

LA THEORIE DE L'ECHANTILLONNAGE :

LE THEOREME DE SHANNON

5

Toute communication se fait par l'intermédiaire de signaux, qui peuvent être acoustiques (parole, et sons en général), électromagnétiques (radio), électriques (le téléphone filaire par exemple) ou encore optiques (transmission de données par fibres optiques). Toute une théorie sur le « traitement du signal » a émergé dans les années 40, jusqu'à en faire de nos jours une discipline à part entière.

10

Nous proposons au travers de ce document d'introduire les outils mathématiques de base du traitement du signal. Ils permettent en particulier de formaliser une étape clé d'une chaîne de communication numérique, à savoir l'échantillonnage. Ceci nous amènera presque naturellement à formuler le théorème phare du domaine : le théorème de Shannon.

15

I. Définitions et nouveaux outils mathématiques

a) Notion de signal à temps continu

20

Un signal $x(t)$ à temps continu* est une fonction continue par morceaux de \mathbb{R} dans \mathbb{C} , bornée sur \mathbb{R} , et dont le nombre de points de discontinuité dans tout intervalle borné est fini. D'une manière générale, un signal est une fonction qui sert de support à de l'information ou à une commande. Par exemple, $x(t)$ peut être la tension aux bornes d'un appareil de mesure. Par convention, on supposera toujours que le temps t va de $-\infty$ à $+\infty$, quitte à ce que $x(t)$ soit nul en dehors d'une certaine plage si le support temporel** du signal est réduit à une partie de \mathbb{R} .

25

Nous conviendrons aussi d'appeler signal d'autres objets mathématiques que nous introduirons par la suite.

b) Un nouvel objet mathématique: l'impulsion de Dirac

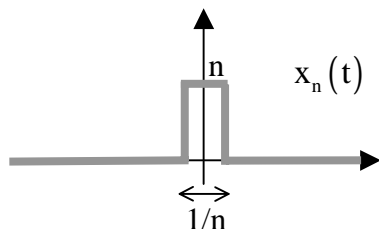
30

En plus de la convergence simple héritée des suites de fonctions, un autre type de convergence d'une suite de signaux est utile en traitement du signal : la convergence faible. La suite de signaux $(x_n(t))$ converge faiblement vers $x(t)$ quand $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_n(t)g(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)g(t)dt$ pour tout signal $g(t)$ régulier (c'est-à-dire infiniment dérivable sur \mathbb{R}) à support temporel compact.

35

Considérons maintenant la suite de signaux $(x_n(t))$ ci-dessous :

40



Pour tout signal $g(t)$ continu en 0, et donc a fortiori pour tout signal régulier à support compact, on peut facilement montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_n(t)g(t)dt = g(0)$.

* Dans tout ce document, par abus de notation, on désignera par $x(t)$ la fonction x de la variable t .

** Le support temporel d'un signal $x(t)$ est le plus petit fermé de \mathbb{R} qui contient $\{t \in \mathbb{R} / x(t) \neq 0\}$.

45 On décide alors d'introduire un nouveau signal $\delta(t)$, appelé impulsion de Dirac, correspondant à la limite pour la convergence faible de la suite $(x_n(t))$, et qui a la propriété

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\delta(t)dt = g(0) \text{ pour tout signal } g(t) \text{ continu en } 0.$$

En traitement du signal, on dit que $\delta(t)$ est défini par :

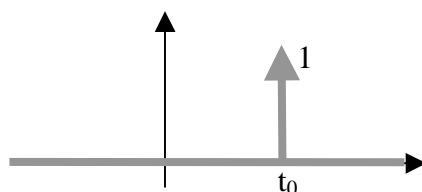
$$\begin{cases} \delta(t) = 0 & \text{si } t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1 \end{cases}$$

50 Bien entendu, les propriétés ci-dessus impliquent que l'impulsion de Dirac ne peut pas être une fonction : c'est un nouveau type d'objet mathématique.

L'impulsion de Dirac en $t = 0$ représente un signal extrêmement bref en $t = 0$.

Voyons immédiatement deux propriétés importantes :

- 55
- une impulsion en $t = t_0$ sera modélisée par $\delta(t - t_0)$; on la représente de la façon suivante :



60

- on a $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\delta(t-t_0)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u+t_0)\delta(u)du$ en posant $u = t - t_0$. En appliquant la définition de la distribution de Dirac, on obtient $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\delta(t-t_0)dt = g(t_0)$ si g est continu en t_0 .

