)},$$

mais rien ne dit que $A(t)$ et $a(t)$ commutent pour transformer cette exponentielle d'une somme en un produit d'exponentielles.

Pour que $A(t)$ et $a(t)$ commutent, il suffit que a soit constante (cas du théorème 3.d), où que E soit de dimension 1 (cas vu en début de MPSI).

Il faudra donc se garder de toute extrapolation inconsidérée de ces formules.

3.2

Si la technique du facteur intégrant ne se généralise pas au cas des EDL vectorielles quelconques, elle est en revanche efficace pour déterminer la solution de $\mathcal{C}$ lorsque a est constante :

Théorème (Résolution d'un système différentiel linéaire à coefficients constants)

Si $a \in \mathcal{L}(E)$, l'unique solution de

$$\mathcal{C} \ : \ \left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & a(x) + b(t) \\ x(t_0) & = & x_0 \end{array} \right.$$

est la fonction

$$t \mapsto e^{(t-t_0)a}(x_0) + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)a}(b(s))\mathrm{d}s$$

3.f

Démonstration

□

Ainsi, nous avons résolu les EDL vectorielles d'ordre 1 dans le cas où a est constant.

3.4. Méthode de variation des constantes

Nous expliquons ici comment passer de la résolution de $\mathcal{H}$ à celle de $\mathcal{E}$.

Supposons disposer d'un système fondamental de solutions $(f_1, \dots, f_p)$ de $\mathcal{H}$ (et donc que nous ayons résolu $\mathcal{H}$), et soit W le wronskien associé (dans une base fixée $\mathcal{B}$ de E). Il nous reste à trouver une solution particulière de $\mathcal{E}$ pour trouver $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}$.

Les fonctions f_i sont de classe $\mathcal{C}^1$, et pour tout $t \in I$, $W(t) \neq 0$. Les formules de Cramer montrent alors que toute fonction $g\ : I \to E$, dérivable, peut s'écrire (de manière unique d'ailleurs) sous la forme

$$g = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i$$

où les λ_i sont des *fonctions* dérivables de I dans $\mathbb{K}$: nous pouvons donc sans perte de généralité chercher une solution particulière de $\mathcal{E}$ sous cette forme.

Bien sûr,

$$g' = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i' f_i + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i',$$

Comme les f_i sont des solutions de $\mathcal{H}$, il y a donc équivalence entre le fait que g soit solution de $\mathcal{E}$ et le fait que

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i' f_i = b$$

En inversant, pour chaque t, le système

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i'(t) f_i(t) = b(t)$$

dont les inconnues sont les $\lambda_i'(t)$, puis en intégrant, on obtient une solution particulière de $\mathcal{E}$ (et même toutes ses solutions si on laisse les constantes d'intégration varier librement).

Cette méthode de résolution de $\mathcal{E}$, étant donné un système fondamental de solutions de $\mathcal{H}$, est appelée *méthode de variation des constantes*. En effet, elle revient à remplacer des *constantes scalaires* λ_i, dans l'expression $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i$ (donnant une solution de $\mathcal{H}$), par des *fonctions*, afin de déterminer une solution particulière de $\mathcal{E}$.

La relation

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i' f_i = b$$

s'obtient immédiatement en se rappelant que si les λ_i sont constants, on obtient une solution de l'équation homogène.

Dans les exercices, on se limite en pratique au cas où $n = 2$.

Dans le cas particulier des systèmes différentiels à coefficients constants, on connaît un système fondamental de solutions (sous réserve de pouvoir calculer explicitement l'exponentielle d'un endomorphisme ou d'une matrice).

Exercice (Systèmes différentiels linéaires)

Résoudre les systèmes différentiels suivants :

1

$$\begin{cases} x_1'(t) &= 6x_1(t) + 3x_2(t) - 3t + 4e^{3t} \\ x_2'(t) &= -4x_1(t) - x_2(t) + 4t - 4e^{3t}. \end{cases}$$

2

$$\begin{cases} x_1'(t) &= x_1(t) + 2x_2(t) + t \\ x_2'(t) &= -4x_1(t) - 3x_2(t). \end{cases}$$

On donnera les solutions réelles.

4

3.5. Équations différentielles scalaires du second ordre

On s'intéresse ici au cas particulier des EDL scalaires du second ordre résolues

$$\mathcal{E} \ : \quad y'' + a(t)y' + b(t)y = \delta(t)$$

où a, b et δ sont des fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$.

Première étape : vectorialisation de $\mathcal{E}$

En posant $Y \overset{def}{=} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$, ainsi que, pour tout $t \in I$:

$$A(t) \overset{def}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D(t) \overset{def}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ \delta(t) \end{pmatrix}$$

résoudre $\mathcal{E}$ revient à résoudre le système différentiel linéaire suivant

$$\mathcal{E}' \ : \quad Y' = A(t)Y + D(t)$$

Deuxième étape : résoudre $\mathcal{H}$.

Pour résoudre l'équation homogène associée

$$\mathcal{H} \ : \quad y'' + a(t)y' + b(t)y = 0,$$

on connaît depuis la MPSI une méthode explicite dans le cas où l'équation est à coefficients constants, c'est-à--dire lorsque a et b sont en fait constantes. La méthode détaillée en première année n'est qu'un cas particulier de l'étude effectuée en 3.2.

J'invite d'ailleurs le lecteur à confronter les deux points de vue de MPSI et de MP, et à vérifier qu'ils concordent bien.

Résoudre l'équation homogène associée dans le cas général (lorsque a ou b n'est pas constante), est bien plus difficile. On se gardera en particulier de parler d'équation caractéristique dans ce cas.

On sait que $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ est un plan vectoriel (par le théorème de Cauchy linéaire), mais il est difficile en général d'en trouver une base : le plus souvent, l'énoncé vous guidera face à une telle équation, en vous proposant par exemple un changement de variable pour vous ramener à un cas déjà connu, ou en vous faisant trouver les solutions développables en série entière.

Méthode de Lagrange, ou d'abaissement de l'ordre

On peut toutefois retenir une méthode intéressante, qui est encore une forme de variation de la constante (même si on ne l'appelle pas ainsi) : une fois une solution non nulle (idéalement qui ne s'annule pas) f_0 de $\mathcal{H}$ trouvée, on peut chercher d'autres solutions sous la forme

$$f \ : t \mapsto C(t)f_0(t)$$

Cela conduit à résoudre une équation différentielle satisfaite par C', et d'ordre 1. C'est pourquoi cette méthode est parfois appelée méthode de l'*abaissement de l'ordre*. On l'appelle également méthode de Lagrange.

3.3

Lien entre la méthode de Lagrange et le cours de MPSI

En fait, c'est probablement ce que vous avez fait en MPSI pour déterminer l'ensemble des solutions d'une EDL homogène d'ordre 2 à coefficients constants : vous avez d'abord cherché *une* solution de la forme $t \mapsto e^{rt}$ (c'est le cas si et seulement si r est solution de l'équation caractéristique), puis vous avez trouvé *toutes* les solutions, en les cherchant sous la forme $t \mapsto C(t)e^{rt}$.

3.4

Troisième étape : recherche d'une solution particulière de $\mathcal{E}$.

Une fois un système fondamental (f_1, f_2) de solutions de $\mathcal{H}$ trouvé, reste à déterminer une solution particulière de $\mathcal{E}$.

La méthode de variation des constantes, vue pour les EDL vectorielles d'ordre 1, s'adapte sans difficulté aux EDL scalaires d'ordre n. Explicitons-la dans le cas particulier où $n = 2$ (il faut savoir la mettre en œuvre rapidement).

On pose $F_1 = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_1' \end{pmatrix}$, $F_2 = \begin{pmatrix} f_2 \\ f_2' \end{pmatrix}$. On cherche des fonctions dérivables λ_1 et λ_2, de I dans $\mathbb{K}$, telles que $\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2$ soit solution de $\mathcal{E}'$, ce qui revient à

$$\lambda_1' F_1 + \lambda_2' F_2 = D$$

ou encore, en posant $Wm \overset{def}{=} \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{pmatrix}$, à

$$Wm \begin{pmatrix} \lambda_1' \\ \lambda_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta \end{pmatrix}$$

soit enfin à

$$\mathcal{S} \ : \ \left\{ \begin{array}{rcl} f_1(t)\lambda_1'(t) + f_2(t)\lambda_2'(t) & = & 0 \\ f_1'(t)\lambda_1'(t) + f_2'(t)\lambda_2'(t) & = & \delta(t) \end{array} \right.$$

pour tout $t \in I$.

Ainsi :

Proposition (Variation des constantes pour les EDL scalaires résolues d'ordre 2)

Soit (f_1, f_2) un système fondamental de solutions de $\mathcal{H}$, λ_1 et λ_2 des fonctions dérivables de I dans $\mathbb{K}$.
Pour que la fonction

$$g \ : t \mapsto \lambda_1(t) f_1(t) + \lambda_2(t) f_2(t)$$

soit solution de $\mathcal{E}$, il suffit que, pour tout $t \in I$, le système de relations

$$\mathcal{S} \ : \ \left\{ \begin{array}{rcl} f_1(t)\lambda_1'(t) + f_2(t)\lambda_2'(t) & = & 0 \\ f_1'(t)\lambda_1'(t) + f_2'(t)\lambda_2'(t) & = & \delta(t) \end{array} \right.$$

(qui est de Cramer en les inconnues $\lambda_1'(t)$ et $\lambda_2'(t)$), soit vérifié.

3.g

Wm est un wronskien « matriciel », que l'on pourrait appeler *matrice de Wronski*, le wronskien désignant le déterminant d'une telle matrice.

