

Réduction des endomorphismes (II)

Plan de cours

Relation de similitude matricielle. Matrices semblables, interprétation géométrique (*i.e.* en termes d'endomorphismes).

Sous-espace stable par un endomorphisme, endomorphisme induit. Interprétation matricielle.

Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée : valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre, spectre.

La somme de sous-espaces propres est directe.

Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes (deux à deux) est libre.

Si u et v commutent, alors v stabilise $\text{Ker}(u)$, $\text{Im}(u)$ et tout sous-espace propre de u .

Polynôme caractéristique χ : définition (il est désormais toujours unitaire), interprétation des coefficients des termes constant et de degré $\deg(\chi) - 1$.

Multiplicité d'une valeur propre. Elle majore la dimension du sous-espace propre associé.

Polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice carrée. Morphisme de \mathbb{K} -algèbres de $\mathbb{K}[X]$ vers $\mathcal{L}(E)$ envoyant X sur u .

Idéal annulateur de u , polynôme minimal.

Lemme de décomposition des noyaux.

$(u^k)_{0 \leq k < d}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$, où d est le degré du polynôme minimal de u .

Théorème de Cayley-Hamilton (admis).

Les questions de cours commencent à partir d'ici :

Diagonalisation (définition) : d'un endomorphisme, d'une matrice carrée.

Les projecteurs et les symétries sont diagonalisables.

Les endomorphismes nilpotents non nuls ne sont pas diagonalisables.

Caractérisation de la diagonalisabilité par le polynôme caractéristique.

Caractérisation de la diagonalisabilité par un polynôme annulateur.

Trigonalisation : d'un endomorphisme, d'une matrice carrée.

Caractérisation de la trigonalisabilité par le polynôme caractéristique.

Caractérisation de la nilpotence.

Si u admet un polynôme annulateur scindé, alors E est somme directe de sous-espaces stables par u sur chacun desquels u définit la somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent.

Exercices

Réduction des matrices et endomorphismes.