65 Une dernière remarque : comme $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\delta(t-t_0)dt$ est par définition le produit de convolution de g et de δ en t_0 , (voir l'annexe A pour la définition du produit de convolution), on peut déduire de cette égalité que l'impulsion de Dirac est l'élément neutre pour le produit de convolution.

c) La notion de filtrage linéaire et invariant dans le temps

70

Un filtre linéaire invariant dans le temps est un dispositif agissant sur les signaux qui a les caractéristiques suivantes :



75

- linéarité : si $y_1(t)$ (resp. $y_2(t)$) est le signal de sortie correspondant au signal d'entrée $x_1(t)$ (resp. $x_2(t)$), alors pour α_1 et α_2 complexes, la sortie correspondant à l'entrée $\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$ est $\alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)$.
- invariance temporelle : si $y(t)$ est la sortie correspondant au signal d'entrée $x(t)$, pour θ réel, la sortie associée à $x(t - \theta)$ est $y(t - \theta)$.
- continuité : si la suite de signaux $(x_n(t))$ converge faiblement vers $x(t)$, et si pour tout $n \in \mathbb{N}$ la sortie $y_n(t)$ correspondant à l'entrée $x_n(t)$ existe, alors le filtre associé en sortie $y(t)$ à l'entrée $x(t)$; de plus si $y(t)$, ainsi que $y_n(t)$ à partir d'un certain rang n_0 , sont continues par morceaux, alors $(y_n(t))$ converge simplement vers $y(t)$.

85

Plaçons maintenant à l'entrée de notre filtre l'impulsion de Dirac $\delta(t)$: la sortie du filtre est alors par définition sa « réponse impulsionnelle », que l'on note $h(t)$. Si on appelle $(x_n(t))$ la suite de signaux qui converge faiblement vers $\delta(t)$, on a alors :

90



	signal d'entrée	signal de sortie	
1	$\delta(t)$	$h(t)$	par définition
2	$x_n(t)$	$h_n(t)$	par définition
3	$x_n(t - \theta)$	$h_n(t - \theta)$	par invariance temporelle
4	$g(\theta)x_n(t - \theta)$	$g(\theta)h_n(t - \theta)$	par linéarité
5	$\int_{-\infty}^{+\infty} g(\theta)x_n(t - \theta) d\theta$	$\int_{-\infty}^{+\infty} g(\theta)h_n(t - \theta) d\theta$	par continuité
6	$\int_{-\infty}^{+\infty} g(\theta)\delta(t - \theta) d\theta$	$\int_{-\infty}^{+\infty} g(\theta)h(t - \theta) d\theta$	par continuité
7	$g(t)$	$(g * h)(t)$	d'après § I.b et l'annexe A

La ligne 5 utilise la propriété de l'intégrale d'être la limite d'une série ; la ligne 6 est justifiée en faisant tendre n vers l'infini, et la ligne 7 est valable si le signal $g(t)$ est continu par morceaux. Nous venons de démontrer que le signal sortant d'un filtre est le produit de convolution du signal d'entrée avec la réponse impulsionnelle du filtre.

95

Si maintenant nous mettons à l'entrée du filtre le signal $x_v(t) = \exp(2\pi i vt)$, calculons la sortie :

$$\begin{aligned}
 y_v(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_v(\theta)h(t - \theta)d\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} x_v(t - \theta)h(\theta)d\theta \text{ par symétrie du produit de convolution} \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[2\pi i v(t - \theta)]h(\theta)d\theta \\
 &= \exp(2\pi i vt) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2\pi i v\theta)h(\theta)d\theta \\
 &= x_v(t)H(v), \text{ où } H(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2\pi i v\theta)h(\theta)d\theta.
 \end{aligned}$$

100

Si l'on considère le filtrage comme un opérateur linéaire, il est légitime de s'intéresser à la question des valeurs propres et des vecteurs propres (qui seront ici des signaux).

105

Or, dans cette optique, les calculs ci-dessus montrent que pour chaque valeur de v , $H(v)$ est une valeur propre pour le filtre considéré*, associée au signal propre $x_v(t)$.