Exemple (Variation des constantes)

Cherchons les solutions de
$$\mathcal{E} \quad : \quad y'' + y = g(t)$$
où g est une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$.
Un système fondamental de solutions de $\mathcal{H}$ est $(f_1, f_2) \overset{def}{=} (\cos, \sin)$.
Le système
$$\begin{cases} f_1(t)\lambda_1'(t) + f_2(t)\lambda_2'(t) & = & 0 \\ f_1'(t)\lambda_1'(t) + f_2'(t)\lambda_2'(t) & = & g(t) \end{cases}$$
s'inverse en
$$\lambda_1'(t) = -\sin(t)g(t) \quad \text{et} \quad \lambda_2'(t) = \cos(t)g(t)$$
Ainsi, une solution particulière de $\mathcal{E}$ est
$$t \mapsto \left(-\int_a^t \sin(s)g(s)\mathrm{d}s\right)\cos(t) + \left(\int_a^t \cos(s)g(s)\mathrm{d}s\right)\sin(t) = \int_a^t \sin(t-s)g(s)\mathrm{d}s$$
(où on s'est donné un point a de I), et la solution générale de $\mathcal{E}$ est
$$t \mapsto \int_a^t \sin(t-s)g(s)\mathrm{d}s + \lambda\cos(t) + \mu\sin(t),$$
où λ et μ décrivent $\mathbb{R}$.

i

Exercice (Variation de la constante (Banque CCP MP 15))

1 Déterminer une primitive de $x \mapsto \cos^4(x)$.
2 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' + y = \cos^3(x)$ en utilisant la méthode de variation de la constante.

5

Exercice (EDL scalaire d'ordre 2)

(CCP MP 13) Soit $(E) : x^2y''+4xy'+2y = \ln x$. Chercher des solutions de l'équation homogène de la forme $x \mapsto x^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, puis résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

6

3.6. EDL scalaire homogène d'ordre 2 sans dérivée première

Exemple (Cas d'une équation $y'' + q(t)y = 0$)

Dans le cas d'une équation de la forme
$$y'' + q(t)y = 0,$$
on vérifie que le wronskien est constant.

ii

Exercice (Comportement asymptotique)

Soit $f\ : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une application continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad y'' + f(t)y = 0$$

d'inconnue $y\ : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ supposée deux fois dérivable.

1 Soit y une solution de (E). Montrer que, si y est bornée, alors y' tend vers 0 en $+\infty$.

2 En déduire que, pour toute base (y_1, y_2) des solutions de (E), au moins une des applications y_1 et y_2 n'est pas bornée sur $\mathbb{R}_+$.

7

3.7. Exemples d'équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 ou 2 non résolues

Que se passe-t-il si on travaille avec une équation non résolue (on dit aussi *avec problème de raccord*), comme

$$\mathcal{E}_1 \ : \quad a(x)y' + b(x)y = c(x)$$

ou

$$\mathcal{E}_2 \ : \quad a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$$

Bien sûr, sur un intervalle J où a ne s'annule pas, nous sommes ramenés à une étude connue. Reste à savoir comment raccorder les solutions obtenues sur ces intervalles.

Il faut bien comprendre la nouveauté de cette situation. En particulier, le théorème de Cauchy linéaire ne s'applique pas : on n'est sûr ni de l'existence, ni de l'unicité d'une solution.

L'étude se fait au cas par cas, en n'oubliant pas que les solutions sont par définition dérivables, et même deux fois dérivables dans le cas de $\mathcal{E}_2$.

On peut par ailleurs exploiter la recherche de solutions développables en série entière.

Exercice (Problèmes de raccord)

Faire l'exercice 14 de TD.

8

Exercice (EDL scalaire d'ordre 2 non résolue)

On étudie l'équation différentielle

$$\mathcal{H} \ : \quad ty'' + 2y' + ty = 0$$

1 Déterminer les solutions de $\mathcal{H}$ sur $\mathbb{R}$ développables en séries entières.

Réponse : ce sont les multiples de $f_1\ : t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$.

2 On cherche désormais à déterminer les solutions de $\mathcal{H}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

i Quelle est la structure algébrique de l'ensemble des solutions de $\mathcal{H}$ sur $\mathbb{R}_+^*$?

ii Montrer qu'on peut chercher les solutions de $\mathcal{H}$ sur $]0, \pi[$ de la forme $f_2\ : t \mapsto \lambda(t)f_1(t)$, où λ est une fonction deux fois dérivable.

Déterminer alors les solutions de $\mathcal{H}$ sur $]0, \pi[$, puis sur $\mathbb{R}_+^*$.

Réponse : ce sont les combinaisons linéaires de f_1 et de $f_2\ : t \mapsto \frac{\cos(t)}{t}$. 9

3 Autre méthode : soit f_2 une solution de $\mathcal{H}$ sur $]0, \pi[$, non colinéaire à f_1. On note W le wronskien de (f_1, f_2).

i Montrer que

$$\left(\frac{f_2}{f_1}\right)' = \frac{W}{f_1^2}$$

ii Trouver une EDL d'ordre 1 dont W est solution, puis déterminer W.

iii En déduire une fonction f_2 convenable.

4 Reprendre ce qui précède pour l'équation

$$\mathcal{H}_2 \ : \quad 4ty'' + 2y' - y = 0$$

4. Feuille de TD 17 : Équations différentielles linéaires

Dans tous les exercices, sauf mention contraire, on demande de trouver des solutions réelles.

4.1. Révisions de MPSI

Exercice 1 (Ordre un sans problème de raccord) 0

Résoudre :
1 $y' - \frac{x}{1+x^2} y = \frac{1}{1+x^2} + \frac{3}{\sqrt{1+x^2}}$.
2 $y' + y \ \mathrm{cotan}(x) = \sin x$.
3 $y' + y = xe^{3x}\cos(x) + (x-1)e^{-x}$.
4 $y' - 2y = (x^2+1)e^{4x} + (x^3 - x^2 + x + 1)e^{2x}$.
5 $y' + y = \cos x + \sin x$
6 $y' - 2xy = \mathrm{sh}\, x - 2x \,\mathrm{ch}\, x$
7 $y' + y \sin x = \sin 2x$.
8 $y' - \frac{x}{x^2-1} y = 2x$ sur $]1, +\infty[$.

Exercice 2 (Ordre deux à coefficients constants) 0

Résoudre
1 $y'' - 2y' + y = \cos(mx)e^x$, où $m \in \mathbb{R}$.
2 $y'' - 2y' + y = x^3 e^x + 2x\cos(x) + x^3 + 3$.
3 $y'' + y = x\cos(x)^3$.

Exercice 3 (Exemple de problème de Cauchy pour l'ordre deux) 2

Soit $m \in \mathbb{R}$. Déterminer la solution f de l'équation :

$$y'' - 2y' + (1+m^2)y = (1+4m^2)\cos(mx)$$

qui vérifie $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

4.2. EDL à coefficients constants

Exercice 4 (Équation différentielle linéaire d'ordre trois) 0

Résoudre l'équation $y''' = y$.

Exercice 5 (Résolution d'un système différentiel) 0

(CCP) Résoudre le système différentiel : $(x' = 3x + y,\ y' = 2x - y,\ z' = -4x - 8y + 2z)$.

Exercice 6 (Wronskien inhomogène surdimensionné) — 2

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{C}^*$, $b, c \in \mathbb{C}$, $f\ : I \to \mathbb{C}$ une application continue, $y_1, y_2, y_3\ : I \to \mathbb{C}$ trois solutions de $ay'' + by' + cy = f$ sur I.

On note $\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_1' & 1 \\ y_2 & y_2' & 1 \\ y_3 & y_3' & 1 \end{vmatrix}$ et $D = \begin{vmatrix} y_1 & y_1' & y_1'' \\ y_2 & y_2' & y_2'' \\ y_3 & y_3' & y_3'' \end{vmatrix}$.

Montrer qu'il existe $A \in \mathbb{C}$ tel que, pour tout $x \in I$:

$$\Delta(x) = Ae^{-\frac{b}{a}x} \quad \text{et} \quad D(x) = \frac{A}{a} f(x) e^{-\frac{b}{a}x}.$$

Exercice 7 (Conservation de la positivité des composantes) — 3

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice à coefficients non diagonaux positifs.
Soit $X\ : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $X' = AX$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x_i(0) \geqslant 0$.
Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, tout $t \in \mathbb{R}_+$, $x_i(t) \geqslant 0$.

Exercice 8 (Sous-groupe à un paramètre de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$) — 3

Soit $f\ : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = I_n$ et

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = f'(0)f(t).$$

Montrer :

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2, \quad f(s + t) = f(s)f(t).$$

4.3. EDL scalaires résolues d'ordre 2

Exercice 9 (Autour de l'équation $y'' + y = f(t)$) — 1

1 Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, monotone, ayant une limite finie en $+\infty$. Montrer que les solutions de $y''+y = f$ sont bornées.
2 Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, 2π-périodique. Existe-t-il $y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, 2π-périodique, telle que $y'' + y = f$?
3 Soit h deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $h''+h \geqslant 0$. Montrer que pour tout réel x, $h(x)+h(x+\pi) \geqslant 0$.
4 (Centrale MP 08) Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = \sin(t)$, puis l'équation différentielle $y'' + y = |\sin(t)|$.

Exercice 10 (Autour de l'équation $y'' - \omega^2 y = g$) 1

1 Soit $\omega \in \mathbb{R}_+^*$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue et bornée. Montrer que l'équation différentielle $y'' - \omega^2 y = f$, d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable, admet une solution et une seule qui soit bornée sur $\mathbb{R}$.

2 Soit $\omega, c \in \mathbb{R}_+^*$, $E = \mathcal{C}([0,c],\mathbb{R})$, muni de $\|\cdot\|_\infty$.

i Montrer que, pour tout $f \in E$, il existe $y \in E$, de classe $\mathcal{C}^2$, unique, telle que :

$$\begin{cases} y'' - \omega^2 y = f \\ \omega y(0) = y'(0) \\ \omega y(c) = -y'(c) \end{cases}$$

et exprimer y en fonction de f, à l'aide d'intégrales.

ii On note $T : E \to E$, $f \mapsto y$ l'application construite ci-dessus. Montrer que $T \in \mathcal{L}C(E)$.

3 Soit $\omega \in \mathbb{R}_+^*$, $g_1, g_2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continues telles que $g_1 \leqslant g_2$, $f_1, f_2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que :

$$\begin{cases} f_1'' - \omega^2 f_1 = g_1 \\ f_2'' - \omega^2 f_2 = g_2 \\ f_1(0) = f_2(0) \\ f_1'(0) = f_2'(0) \end{cases}$$

Montrer $f_1 \leqslant f_2$.

Exercice 11 (Une EDL scalaire d'ordre 2 à coefficients non constants) 2

Résoudre $(t^2+1)y'' - 2y = t$.

Indication : on pourra chercher des solutions polynomiales.

Exercice 12 (Centrale MP 07) 2

1 Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation

$$(\mathcal{E}) \quad y'' + \frac{1}{x^2} y = 0.$$

Indication : on pourra utiliser le changement de variable $t = \ln(x)$.

2 L'équation différentielle $(\mathcal{E})$ possède-t-elle des solutions non bornées ? Déterminer les solutions bornées de $(\mathcal{E})$.

Exercice 13 (Solution d'une EDL particulière s'annulant au moins deux fois) 2

1 On considère l'équation différentielle $y'' + qy = 0$ d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, avec $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et à valeurs dans $\mathbb{R}_-^*$.

Montrer que si une solution sur $\mathbb{R}$ s'annule deux fois, alors c'est la fonction identiquement nulle.

2 On considère l'équation différentielle

$$y'' - py' - qy = 0$$

d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, avec $p, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que $p^2 \leqslant 4q$. Montrer que si y est une solution s'annulant deux fois, alors c'est la fonction nulle.

4.4. EDL scalaires non résolues

Exercice 14 (Problèmes de raccord) 0

Résoudre sur $\mathbb{R}$:

1 $xy' + y = x^3$.

2 $xy' - y = 0$.

3 $x^2y' + y = 0$.

4 $xy' - 2y = 0$.

5 $x(x^2 - 1)y' + 2y = x^2$.

6 $xy' - 2y = x^4$.

7 $(e^x - 1)y' + (e^x + 1)y = 3 + 2e^x$.

Exercice 15 (Équations d'ordre 2) 0

1 Résoudre $t^2y'' + ty' - y = 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2 Résoudre $(t + 1)y'' - (t + 2)y' + y = 0$.

4.5. Équations fonctionnelles ou problèmes se ramenant à des équations différentielles

Exercice 16 (Équations pseudo différentielles) 2

1 Déterminer les fonctions $f\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que

$$f'(x) + f(-x) = e^x,$$

pour tout réel x.

2 Déterminer les fonctions $f\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que

$$f''(x) + f(-x) = 0,$$

pour tout réel x.

Exercice 17 (Équation fonctionnelle avec deux variables) 2

Déterminer les fonctions $f\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que :

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y),$$

pour tous réels x et y.

Exercice 18 (Équation fonctionnelle avec intégrale) 2

1 Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) + \int_0^x (x - t)f(t)\mathrm{d}t = 1.$$

2 Résoudre $f(x) - 2\int_0^x f(t)\cos(x - t)\mathrm{d}t = 1$.

5. Oraux

Exercice 19 (Équations différentielles de MPSI) 0

1 (CCP MP 13) Résoudre : $(x^2+1)y' - 2xy = x \exp\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$.

2 (Mines Alès) Résoudre sur $\mathbb{R}$: $(\operatorname{sh} x)y' - e^x y = \operatorname{sh}^2 x$.

3 (CCP MP 10) Résoudre $y' - (\tan x)y = -\cos^2(x)$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$.

Exercice 20 (Une EDL d'ordre 2 à coeff non constants) 0

(CCP MP 13) Résoudre $(1-x^2)y'' - 3xy - y = \frac{x}{\sqrt{|1-x^2|}}$.

Indication : remarquer que $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{|1-x^2|}}$ est solution de l'équation sans second membre.

Exercice 21 (Une équation différentielle de MPSI et ses solutions bornées) 0

(TPE) On note (E) l'équation différentielle $(1+x^2)y' = 1 + 3xy$.

1 Trouver une solution polynomiale de (E), puis résoudre (E).

2 Déterminer les solutions de E bornées en $+\infty$.

Exercice 22 (Problème de raccord d'ordre 1) 0

1 (Mines-Ponts PSI 10) Résoudre l'équation différentielle $xy' + y - \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} = 0$.

2 (Centrale PC 10) Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de $x(x^2-1)y' + 2y = x^4$.

Exercice 23 (Aspects structurels d'ensembles de solutions d'une EDL) 0

(Centrale PSI 10)
Pour $a \in \mathbb{R}$, soit S_a l'ensemble des solutions de $(1+x^2)y' - 2y = a$ sur $]-1, 1[$.

1 Déterminer S_a, pour $a \in \mathbb{R}$. Est-ce un espace vectoriel ?

2 Soit $S = \bigcup_{a \in \mathbb{R}} S_a$. Est-ce un espace vectoriel ?

3 Montrer que l'application Φ qui à $f \in S$ associe le a tel que $f \in S_a$, est linéaire. Déterminer le noyau de Φ.

4 Déterminer la dimension de S. En donner une base.

Exercice 24 (Équation différentielle et série entière) 0

(CCP MP 14) Si $\lambda \in]-1/2, +\infty[$, soit (E_λ) l'équation différentielle :
$$x(x+1)y'' + (2x+1)y' - \lambda(\lambda+1)y = 0$$

1 Montrer qu'il existe une unique solution P_1 de (E_1) polynomiale de degré 1 et telle que $P_1(0) = 1$.
2 Soient $\varphi : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \frac{8x^2+8x+1}{x(x+1)(2x+1)}$ et $\psi : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \frac{1}{x(x+1)(2x+1)^2}$. Montrer qu'il existe $(a, b, c, a', b', c', d') \in \mathbb{R}^7$ que l'on déterminera tels que : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\varphi(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{2x+1}$ et $\psi(x) = \frac{a'}{x} + \frac{b'}{x+1} + \frac{c'}{2x+1} + \frac{d'}{(2x+1)^2}$. En déduire une primitive de φ et une primitive de ψ.
3 Résoudre (E_1) sur $\mathbb{R}^{+*}$.
4 Soit $y(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ de rayon de convergence strictement positif. Trouver une relation sur les (a_n) pour que y soit solution de (E_λ).
5 Donner une condition sur λ pour qu'il existe une solution de (E_λ) polynomiale non nulle.

Exercice 25 (Problème de raccord et DSE) 0

(CCP) Soient $(*)$: $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$, E^+ (resp. E^-) l'ensemble des solutions de $(*)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ (resp. $\mathbb{R}^{-*}$) et E l'ensemble des $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ solutions de $(*)$ sur $\mathbb{R}$.
1 Montrer que E, E^+, E^- sont des espaces vectoriels. Que peut-on dire des dimensions de E^- et de E^+ ?
2 Déterminer les $f \in E$ développables en série entière au voisinage de 0.

Exercice 26 (EDL homogène à coefficients non constants) 0

(CCP) Résoudre sur $]-1, 1[$: $(x^2 - 1)y'' + 2xy' - 2y = 0$.

Exercice 27 (Une EDL d'ordre 3) 0

(TPE) Résoudre $y''' - 2y'' - y' + 2y = e^x$.

Exercice 28 (Une EDL d'ordre 2 à paramètre) 0

(CCP) Résoudre en fonction de $m \in \mathbb{R}$: $y''(x) - my'(x) + 2y(x) = 1 + x^2 + e^x$.

Exercice 29 (Variation de la constante (Mines MP 06)) 0

Résoudre sur $]0, \pi[$: $y'' + y = \operatorname{cotan} x$.

Exercice 30 (Résolution d'un problème de Cauchy et étude asymptotique) 2

Déterminer l'unique $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) - e^{-x}f(x) = 1$ et $f(0) = 0$. Montrer que $f(x) \sim x$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 31 (EDL scalaire d'ordre 2 non résolue et DSE) 2

(Banque CCP MP 15)
Soit l'équation différentielle : $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.

1 Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière à l'origine.

2 Est-ce que toutes les solutions de $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$ sur $]0,1[$ sont développables en série entière à l'origine ?

Exercice 32 (Encore $y'' + y = g$ (Centrale PSI 10)) 2

Déterminer la solution sur $\mathbb{R}$ de $y'' + y = \frac{1}{e^x - 1}$ ayant une limite en $+\infty$.

Exercice 33 (Endomorphisme et EDL) 3

Soit E l'ensemble des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. À toute fonction f de E, on associe la fonction g = L(f) par :

$$\forall\, x \in [0,1], \quad g(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t)\mathrm{d}t$$

Montrer que L est un endomorphisme de E. Quels sont ses éléments propres ?

Exercice 34 (Endomorphisme sans sous-espace stable de dimension finie non nulle) 3

(Mines-Ponts PSI 10) Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et Φ l'application qui à $f \in E$ associe $\Phi(f)\ : x \mapsto \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. Montrer que Φ est un endomorphisme de E ne stabilisant aucun sous-espace vectoriel de dimension finie non nulle.

Exercice 35 (Zéros d'une solution de $y'' - qy = 0$) 3

Soit q une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$, f une solution non identiquement nulle de $y'' - qy = 0$. Montrer que f s'annule au plus une fois sur $\mathbb{R}$.

Exercice 36 ($f(x) + f(x+\pi/2) \geqslant 0$ guidé) 3

(CCP)

1 Résoudre l'équation $y'' + 4y = 0$.

2 Soient $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $h : x \mapsto \frac{1}{2}\int_0^x g(t)\sin(2x - 2t)\mathrm{d}t$. Montrer que h est solution de $y'' + 4y = g$. Résoudre : $y'' + 4y = g$.