A ce stade, on comprend bien tout l'intérêt qu'il y a à décomposer les signaux par rapport aux exponentielles complexes : cela revient en quelque sorte à diagonaliser l'opération de filtrage...

110

d) La transformée de Fourier : une représentation fréquentielle des signaux

La transformée de Fourier, qui est une généralisation de la théorie des séries de Fourier aux signaux non périodiques, permet de mettre en œuvre l'idée ci-dessus : au signal « temporel » $x(t)$, on fait correspondre** le signal « fréquentiel » $X(v)$ défini par :

115

$$X(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-2\pi i vt) dt$$

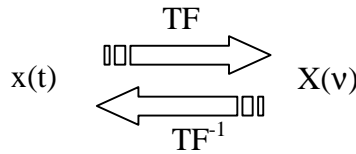
$X(v)$ est la transformée de Fourier de $x(t)$.

* $H(v)$ représente le gain du filtre à la fréquence v ; et en considérant $H(v)$ comme une fonction de la variable v , $H(v)$ est appelée réponse fréquentielle du filtre.

** sous réserve d'existence... Dans tout ce document, on supposera que les signaux manipulés ont une transformée de Fourier. C'est le cas pour la quasi-totalité des signaux que l'on peut abstraire de l'observation de la nature.

Connaissant $X(\nu)$, on peut revenir* à $x(t)$ par transformée de Fourier inverse :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu) \exp(2\pi i \nu t) d\nu$$



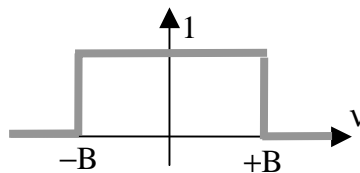
$x(t)$ et $X(\nu)$ sont en fait deux représentations différentes d'un même signal : $x(t)$ est la représentation « temporelle » (c'est-à-dire que t représente le temps qui s'écoule ; c'est la représentation la plus intuitive), alors que $X(\nu)$ en est la représentation « fréquentielle ». Pour comprendre cette notion de représentation fréquentielle, intéressons-nous à l'oreille humaine : cette dernière n'est sensible qu'aux fréquences comprises entre 10 Hz et 20 kHz ; cela signifie qu'un signal sinusoïdal à une fréquence inférieure à 10 Hz ou supérieure à 20 kHz ne sera pas audible. Aussi, la représentation fréquentielle d'un signal audible sera nulle en dessous de 10 Hz et à partir de 20 kHz. Cette bande de fréquence est appelée bande passante de l'oreille humaine. Cette notion de représentation fréquentielle des signaux est précisée à l'occasion des quelques calculs de transformée de Fourier qui se trouvent en annexe B.

e) Transformée de Fourier et filtrage passe-bas

Nous avons vu au §I.c que le résultat du filtrage du signal $x(t)$ par un filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$ est le produit de convolution $(h * x)(t)$. Comme la transformée de Fourier d'un produit de convolution est le produit des transformées de Fourier (voir l'annexe A), dans le domaine fréquentiel, le filtrage consiste simplement en une multiplication : la transformée de Fourier est l'outil qui permet de concrétiser les idées formulées à la fin du §I.c.

Voyons maintenant un exemple concret : le filtre passe-bas idéal. Nous avons déjà mentionné que l'oreille humaine n'était pas sensible au-delà de 20 kHz. Or les instruments de musique émettent des signaux dont la représentation fréquentielle n'est pas forcément limitée à 20 kHz. Et comme nous le verrons plus loin, quand on numérise un signal, on a tout intérêt à ce que la bande de fréquence qu'il occupe soit réduite au strict nécessaire. D'où l'idée d'effectuer au préalable un filtrage passe-bas qui ne laisse passer que les fréquences inférieures à 20 kHz en valeur absolue (voir dans l'annexe B l'exemple du cosinus : les fréquences négatives sont aussi importantes que les fréquences positives).

Or un tel filtre est théoriquement très simple à concevoir dans le domaine fréquentiel : il suffit de prendre pour $H(\nu)$ la fonction qui vaut 1 pour $|\nu| < 20$ kHz, et 0 sinon.



* il y a là aussi quelques précautions à prendre sur le plan théorique : par exemple aux points de discontinuité de $x(t)$, on obtiendra la demi-somme de limites à gauche et à droite du point de discontinuité.