3 Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f'' + 4f \geqslant 0$. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + f(x+\pi/2) \geqslant 0$.

Exercice 37 (Solutions $y'' + qy = 0$ où q est périodique (ENS MP 10)) 4

Soit q une application continue périodique et non identiquement nulle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$, y une solution de $y'' + qy = 0$. Montrer que y s'annule une infinité de fois sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 38 (Zéros d'une solution de $y'' + e^t y = 0$ (X MP 10)) 4

Soit $f\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution non identiquement nulle de l'équation différentielle $(E) : y'' + e^t y = 0$. Montrer que f admet une infinité dénombrable de zéros.

CHAPITRE XVIII

Calcul différentiel

Sommaire

On peut tenter d'étendre l'étude de régularité des fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles $f : I \to \mathbb{R}$, essentiellement menée en première année, en passant à une fonction $f : U \to F$ où U est une partie d'un EVN E de dimension finie, et où F est aussi un EVN de dimension finie.

Jusqu'à présent, nous avons :

– étendu la notion de continuité, dans le chapitre sur les EVN. Pour la seule continuité, il n'est pas problématique « d'agrandir » la source et le but de f.
– étendu la notion de dérivabilité, dans le chapitre sur les fonctions vectorielles. Pour la dérivabilité, agrandir le but de f ne change pas fondamentalement les résultats. On pouvait d'ailleurs se ramener au cas de fonctions à valeurs réelles en considérant les fonctions coordonnées.

Ces chapitres étaient certes plus abstraits qu'en première année, mais les études de continuité et de dérivabilité qui y étaient menées n'étaient pas si différentes de celles effectuées en MPSI.

Il faut bien avoir conscience qu'agrandir la source de f est bien plus problématique. Il n'y a notamment pas d'équivalent des fonctions coordonnées.

Si l'on s'intéresse à une extension de la dérivabilité, qui s'appliquerait à une fonction $f : U \subset E \to \mathbb{R}$, où $E \neq \mathbb{R}$, on est limité par l'absence de notion de taux d'accroissement entre deux vecteurs de E.

Dans une première partie, nous allons pallier cette difficulté, en nous intéressant à des fonctions d'une variable réelle, liées à f, de la forme $t \mapsto f(a+th)$ (où h est un vecteur de E) : on peut alors se rattacher à la dérivation usuelle. Cela nous conduira à définir la dérivée d'une fonction en un point selon un vecteur, puis les dérivées partielles premières d'une fonction en un point, qui en sont des cas particuliers.

Nous verrons cependant que ces notions ne seront pas de bonnes généralisations de la dérivabilité, notamment car l'existence de ces dérivées en un point n'entraîne pas la continuité en ce même point.

Dans une deuxième partie, nous étendrons, avec succès cette fois-ci, la notion de dérivabilité en partant de l'équivalence entre dérivabilité et existence d'un développement limité à l'ordre 1 : cela conduira à la notion de différentielle.

On continue l'étude en définissant les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, et en étudiant la stabilité de cette propriété.

Dans la suite, tous les espaces vectoriels considérés ont $\mathbb{R}$ pour corps des scalaires. On fixe des espaces vectoriels normés de dimension finie E, F et G, et des bases respectives $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ de ces espaces. U désigne un ouvert (non vide) de E.

$\mathcal{C}_n$ désignera la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Quand on travaillera dans $\mathbb{R}^n$, on travaillera implicitement dans la base $\mathcal{C}_n$, et on le munira de sa structure euclidienne canonique.

Comme on travaille en dimension finie, les normes sont équivalentes, et les notions abordées dans ce chapitre ne dépendront pas de la norme choisie.

Dans la suite, f désigne une application de U dans F.

1. Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles

Définition (Dérivée selon un vecteur) 1.a

Soit a un point de U, et h un vecteur de E. On dit que f admet une *dérivée en a selon le vecteur h* si la fonction vectorielle

$$\varphi_{a,h} \ : t \mapsto f(a+th)$$

définie au voisinage de 0, est dérivable en 0. Dans ce cas, $\varphi'_{a,h}(0)$ est appelée *dérivée de f en a selon le vecteur h*, et noté $\mathrm{D}_h f(a)$.
On définit ainsi une application $\mathrm{D}_h f$ (sur une partie de U), appelée *fonction dérivée de f selon le vecteur h.*

Démonstration

Justification du fait que la fonction ci-dessus $\varphi_{a,h}$ soit bien définie au voisinage de 0 :

□

f admet une dérivée en a selon h si et seulement si $\frac{f(a+th)-f(a)}{t}$ admet une limite l (dans F) lorsque t tend vers 0, et on a alors $\mathrm{D}_h f(a) = l$.

f admet toujours en a une dérivée selon le vecteur nul, qui est nulle : dériver selon ce vecteur présentant peu d'intérêt, on ne traitera parfois que le cas d'un vecteur non nul.

Définition (Dérivées partielles premières en un point) 1.b

Une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E étant fixée, on dit, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et $a \in U$, que f admet une *dérivée partielle (première) selon la i-ème variable en a* si f admet une dérivée en a selon le vecteur e_i.
Si elle existe, cette dérivée partielle est notée $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ ou $\partial_i f(a)$.
Cela définit une application dérivée partielle (première) de f selon la i-ème variable, notée $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ou $\partial_i f$.

f admet une dérivée partielle première selon la i-ème variable si et seulement si

$$\frac{f(a+te_i)-f(a)}{t}$$

admet une limite dans F lorsque t tend vers 0.

Lorsqu'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E est fixée, l'identification entre $f(x)$ et $f(x_1, \dots, x_n)$ est autorisée. f admet alors une dérivée partielle première en $a = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ selon la première variable [1] si et seulement si $t \mapsto f(\alpha_1 + t, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ est dérivable en 0, *i.e.*

$$t \mapsto \frac{f(\alpha_1 + t, \alpha_2, \dots, \alpha_n) - f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}{t}$$

admet une limite finie en 0.

De même bien sûr, pour la dérivée partielle première selon une autre variable.

En dimension 2, on écrit plutôt x et y que x_1 et x_2 respectivement, donc on écrira $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ les dérivées partielles premières respectives selon la première et la seconde variable. De même en dimension 3 avec x, y, z.

1. On dit aussi, abusivement : selon x_1

En pratique, la fonction $f\ : (x,y) \in U \subset \mathbb{R}^2 \mapsto f(x,y)$ admet une dérivée partielle première selon sa première variable en $(x_0,y_0) \in U$ si et seulement si $\alpha\ : x \mapsto f(x,y_0)$ est dérivable en x_0, et on a alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \alpha'(x_0,y_0)$$

et elle admet une dérivée partielle première selon la seconde variable en ce point si et seulement si $\beta\ : y \mapsto f(x_0,y)$ est dérivable en y_0 et on a alors

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \beta'(x_0,y_0)$$

Exercice (Dérivées partielles première et seconde en l'origine)

1 Montrer que

$$f : (x,y) \mapsto \frac{x^2y}{x^2+y^2} \text{ et } f(0,0)=0$$

est continue à l'origine, et qu'elle y admet des dérivées selon tout vecteur.
2 Montrer que $g\ : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto |x+y|$ est continue à l'origine, mais qu'elle n'y admet pas de dérivées partielles premières en ce point.
3 Montrer que

$$h : (x,y) \mapsto \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ et } h(0,0)=0$$

admet des dérivées partielles premières en l'origine, mais qu'elle n'y est pas continue. Montrer que h n'admet pas des dérivées selon tout vecteur.
4 Montrer que

$$k : (x,y) \mapsto \frac{xy^2}{x^2+y^4} \text{ et } k(0,0)=0$$

admet des dérivées selon tout vecteur en l'origine, mais qu'elle n'y est pas continue.

1

Quelle morale tirer de ces exemples ?
– Le deuxième exemple montre que la continuité n'entraîne pas l'existence de dérivées partielles premières. Ce n'est pas surprenant, la continuité d'une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles en un point n'entraîne pas sa dérivabilité en ce point.
– Le troisième exemple montre que l'existence de dérivées partielles premières en un point n'entraîne pas la continuité en ce point. Cela montre que remplacer la dérivabilité par l'existence de dérivées partielles premières n'est pas très pertinent.
– Le dernier exemple va un cran plus loin : il montre que l'existence de dérivées selon tout vecteur en un point n'entraîne pas la continuité en ce point. Remplacer la dérivabilité par l'existence de dérivées selon tout vecteur n'est pas non plus très pertinent.

Il faut bien comprendre le rôle purement formel du x et du y dans les expressions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Exercice (Calculs simples de dérivées partielles premières)

Soit $f\ : (x,y) \mapsto x^2y^3$. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x^3-x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(y,x)$.

2

2. Différentielle

2.1. Généralités

Définition (Développement limité à l'ordre 1 en un point d'une fonction entre EVN) 2.a

On dit que f admet un *développement limité* à l'ordre 1 en a s'il existe $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que

$$f(a+h) = f(a) + \varphi(h) + o(h)$$

i.e. telle que

$$\frac{f(a+h) - f(a) - \varphi(h)}{\|h\|} \longrightarrow_{h \to 0_E} 0_F$$

f admet un développement limité à l'ordre 1 en a si et seulement si ses fonctions coordonnées (dans une base donnée de F) en admettent un également. Cela nous permet de nous restreindre, si besoin est, au cas d'une fonction à valeurs réelles.

Lemme (Développement limité à l'ordre 1 et dérivée selon un vecteur) 2.a

Si f admet un développement limité à l'ordre 1 en a

$$f(a+h) = f(a) + \varphi(h) + o(h),$$

alors f est dérivable selon tout vecteur h en a, et

$$D_h f(a) = \varphi(h)$$

Démonstration

□

Ainsi, une fonction $f : E \to F$ admet au plus un développement limité en un point a donné : dans la définition ci-dessus, au plus une application linéaire φ est susceptible de convenir.