II. L'échantillonnage

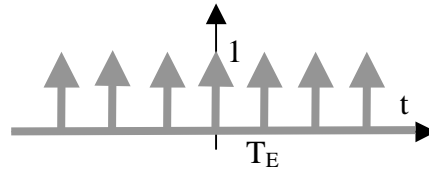
160

Afin d'améliorer la qualité des transmissions, les systèmes de télécommunications utilisent de plus en plus des signaux numériques. L'opération d'échantillonnage consiste à remplacer un signal à temps continu $x(t)$ par une suite de nombres complexes $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$. En pratique, un signal servant de support à de l'information, on souhaite en général pouvoir reconstituer le signal $x(t)$ dans son intégralité à partir de la suite (x_n) . Nous allons voir que les outils que nous avons introduits

165

jusqu'ici permettent de formaliser mathématiquement l'échantillonnage d'un signal. Introduisons tout d'abord le peigne de Dirac de période T_E : $\delta_{T_E}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_E)$.

170

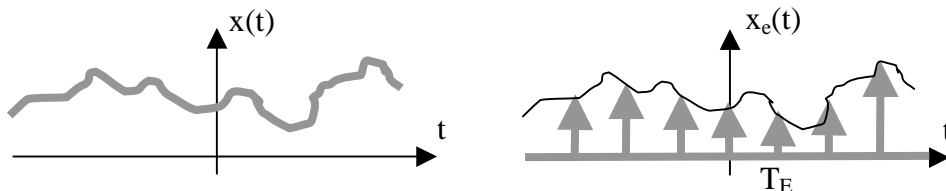


Prenons maintenant un signal $x(t)$ que l'on désire échantillonner à la période T_E .

175

Le signal à temps continu échantillonné est $x_e(t) = x(t) \delta_{T_E}(t)$.

180



Pour comprendre l'influence de l'échantillonnage temporel dans le domaine fréquentiel, nous avons besoin de la transformée de Fourier du peigne de Dirac. Un calcul se trouve en annexe C. Le résultat est le suivant : un peigne de Dirac temporel a pour transformée de Fourier un peigne de Dirac fréquentiel.

185

$$\delta_{T_E}(t) \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{TF}} \\ \xleftarrow{\text{TF}^{-1}} \end{array} \frac{1}{T_E} \delta_{\frac{1}{T_E}}(\nu)$$

190

Nous pouvons maintenant calculer la transformée de Fourier du signal échantillonné.

Comme $x_e(t)$ est le produit de $x(t)$ par $\delta_{T_E}(t)$, sa transformée de Fourier $X_e(\nu)$ est le produit de

convolution de $X(\nu)$ par $\frac{1}{T_E} \delta_{\frac{1}{T_E}}(\nu)$ (voir l'annexe A).

195

$$\text{Donc } X_e(\nu) = \frac{1}{T_E} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[X(\nu - \mu) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\mu - \frac{n}{T_E}\right) \right] d\mu = \frac{1}{T_E} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(\nu - \frac{n}{T_E}\right).$$

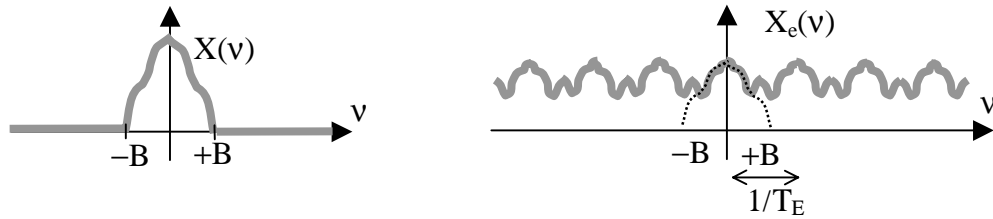
Ainsi, l'échantillonnage temporel se traduit par une périodisation de période $1/T_E$ dans le domaine fréquentiel.

200

Supposons maintenant que le support fréquentiel du signal à échantillonner est limité à la bande de fréquence $[-B ; B]$ (cela signifie que $X(\nu)$ est nul en dehors de $[-B ; B]$). Voyons les deux cas de figure qui peuvent se présenter.

- Cas défavorable : $2B > \frac{1}{T_E}$. La périodisation provoque des « repliements » de $X(v)$: en effet, deux versions périodisées successives de $X(v)$ se chevauchent, et il n'est plus possible de retrouver le signal original. L'échantillonnage apporte donc une dégradation irréversible.