Définition (Différentiabilité d'une application en un point) 2.b

On dit que f est *différentiable* en a si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en a :

$$f(a+h) = f(a) + \varphi(h) + o(h)$$

L'application linéaire φ est appelée *différentielle* de f en a, ou encore *application linéaire tangente* à f en a, et notée $\mathrm{d}f(a)$.
Pour tout $h \in E$, on notera $\mathrm{d}f(a) \cdot h$ le vecteur $(\mathrm{d}f(a))(h)$ de F, de sorte que

$$f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}f(a) \cdot h + o(h)$$

En quelque sorte, la différentielle de f en a est la partie linéaire de f localement en a.
D'après le lemme précédent :

Corollaire (Lien entre différentielle et dérivée selon un vecteur)

2.b

Si f est différentiable en a, alors, pour tout vecteur h de E, f admet une dérivée selon h en a, et :

$$\mathrm{d}f(a) \cdot h = \mathrm{D}_h f(a)$$

En particulier, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, f admet une i-ème dérivée partielle en a, et

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \mathrm{d}f(a) \cdot e_i$$

Exemple (Différentiabilité d'une application en un point)

i

Admettre un développement limité à l'ordre 1 en a, c'est pouvoir être approché, à un négligeable près, par une fonction affine (c'est-à-dire la somme d'une fonction constante et d'une application linéaire), ce qui rejoint la définition de la dérivabilité en un point d'une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles.
Dans ce dernier cas, si U est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, la différentiabilité de f en a équivaut à la dérivabilité de f en a, et on a alors $f'(a) = \mathrm{d}f(a) \cdot 1$, ou encore

$$\mathrm{d}f(a) \cdot h = f'(a)h$$

pour tout $h \in \mathbb{R}$.
La différentiabilité est donc bien une généralisation de la dérivabilité.

Illustration

Proposition (Différentiabilité et continuité)

2.c

Si f est différentiable en a, alors elle est continue en a, mais la réciproque est fausse.

Démonstration

$\square$

Définition (Différentielle d'une application)

On dit que l'application f est *différentiable* sur U si elle est différentiable en tout point de U.
Cela définit alors l'application *différentielle* de f, notée $\mathrm{d}f$:

$$\mathrm{d}f \; : \; \begin{array}{rcl} U & \to & \mathcal{L}(E,F) \\ a & \mapsto & \mathrm{d}f(a) \end{array}$$

2.c

Même si $U = E$, il n'y a aucune raison à ce que $\mathrm{d}f$ (de E dans $\mathcal{L}(E,F)$) soit linéaire.

Exemple (Différentielle d'une application)

(1) Si $f \;: U \to F$ est constante, alors elle différentiable en tout point a de U, et $\mathrm{d}f(a) = 0_{\mathcal{L}(E,F)}$.

(2) Si $f \;: E \to F$ est linéaire, alors elle différentiable en tout $a \in E$, et

$$\mathrm{d}f(a) = f$$

(faites attention au typage).

(3) Si $B \;: E \times F \to G$ est bilinéaire, alors B est différentiable en $a = (a_E, a_F) \in E \times F$, et, pour tout $h = (h_E, h_F) \in E \times F$:

$$\mathrm{d}B(a) \cdot h = B(a_E, h_F) + B(h_E, a_F)$$

(4) Si $\varphi \;: E_1 \times \cdots \times E_m \to F$ est m-linéaire, alors φ est différentiable en $a = (a_1, \dots, a_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m$, et, pour tout $h = (h_1, \dots, h_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m$:

$$\mathrm{d}\varphi(a) \cdot h = \varphi(h_1, a_2, \dots, a_m) + \varphi(a_1, h_2, a_3, \dots, a_m) + \cdots + \varphi(a_1, \dots, a_{m-1}, h_m)$$

(5) Si $f \;: U \to F$ est différentiable en a, et si V est un ouvert de U comprenant a, alors la restriction g de f à V est différentiable en a et $\mathrm{d}g(a) = \mathrm{d}f(a)$.

ii

Plus généralement, la différentiabilité en un point est une notion locale : si f et g sont deux fonctions définies sur des ouverts contenant a, et si elles coïncident au voisinage de a, alors f est différentiable en a si et seulement si g l'est, avec égalité des différentielles en ce point le cas échéant.

Proposition (Lien entre différentielle et dérivées partielles)

On suppose f différentiable en a. La fonction f admet alors des dérivées partielles premières en a selon les variables $x_1, \dots, x_n$. De plus, on a, pour tout $h = \sum_{i=1}^n h_i e_i \in E$:

$$\mathrm{d}f(a)(h) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

2.d

Démonstration

□

Exercice (Étude de différentiabilité) 3

Étudier la différentiabilité en l'origine des fonctions f, g, h et k du premier exercice de cours. Le cas échéant, donner la différentielle en l'origine.

Si f est à valeurs dans $\mathbb{R}$, et si on note $\mathrm{d}x_i$ la i-ème forme linéaire coordonnée dans $\mathcal{B}$ (*i.e.* l'application $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \mapsto x_i$), et si f est différentiable en a, alors

$$\mathrm{d}f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\mathrm{d}x_i$$

En dimension 2 :

$$\mathrm{d}f(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(a)\mathrm{d}y$$

En dimension 3 :

$$\mathrm{d}f(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(a)\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}(a)\mathrm{d}z$$

Si f est différentiable sur U, on écrira même directement (et respectivement) :

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i, \quad \mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y \quad \text{et} \quad \mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z$$

N'employez ces notations que si vous savez à quoi font référence $\mathrm{d}x_i$, $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ et $\mathrm{d}z$.

L'existence de dérivées partielles premières [2] au point a n'implique pas la différentiabilité en ce point (la fonction peut même ne pas y être continue).

Exercice (Calcul de la différentielle) 4

Calculer (sans justifier son existence) la différentielle en tout point où elle existe des fonctions f, g, h et k du premier exercice de cours.
Remarque : la différentiabilité se justifiera aisément grâce au théorème 5.a page 534.

Corollaire (Matrice de la différentielle en un point dans un couple de bases) 2.e

On suppose f différentiable en a, et on note $(f_1, \dots, f_p)$ le p-uplet de ses fonctions composantes dans la base $\mathcal{C}$. La matrice M de $\mathrm{d}f(a)$ dans $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_p}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

2. et même de dérivée selon tout vecteur

Définition (Matrice jacobienne)

Dans le cas où $f = (f_1, \dots, f_p)$ est une application définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, et si f admet des dérivées partielles premières en a, on appelle *matrice jacobienne* de f en a et on note $J_a(f)$ la matrice

$$J_a(f) \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_p}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

2.d

C'est donc la matrice de $\mathrm{d}f(a)$ dans le couple de bases $(\mathcal{C}_n, \mathcal{C}_p)$. D'ailleurs, pour des raisons pratiques, nous généralisons la notion de jacobienne, en définissant la jacobienne d'une application $f : U \to F$ différentiable en a relativement au couple de bases $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ comme la matrice de $\mathrm{d}f(a)$ dans $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ (c'est-à-dire la matrice M du corollaire ci-dessus). Nous la noterons $J_{a,\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$, voire $J_a(f)$ s'il n'y a pas d'ambiguité sur les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

Exercice (Calcul de jacobienne)

Calculer la jacobienne en tout point de

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) & \mapsto & (r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \end{array}$$

5

2.2. Opérations sur les applications différentiables

Proposition (Différentielle d'une combinaison linéaire d'applications différentiables)

Soit $f, g : U \to F$ des applications différentiables en $a \in U$. Pour tous réels λ et μ, la fonction $\lambda f + \mu g$ est différentiable en a, et :

$$\mathrm{d}(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda \mathrm{d}f(a) + \mu \mathrm{d}g(a)$$

2.f

Démonstration

$\square$

Autrement dit, l'ensemble $\mathcal{D}_a(U, F)$ des fonctions de U dans F, différentiables en a, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et l'application

$$\psi : \begin{array}{rcl} \mathcal{D}_a(U, F) & \to & \mathcal{L}(E, F) \\ f & \mapsto & \mathrm{d}f(a) \end{array}$$

est linéaire.

Théorème (Différentielle d'une composée d'applications différentiables)

Soit $f : U \to F$, V un ouvert de F contenant $f(U)$, et $g : V \to G$. Soit $a \in U$. On suppose f différentiable en a, et g différentiable en $b \overset{def}{=} f(a)$. La composée $g \circ f$ est alors différentiable en a, et

$$\mathrm{d}(g \circ f)(a) = \mathrm{d}g(f(a)) \circ \mathrm{d}f(a) = \mathrm{d}g(b) \circ \mathrm{d}f(a)$$

2.g

Démonstration

□

Corollaire (Différentielle de la composée d'une application différentiable par une application linéaire)

Soit $f : U \to F$, différentiable en a, et $L \in \mathcal{L}(F, G)$. La fonction $L \circ f$ est alors différentiable en a, et

$$\mathrm{d}(L \circ f)(a) = L \circ (\mathrm{d}f(a))$$

2.h

Démonstration

□

Corollaire (Différentielle d'une composée d'applications différentiables par une application bilinéaire)

Soit $f : U \to F$, $g : U \to G$ des applications différentiables en a, et $B : F \times G \to H$ une application bilinéaire. La fonction $B(f, g) : x \mapsto B(f(x), g(x))$ de E dans H est alors différentiable en a, et, pour tout $h \in E$:

$$\mathrm{d}(B(f, g))(a) \cdot h = B(f(a), \mathrm{d}g(a) \cdot h) + B(\mathrm{d}f(a) \cdot h, g(a))$$

2.i

Démonstration

□

Exemple (Différentielle d'un produit)

(1) Si $\lambda\ : U \to \mathbb{R}$ et $f\ : U \to E$ sont différentiables en a, alors λf est différentiable en a, et, pour tout $h \in E$:
$$\mathrm{d}(\lambda f)(a) \cdot h = (\mathrm{d}\lambda(a) \cdot h) f(a) + \lambda(a)(\mathrm{d}f(a) \cdot h)$$

(2) Si F est une $\mathbb{R}$-algèbre (et donc si $B\ : (x, y) \in F^2 \mapsto xy$ est bilinéaire), et si $f, g\ : U \to F$ sont différentiables en a, alors fg est différentiable en a, et pour tout $h \in E$:
$$\mathrm{d}(fg)(a) \cdot h = (\mathrm{d}f(a) \cdot h)\, g(a) + f(a)\, (\mathrm{d}g(a) \cdot h)$$

(3) Si E est euclidien, la fonction $f\ : x \mapsto \|x\|^2$ est différentiable en tout $x \in E$, et, pour tout $h \in E$:
$$\mathrm{d}f(x) \cdot h = 2 < x, h >$$

(4) La fonction $C\ : M \mapsto M^2$ est différentiable en tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et, pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:
$$\mathrm{d}\, C(M) \cdot H = MH + HM$$

iii

Corollaire (Différentielle d'une fonction à valeurs réelles)

Soit $f, g\ : U \to \mathbb{R}$ des fonctions différentiables en a.

(1) fg est différentiable en a, et, pour tout $h \in E$:
$$\mathrm{d}(fg)(a) = (\mathrm{d}f(a) \cdot h) g(a) + f(a)(\mathrm{d}g(a) \cdot h)$$

(2) Si $f\ : U \to \mathbb{R}$ est différentiable en a, et si $f(a) \neq 0$, alors $g = \frac{1}{f}$ est définie au voisinage de a, différentiable en a, et :
$$\mathrm{d}g(a) = -\frac{\mathrm{d}f(a)}{f(a)^2}$$

2.j

Démonstration

□

Proposition (Dérivée le long d'un arc)

Si $\gamma\ : I \to U$ est une application définie sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$, dérivable en t, si f est différentiable en $\gamma(t)$, alors $f \circ \gamma$ est dérivable en t, et
$$(f \circ \gamma)'(t) = \mathrm{d}f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

2.k

Démonstration

□

Interprétation géométrique en termes de tangentes.

Illustration

Dérivation de $g\ : t \mapsto f(x_1(t),\dots,x_n(t))$ (lorsque c'est possible) :

$$g'(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i'(t) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1(t),\dots,x_n(t))$$

Proposition (Dérivées partielles d'une composée d'applications différentiables) 2.1

Soit $f\ : U \to F$, de composantes $f_1,\dots,f_p$, V un ouvert de F contenant $f(U)$, et $g\ : V \to G$ de composantes $g_1,\dots,g_q$. Soit $a \in U$. On suppose f différentiable en a, et g différentiable en $f(a)$. On a alors

$$J_{a,\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f) = J_{f(a),\mathcal{C},\mathcal{D}}(g)\, J_{a,\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$$

Démonstration

□

On a donc dans ce contexte, pour tout $(i,j) \in [\![1,q]\!] \times [\![1,n]\!]$:

$$\partial_j(g_i \circ f)(a) = \sum_{k=1}^{p} \partial_k g_i(f(a)) \partial_j f_k(a)$$

et donc

$$\partial_j(g \circ f)(a) = \sum_{k=1}^{p} \partial_j f_k(a) \partial_k g(f(a))$$

Autrement dit :

Proposition (Règle de la chaîne)

On suppose que

$$f = (f_1, \dots, f_p) \ : (x_1, \dots, x_n) \in U \subset \mathbb{R}^n \mapsto f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^p$$

est différentiable en a.
Soit V un ouvert de $\mathbb{R}^p$ tel que $f(U) \subset V$, et

$$g = (g_1, \dots, g_q) \ : (y_1, \dots, y_p) \in V \mapsto g(y_1, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^q$$

une application différentiable en $f(a)$.
La fonction

$$h \overset{def}{=} g \circ f = (h_1, \dots, h_q) = (g_1 \circ f, \dots, g_q \circ f) \ : (x_1, \dots, x_n) \mapsto h(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^q$$

admet alors des dérivées partielles premières selon la j-ème variable en a pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, et, pour tout $i \in [\![1, q]\!]$:

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(a) = \frac{\partial (g_i \circ f)}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(a)) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)$$

2.m

Exercice (Règle de la chaîne)

Soit $f \ : (x, y) \mapsto (x^3 + y^2, 3x + xy, xy^2)$ et $g \ : (u, v, w) \mapsto u^2 v e^w$. Calculer les dérivées partielles premières de $g \circ f$ avec la règle de la chaîne.

6

3. Cas des applications numériques

On s'intéresse ici au cas des applications numériques (c'est-à-dire à valeurs réelles) $f \ : E \to \mathbb{R}$, et particulièrement à leurs extrema. On observe qu'alors la différentielle de f en a (si elle existe) est une forme linéaire sur E.

Définition (Ligne de niveau)

On appelle *ligne de niveau* (ou *équipotentielle*) de f toute partie non vide de E de la forme $f^{-1}(\{\lambda\})$, où $\lambda \in \mathbb{R}$. On dit alors que cette ligne de niveau est d'équation

$$f(x_1, \dots, x_n) = \lambda$$

3.a

Définition (Gradient)

On suppose ici que E est euclidien. On suppose f différentiable en a. On appelle *gradient* de f en a l'unique vecteur, noté $\nabla f(a)$ ou $\overrightarrow{grad}\, f(a)$, tel que

$$\forall h \in E, \quad \mathrm{d}f(a) \cdot h = (\nabla f(a) | h)$$

3.b

Proposition (Expression du gradient en base orthonormée)

On suppose que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E, et que f est différentiable en a. On a alors :

$$\overrightarrow{grad}\, f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) e_i$$

3.a

Démonstration

□

Interprétation géométrique du gradient : si $\nabla f(a) \neq 0$, il est colinéaire et de même sens que le vecteur unitaire selon lequel la dérivée de f en a est maximale.

Illustration

Exercice (Gradient de la norme)

Déterminer le gradient, en tout point où il est défini, de la fonction norme $N : x \mapsto \|x\|$ d'un espace euclidien E.

7

La proposition 2.k conduit à la formule

$$(f \circ \gamma)'(t) = (\overrightarrow{grad}\, f(\gamma(t))|\gamma'(t)) = \mathrm{d}f_{\gamma(t)}(\gamma'(t))$$

Définition (Point critique d'une application différentiable)

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application différentiable. Un point a de U est dit *critique* si la différentielle de f en a est nulle.

3.c

Dans le cadre euclidien, a est critique pour f (supposée différentiable) si et seulement si le gradient de f en a est nul.

Proposition (Condition nécessaire d'existence d'un extremum local)

Si f est différentiable, et si elle présente un extremum local en a, alors a est un point critique de f.

3.b

Démonstration

□

La réciproque est fausse, et elle l'était déjà pour les fonctions d'une variable réelle :

Comme dans le cas des fonctions d'une variable réelle, il est important de se placer sur un ouvert :

Quand on travaille avec une fonction différentiable sur un ouvert, la recherche d'extrema se fait souvent en déterminant d'abord les points critiques, puis en étudiant localement la fonction en ces différents points, en formant $f(a+h)-f(a)$ par exemple (où a est critique). Puisque le point a est critique, un développement limité à l'ordre 1 ne suffit pas : on fait une étude en incluant des termes quadratiques (de type h_ih_j). L'étude se fait au cas par cas.

La notion de compacité peut aussi permettre de montrer l'existence d'un extremum, sans toutefois expliciter cet extremum (et encore moins dire où il est atteint).

Exercice (Une recherche d'extremum)

Faire les deux premières questions de l'exercice 13 de TD.

8

4. Vecteurs tangents à une partie d'un espace normé de dimension finie

Définition (Vecteur tangent à une partie de E en un point)

Si X est une partie de E et x un point de X, un vecteur v de E est *tangent* à X en x s'il existe $\varepsilon > 0$ et un arc γ défini sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$, dérivable en 0 à valeurs dans X, tels que $\gamma(0) = x, \gamma'(0) = v$.

4.a

Illustration

L'ensemble des vecteurs tangents à X en x est stable par multiplication par un scalaire. On dit que c'est un *cône vectoriel*. En revanche, cet ensemble n'est pas toujours un espace vectoriel.

Illustration

Proposition (Plan vectoriel tangent à un graphe de fonction différentiable) 4.a

On se place dans le cas où $E = \mathbb{R}^3$ euclidien canonique et où X est le graphe d'une fonction différentiable $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
Pour tout $w = (x_0, y_0, z_0) \in X$ (où $z_0 = f(x_0, y_0)$), l'ensemble des vecteurs tangents à X en w est le plan vectoriel admettant $\vec{n} \overset{def}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial x_0}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y_0}(x_0, y_0), -1\right)$ pour vecteur normal.

Démonstration

Si $v = (v_x, v_y, v_z)$ est un vecteur tangent à X en w, alors il existe

$$\gamma = (\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z) \ :]-\varepsilon, \varepsilon[\to X$$

dérivable en 0 telle que $\gamma(0) = w$ et $\gamma'(0) = v$.
Pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, on a

$$\gamma_z(t) = f(\gamma_x(t), \gamma_y(t)),$$

d'où, en dérivant en 0 :

$$\gamma_z'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\gamma_x'(0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\gamma_y'(0),$$

soit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)v_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)v_y - v_z = 0$$

et donc v est orthogonal à $\vec{n}$.
Réciproquement, soit v un vecteur orthogonal à $\vec{n}$. L'application

$$\varphi \ : t \mapsto (x_0 + tv_x, y_0 + tv_y, f(x_0 + tv_x, y_0 + tv_y))$$

est définie sur un voisinage de 0 (dans $\mathbb{R}$), à valeurs dans X et dérivable en 0. De plus,

$$\varphi'(0) = \left(v_x, v_y, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)v_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)v_y\right) = v$$

donc v est bien tangent à X en w.