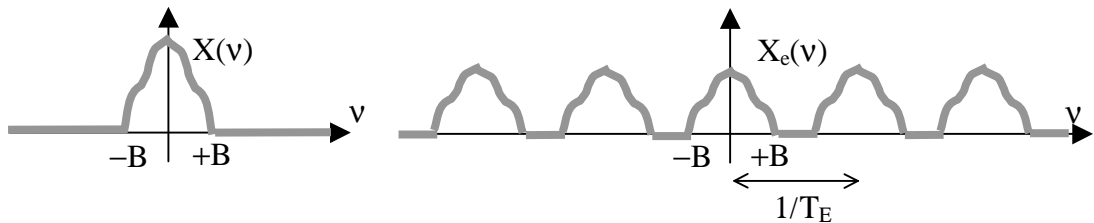
205



210

- Cas favorable : $2B \leq \frac{1}{T_E}$. Cette fois-ci, il n'y a pas de repliement : il est possible de retrouver exactement $X(v)$ à partir de $X_e(v)$ grâce à un filtre passe-bas (celui qui a été défini au § I.e) suivi d'une multiplication par T_E .

215



220

Nous pouvons donc à présent énoncer le **théorème de Shannon** : si la fréquence d'échantillonnage est supérieure à deux fois la fréquence maximale contenue dans le signal à échantillonner, on peut retrouver l'intégralité du signal original à partir du signal échantillonné par filtrage passe-bas.

225

Evoquons pour terminer une application directe en hi-fi audio : bien entendu, lors d'un échantillonnage, de manière à avoir à stocker un minimum de valeurs, on a tout intérêt à avoir la fréquence d'échantillonnage ($1/T_E$) la plus petite possible. Or la valeur minimale de cette dernière est proportionnelle à la largeur du support fréquentiel du signal à échantillonner. Dans le cas d'un signal émis par un instrument de musique, on a donc intérêt à faire un filtrage passe-bas qui supprime toutes les composantes fréquentielles inaudibles, c'est-à-dire celles qui sont supérieures à 20 kHz. Ainsi, en vertu de ce qui précède, la valeur minimale de la fréquence d'échantillonnage est 40 kHz. En pratique, la valeur qui a été retenue pour la norme CD audio est 44,1 kHz.

230

Annexe A

Produit de convolution

235

a) Définition

Soient $h(t)$ et $x(t)$ deux signaux.

240

Sous réserve d'existence, on appelle produit de convolution de h et x , le signal :

$$(h * x)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\theta)x(\theta)d\theta$$

Le changement de variable $\tau = t - \theta$ montre immédiatement que le produit de convolution est symétrique :

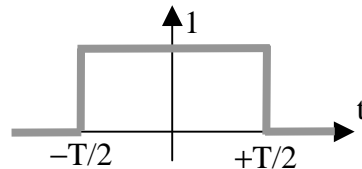
$$(h * x)(t) = - \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau = (x * h)(t)$$

245

b) Exemple de calcul de produit de convolution

Soit $x(t)$ le signal qui vaut 1 sur $[-T/2 ; T/2]$ et 0 ailleurs.

250



255

$$\text{Calculons } (x * x)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\theta)x(\theta)d\theta$$

$$= \int_{t-T/2}^{t+T/2} x(\theta)d\theta \text{ puisque } x(t-\theta) \text{ est nul en dehors de } [-T/2 ; T/2]$$

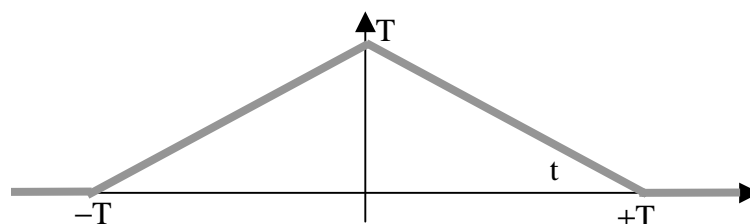
$$= \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq -T \\ \int_{-T/2}^{t+T/2} d\theta & \text{si } -T \leq t \leq 0 \\ \int_{t-T/2}^{T/2} d\theta & \text{si } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{si } t \geq T \end{cases} \quad \text{car } x(t) \text{ est nul en dehors de } [-T/2 ; T/2]$$