$\square$

Définition (Plan affine tangent) 4.b

Dans ce contexte, on appelle *plan affine tangent* à la surface X d'équation cartésienne $z = f(x, y)$ au point de paramètres x_0 et y_0 le plan affine passant par $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ et de direction l'ensemble des vecteurs tangents à X en ce point.

Corollaire (Équation cartésienne du plan affine tangent) 4.b

Une équation cartésienne du plan affine tangent à X d'équation $z = f(x, y)$ au point(x_0, y_0, z_0) (où $z_0 = f(x_0, y_0)$) est :

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Démonstration

$\square$

Exercice (Plan tangent à la sphère unité)

On considère $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 1\}$, et

$$f \ : (x, y) \in U \mapsto \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

Soit X le graphe de f, et $M = (x_0, y_0, z_0) \in X$. Déterminer une équation (simplifiée) du plan tangent à X en M.

9

Illustration

Proposition (Lignes de niveau et gradient)

On suppose E euclidien. Soit $f \ : U \subset E \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable.
Si X est une ligne de niveau de f, alors les vecteurs tangents à X au point x de X sont orthogonaux au gradient de f en x.

4.c

Démonstration

$\square$

Illustration

Exercice (Plan tangent à la sphère unité par les équipotentielles) 10

Soit S la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique, et soit $M = (x_0, y_0, z_0) \in S$. Montrer, en utilisant la proposition précédente, qu'une équation du plan tangent à S en M est :

$$x_0 x + y_0 y + z_0 z = 1$$

PC : électrostatique.

Exercice (Gradient en polaires) 11

Exprimer le gradient en polaires.
Réponse : $\overrightarrow{grad}\, f = \frac{\partial g}{\partial r} e_r + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta} e_\theta$

5. Applications continûment différentiables

Définition (Application continûment différentiable) 5.a

Une application f est dite de *classe* $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U si elle est différentiable sur U et si $\mathrm{d}f$ est continue sur U.

Cette définition est bien compatible avec celle déjà définie dans le cadre des fonctions vectorielles. Bien sûr, si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, alors elle est continue sur U.

Théorème (Caractérisation des applications continûment différentiables) 5.a

L'application f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si et seulement si les dérivées partielles relativement à une base de E existent en tout point de U et sont continues sur U.

Démonstration

Non exigible admise. $\square$

Ce théorème permet par exemple de justifier que les fonctions f, h, k de l'exercice de cours 1 page 519.

Théorème (Intégration sur un chemin) 5.b

Si f est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans F, si γ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0,1]$ dans U, si $\gamma(0) = a, \gamma(1) = b$, alors :

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 \mathrm{d}f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\mathrm{d}t.$$

Démonstration

□

PC : circulation d'un champ de vecteurs dérivant d'un potentiel.

Proposition (Caractérisation des fonctions constantes sur un connexe par arcs) 5.c

Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, F)$, où U est connexe par arcs. L'application f est constante si et seulement si sa différentielle en tout point est nulle.

Démonstration

On ne la fait que dans le cas où U est convexe.

□

Bien sûr, le résultat tombe en défaut si on enlève l'hypothèse de connexité par arcs[3] :

6. Dérivées partielles d'ordre supérieur

Supposons que f admette une i-ème dérivée partielle première $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. Il se peut que cette fonction dérivée partielle première admette elle-même une j-ième dérivée partielle première en $a \in U$, c'est-à-dire que le vecteur

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)}{\partial x_j}(a)$$

existe. Si tel est le cas, ce vecteur est appelé *dérivée partielle seconde de f en a selon la i-ème puis la j-ième variable*, et est noté $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$ et même $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)$ lorsque $i = j$.

Si un tel vecteur existe pour tout $a \in U$, on définit l'application dérivée partielle seconde (ou d'ordre 2) de f selon la i-ème puis la j-ième variable, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, qui est dite *croisée* si $i \neq j$.

Par exemple, pour une fonction de deux variables f, on peut définir au plus quatre applications dérivées partielles secondes : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ (ces deux dernières étant croisées).

Plus généralement, on peut définir la notion de dérivée partielle d'ordre k. On emploiera librement les $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{j_k} \dots \partial x_{j_1}}$ et $\partial_{j_k} \dots \partial_{j_1} f$ pour les désigner.

3. Tout comme l'hypothèse de travailler sur un intervalle est essentielle pour la plupart des théorèmes portant sur les fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles.

Définition (Application k fois continûment différentiables) 6.a

Une application est dite de *classe* $\mathcal{C}^k$ sur un ouvert U si ses dérivées partielles d'ordre k existent et sont continues sur U. On note $\mathcal{C}^k(U, F)$ leur ensemble.
Une application est dite de classe $\mathcal{C}^\infty$ si elle admet des dérivées partielles à tout ordre.

Nous avons étendu la notion de fonction de classe $\mathcal{C}^1$ en fonction de classe $\mathcal{C}^k$ pour $k \geqslant 1$ en nous référant aux dérivées partielles, faute de disposer de la notion de différentielle de f en a à l'ordre k.

Applications k fois continûment différentiables 6.1

On a bien sûr, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{C}^\infty(U, F) \subset \mathcal{C}^{k+1}(U, F) \subset \mathcal{C}^k(U, F)$$

PC : laplacien.

Théorème de Schwarz 6.a

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to F$ et $a \in U$. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$. Alors :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)$$

Démonstration

Non exigible admise. □

Ce théorème est présenté pour une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, mais on peut bien sûr l'étendre à une fonction de plus de deux variables.

Exercice (Dérivées partielles secondes croisées) 12

Faire l'exercice 6 de TD.

Proposition (Opérations algébriques sur les applications k fois continûment différentiables) 6.b

(1) L'ensemble $\mathcal{C}^k(U, F)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

(2) Dans le cas où $F = \mathbb{R}$, c'est même une $\mathbb{R}$-algèbre, et si $f \in \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R})$ ne s'annule pas, alors $\frac{1}{f} \in \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R})$.

(3) Si B est bilinéaire, et si f et g sont de classe $\mathcal{C}^k$, alors $B(f, g)$ est de classe $\mathcal{C}^k$.

Démonstration

Non exigible. $\square$

Proposition (Composition d'applications k fois continûment différentiables)

La composée licite d'applications de classe $\mathcal{C}^k$ est également de classe $\mathcal{C}^k$.

6.c

Démonstration

Non exigible. $\square$

Exemple (Fonctions indéfiniment différentiables)

Tout fonction polynomiale est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine, toute fonction rationnelle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition.

i

7. Exemples d'équations aux dérivées partielles

Une *équation aux dérivées partielles* (en bref : EDP) pour une fonction de plusieurs variables est l'analogue d'une équation différentielle pour une fonction d'une seule variable : elle relie une fonction à ses différentes dérivées partielles.

Par exemple, l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ telles que $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ est l'ensemble des fonctions f telles qu'il existe $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ pour laquelle

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \varphi(x).$$

Si on cherche les solutions d'une équation aux dérivées partielles linéaire d'ordre 1 comme $\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}=x+y$ sur $\mathbb{R}^2$, on peut d'abord trouver une solution particulière, et résoudre l'équation homogène associée par changement de variables affine :

Si on cherche les solutions de l'*équation des ondes* (également appelée *équation des cordes vibrantes*) en dimension 1 :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=0$$

(pour $v\in\mathbb{R}_+^*$) d'inconnue $f\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$, on peut effectuer le changement de variables $r=x-vt, y=x+vt$. On montre alors que la solution générale à cette EDP est

$$f(x,t)=\psi(x-vt)+\varphi(x+vt),$$

où ψ et φ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Vous devez savoir aussi passer par les coordonnées polaires.

Tout autre changement de variable doit vous être indiqué.

8. Feuille de TD 18 : Calcul différentiel

8.1. Régularité des fonctions de deux variables

Exercice 1 (Continuité des fonctions de deux variables) 0

1 Soit $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy > -1\}$.

i Montrer que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

ii Étudier la continuité de la fonction f définie sur U par

$$f(x, y) = \frac{\ln(1 + xy)}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \text{ et } f(0, 0) = 0.$$

2 On considère la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x, y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $g(0, 0) = 0$.
Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}^2$.
Indication : on pourra utiliser l'inégalité entre moyennes arithmétique et géométrique.

3 Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, et

$$\begin{array}{rrcl} h : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & \frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{y-x} \text{ si } x \neq y, \varphi'(x) \text{ sinon.} \end{array}$$

Montrer que h est continue sur $\mathbb{R}^2$.
Indication : on pourra observe que pout tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$h(x, y) = \int_0^1 \varphi'(x + t(y - x))\mathrm{d}t$$

Exercice 2 (Fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$) 0

Soit

$$\begin{array}{rrcl} f : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & (x^2 - y^2)\ln(x^2 + y^2) \text{ si } (x, y) \neq (0, 0), 0 \text{ sinon} \end{array}$$

Étudier la régularité de f.

Exercice 3 (Régularité jusqu'à la classe $\mathcal{C}^1$) 0

1 On considère la fonction

$$\begin{array}{rrcl} f : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & \frac{xy(x+y)}{x^2+y^2} \end{array}$$

prolongée par la valeur 0 en l'origine.
Ce prolongement est-il continu ? admet-il des dérivées partielles (et des dérivées selon tout vecteur non nul) en tout point ? Est-il de classe $\mathcal{C}^1$?

2 Mêmes questions avec

$$\begin{array}{rrcl} g : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & \frac{xy}{x^2+y^2} \end{array}$$

3 Mêmes questions avec

$$\begin{array}{rrcl} h : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & \frac{xy^2}{x^2+y^4} \end{array}$$

Exercice 4 (Limite en l'origine à paramètres) 2

Déterminer les familles $(a_{i,j})_{0\leqslant i,j\leqslant 3}$ de réels pour lesquelles

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \frac{\sum_{0\leqslant i,j\leqslant 3} a_{i,j}x^iy^j}{x^2+y^2} \end{array}$$

admet une limite finie en l'origine.

Exercice 5 (Fonction de classe $\mathcal{C}^1$) 2

(Mines MP 08) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \frac{x\sin y - y\sin x}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 6 (Dérivées partielles secondes croisées) 2

Soit $f(x,y) = \frac{x^3y}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq 0$ et $f(0,0) = 0$.

1 Étudier la continuité de f et de ses dérivées partielles premières sur $\mathbb{R}^2$.

2 Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

3 Qu'en déduire sur la régularité de f ?

Exercice 7 (Différentielle, gradient) 2

On fixe deux points distincts A et B du plan. Calculer la différentielle et le gradient en tout point où cela est possible, dessiner des lignes de niveau et des lignes de courant pour :

1 $M \mapsto AM$.

2 $M \mapsto AM^2$.

3 $M \mapsto AM^2 + BM^2$.

4 $M \mapsto AM + BM$.

5 $M \mapsto AM \cdot BM$.

Exercice 8 (Fonctions de deux variables de classe $\mathcal{C}^2$ *(Mines MP 08)*) 3

Soit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $h(x,y) = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $h(0,0) = 0$. La fonction h est-elle de classe $\mathcal{C}^2$?

8.2. Différentielle

Exercice 9 (Différentielle du déterminant) 1

Montrer que le déterminant est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, que $D(\det)(I_n) = \mathrm{tr}$, et que

$$D\det(X)(H) = \mathrm{tr}({}^t\mathrm{com}(X)H).$$

Exercice 10 (Différentielle de l'inverse matriciel) 1

Soit $U = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Vérifier que U est un ouvert, et montrer que l'application inverse φ de U dans U est différentiable, et calculer sa différentielle en tout point.

Exercice 11 (Matrices dont les polynômes minimal et caractéristique sont égaux) 2

Soit

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}^n \\ & M & \mapsto & (\mathrm{tr}(M), \mathrm{tr}(M^2), \dots, \mathrm{tr}(M^n)) \end{array}$$

1 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que φ est différentiable en M et calculer $\mathrm{d}\varphi_M$.
2 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, μ_M son polynôme minimal. Montrer que $\mathrm{rg}(\mathrm{d}\varphi_M) = \deg(\mu_M)$.
3 Montrer que l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\chi_M = \pm\mu_M$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 12 (Une méthode de Newton matricielle pour le calcul d'inverse) 5

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme subordonnée, on considère $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $F : X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto 2X - XAX$.
1 Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$, calculer $F(A^{-1})$, $DF(A^{-1})$.
2 Montrer que pour X_0 suffisamment proche de A^{-1}, (X_p) d'itératrice F converge vers A^{-1}.
3 Faire le lien avec la méthode de Newton.

8.3. Extrema

Exercice 13 (Extrema d'une fonction de deux variables) 0

1 Chercher les extrema de $f : (x, y) \mapsto 3xy - x^3 - y^3$.
2 *(Mines MP 08)* Chercher les extrema de $g : (x, y) \mapsto -2(x - y)^2 + x^4 + y^4$.
3 *(Mines PC 08)* Déterminer les extrema de $h : (x, y) \mapsto (3x + 4y)e^{-x^2-y^2}$.
4 *(X PC 09)* Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x^2 - y^2)\exp(-(x^2 + y^2))$. Montrer que f atteint un maximum et un minimum sur $\mathbb{R}^2$ et les déterminer.

Exercice 14 (Extrema) 0

Donner les extrema locaux et globaux de $f : (x, y) \mapsto y(x^2 + (\ln(y))^2)$.

Exercice 15 (Extrema d'une fonction) 0

Étudier les extrema de $f : (x, y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$ et donner leur nature.

Exercice 16 (Les moindres carrés) 1

Soit n points (x_i, y_i) de $\mathbb{R}^2$, les x_i étant non tous égaux. Montrer qu'il existe un unique couple (λ, μ) de réels rendant minimum la quantité $\sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i + \mu - y_i)^2$.

Exercice 17 (Points critiques d'une fonction convexe) 2

Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f\ : U \to \mathbb{R}$ convexe différentiable. Montrer que tout point critique est un minimum global.

Exercice 18 (Extrema d'une certaine fonction sur un espace euclidien) 0

Soit f une forme linéaire sur E espace euclidien et $g(x) = f(x)e^{-\|x\|^2}$. Montrer que g admet un minimum et un maximum.

Exercice 19 (Aire maximale d'un triangle inscit dans un cercle) 4

Calculer l'aire maximale d'un triangle inscrit dans un cercle de rayon r.

Exercice 20 (Minimum de la somme des distances à trois points) 5

Soit A, B, C trois points du plan non alignés tels que les angles $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$ soient $< 2\pi/3$. Donner le mimimum sur $\mathbb{R}^2$ de $f(M) = MA + MB + MC$.

8.4. Équations aux dérivées partielles

Exercice 21 (EDP d'ordre 1) 0

1 Trouver les fonctions polynomiales $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vérifiant : $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 4f$.

2 Déterminer les applications f de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = a$, où a est une constante réelle donnée. On utilisera le changement de variable : $u = x + y$, $v = x - y$.

3 Même question avec $3\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = xe^y$.

Exercice 22 (Passage en polaires) 0

Résoudre les EDP suivantes au moyen d'un passage en polaires :

1 $x\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - y\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$ d'inconnue $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2 $x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ d'inconnue $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$.

3 $x\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - y\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f(x, y)$ d'inconnue $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 23 (EDP d'ordre 2 avec changement linéaire) 0

1 *(Mines MP 09)* Résoudre l'équation aux dérivées partielles : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 3\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.
Indication : on pourra utiliser un changement de variables linéaire du type $u = ax+by$, $v = cx+dy$.
2 *(Mines MP 09)* Résoudre : $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$.
Indication : on pourra utiliser, en le justifiant, le changement de variable $\varphi(x,y) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right)$.

Exercice 24 (EDP d'ordre 2 avec changement de variables non linéaire) 2

1 *(X PC 09)* Résoudre $x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = x^2y^3$
Indication : poser $u = x$, $v = xy$.
2 Soit U l'ouvert de $\mathbb{R}^2$: $U = \{(x,y), x > 0,\ y > 0\}$. Trouver les applications $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant : $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 2$.
Indication : on utilisera le changement de variable : $u = xy$, $v = \frac{y}{x}$.

9. Oraux

Exercice 25 (Prolongement par continuité, extrema (Mines-Ponts PSI 10)) 0

Soit $f\ : (x, y) \mapsto xy\ln(x^2 + y^2)$.
1 Peut-on prolonger f par continuité en $(0, 0)$?
2 Déterminer les extrema de f.

Exercice 26 (Différentiabilité d'une fonction de deux variables) 0

(CCP MP 13) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.
1 Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2 La fonction f est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 27 (Plan tangent horizontal) 0

Soit $\mathcal{S}$ la surface d'équation : $z = x\,e^x + y\,e^y$. Déterminer les points de $\mathcal{S}$ en lesquels le plan tangent à $\mathcal{S}$ est horizontal i.e. possède une équation de la forme $z = c$.

Exercice 28 (Points critiques et extrema locaux) 0

1 (CCP) Points critiques et extrema locaux de $f : (x, y) \mapsto x^4y + \ln(4 + y^2)$?
2 (CCP) Extrema locaux de $f : (x, y) \mapsto xy + 4/x + 2/y$ sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 29 (Prolongement par continuité et régularité) 0

(CCP MP 13) Soit $f : (x, y) \mapsto xy^3/(x^2 + y^2)$. Montrer que f peut être prolongée par continuité en l'origine. Ainsi prolongée, f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 30 (Comparaison des moyennes arithmétique et géométrique par le calcul différentie 2

(CCP MP 13) Soient $U =]0, +\infty[^n$ et pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$, $f(x) = \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}\right)$.
1 Déterminer les points critiques de f.
2 Montrer que f est minorée par n^2. Trouver un cas d'égalité.
3 Comparer $A(x) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)$ et $H(x) = n\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}\right)^{-1}$.
4 La fonction f est-elle majorée ?

Exercice 31 ({Etude de différentiabilité (Mines-Ponts PSI 10)) 2

Soit $f\ : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ prolongée par continuité en $(0, 0)$.
Étudier la différentiabilité en $(0, 0)$ de f.

Exercice 32 (Limite d'un taux d'accroissement à deux bornes variables) 2

(Centrale PC 10) Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Déterminer $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$.

Exercice 33 (Existence d'une dérivée partielle seconde croisée (Centrale PC 10)) 2

Soit $f\ : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{\sin(x^3 y)}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

1 La fonction f admet-elle des dérivées partielles du premier ordre en tout point de $\mathbb{R}^2$?

2 Étudier l'existence de $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$.

Exercice 34 (Étude de régularité (Centrale PC 10)) 3

Soit $f\ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $f(x,y) = (x^2-y^2)\ln(x^2+y^2)$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Exercice 35 (Détermination de maximum du produit de coordonnées dans un hyperplan) 3

(TPE MP 13) Soit $A > 0$. Quel est le maximum de xyz pour x, y, z dans $\mathbb{R}^{+*}$ tels que $x+y+z = A$? tels que $x+2y+3z = A$?

Exercice 36 (Une équation aux dérivées partielles) 3

Résoudre : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f$.

Indication : poser $f(x,y) = e^{-y} g(x,y)$.

Exercice 37 (Étude d'une fonction de deux variables définie comme somme d'une série) 3

(CCP MP 13) Soit $f : (x,y) \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1+y^{2n}}$.

1 Déterminer l'ensemble de définition D de f.

2 Pour $a \in [0,1[$, soit $D_a = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x < a \max\{1, y^2\}\big\}$. Montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe sur D_a pour tout a. La fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe-t-elle sur D ?