260

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq -T \\ t+T & \text{si } -T \leq t \leq 0 \\ T-t & \text{si } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{si } t \geq T \end{cases}$$

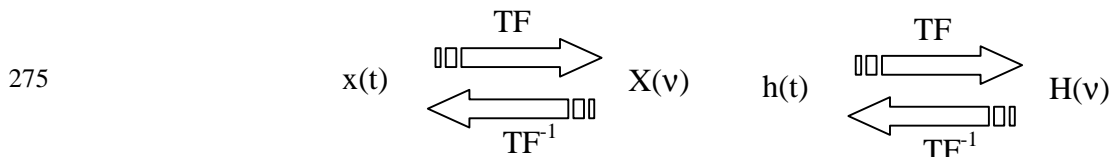
On obtient donc le résultat suivant :

265



270 **c) Produit de convolution et transformée de Fourier**

Soit $X(v)$ (resp. $H(v)$) la transformée de Fourier de $x(t)$ (resp. $h(t)$).



Calculons la transformée de Fourier de $(h * x)(t)$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (h * x)(t) \exp(-2\pi i v t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2\pi i v t) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \theta) x(\theta) d\theta \right] dt$$

280 En posant $\tau = t - \theta$, on obtient :

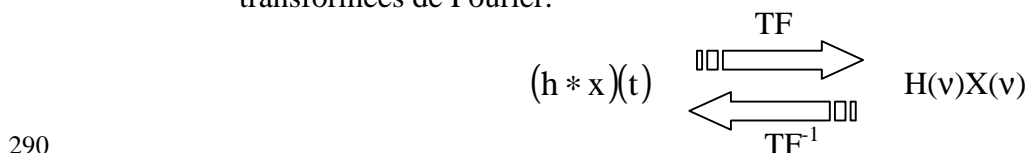
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-2\pi i v (\tau + \theta)] h(\tau) x(\theta) d\theta d\tau$$

On peut alors séparer en un produit de deux intégrales :

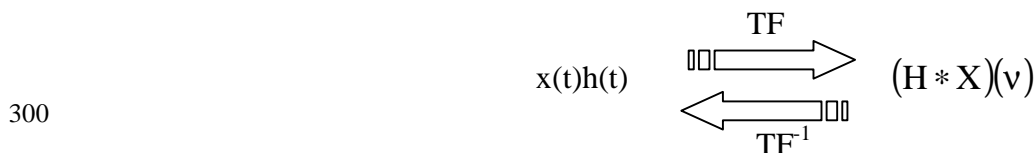
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2\pi i v \tau) h(\tau) d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2\pi i v \theta) x(\theta) d\theta$$

On reconnaît le produit de $H(v)$ par $X(v)$.

285 Ainsi, la transformée de Fourier d'un produit de convolution est le produit des transformées de Fourier.



295 Etant donné l'analogie entre la transformée de Fourier et la transformée de Fourier inverse, on a évidemment la propriété suivante : la transformée de Fourier inverse d'un produit de convolution est le produit des transformées de Fourier inverses, ce qui s'énonce plus simplement de la façon suivante : la transformée de Fourier d'un produit est le produit de convolution des transformées de Fourier.



Annexe B

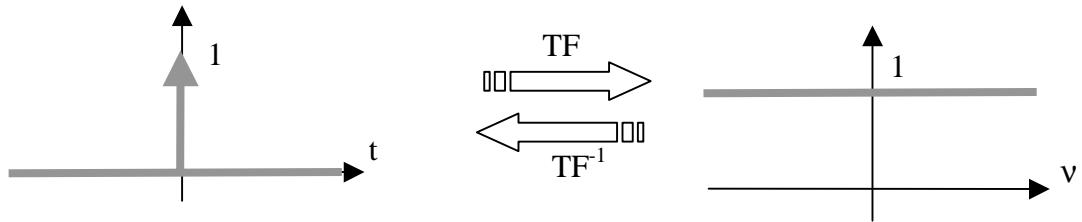
Calculs et interprétations de quelques transformées de Fourier

305

- L'impulsion de Dirac temporelle : $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \exp(-2\pi i vt) dt = \exp(0) = 1$; la représentation fréquentielle d'une impulsion en $t = 0$ est donc la fonction constante égale à 1. L'interprétation de ce résultat est la suivante : une impulsion est un signal qui a des variations extrêmement importantes pendant un intervalle de temps extrêmement bref et pour ce faire, il « contient » à part égale des composantes sur toutes les fréquences.

310

315

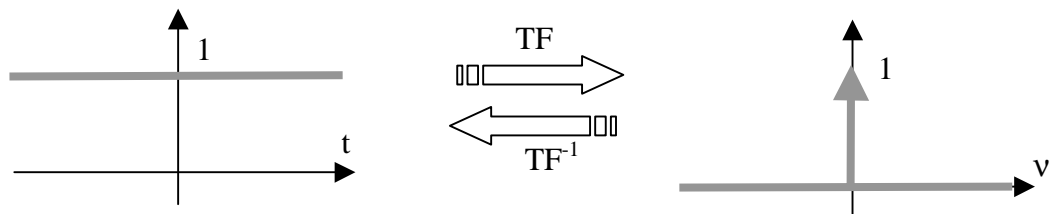


320

- L'impulsion de Dirac fréquentielle en 0 : par transformée inverse, on obtient que la version temporelle d'une impulsion à la fréquence nulle est le signal constant égal à 1 : en effet $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(v) \exp(2\pi i vt) dv = \exp(0) = 1$. C'est raisonnable, puisqu'on peut considérer qu'un signal constant est un signal de fréquence nulle. Un corollaire important est qu'un signal temporel ayant une composante continue (c'est-à-dire une valeur moyenne non nulle) verra sa représentation fréquentielle avoir en 0 une impulsion ayant pour amplitude la valeur de sa composante continue.

325

330



335

- Un cosinus temporel à la fréquence ν_0 : au préalable, calculons la transformée inverse d'une impulsion de Dirac fréquentielle en ν_0 .

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(v - \nu_0) \exp(2\pi i vt) dv = \exp(2\pi i \nu_0 t)$$

Donc une exponentielle complexe à la fréquence ν_0 a pour transformée de Fourier une impulsion de Dirac fréquentielle en ν_0 .

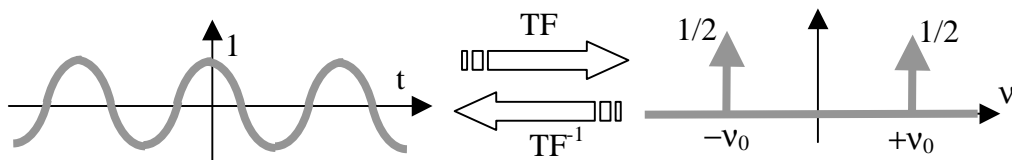
Or $\cos(2\pi \nu_0 t) = \frac{\exp(2\pi i \nu_0 t) + \exp(-2\pi i \nu_0 t)}{2}$, donc par linéarité de la transformée de

340

Fourier, la représentation fréquentielle d'un cosinus à la fréquence ν_0 est la somme de deux impulsions de Dirac : $\frac{\delta(v - \nu_0) + \delta(v + \nu_0)}{2}$. Ce résultat s'interprète en disant qu'un

cosinus peut être considéré comme un signal à une fréquence pure valant $\pm \nu_0$.

345



Annexe C

Transformée de Fourier du peigne de Dirac

350 Pour calculer la transformée de Fourier du peigne de Dirac $\delta_{T_E}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_E)$, commençons par décomposer $\delta_{T_E}(t)$ en série de Fourier* :

$$\delta_{T_E}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp\left(\frac{2\pi i n t}{T_E}\right) \quad \text{où} \quad c_n = \frac{1}{T_E} \int_{T_E/2}^{T_E/2} \delta_{T_E}(t) \exp\left(-\frac{2\pi i n t}{T_E}\right) dt = \frac{1}{T_E}$$

On peut donc finalement écrire : $\delta_{T_E}(t) = \frac{1}{T_E} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{2\pi i n t}{T_E}\right)$.

Or, en appliquant le résultat de l'annexe B sur les exponentielles complexes, $\exp\left(\frac{2\pi i n t}{T_E}\right)$ a

355 pour transformée de Fourier $\delta\left(v - \frac{n}{T_E}\right)$.

La transformée de Fourier de $\delta_{T_E}(t)$ est donc $\frac{1}{T_E} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(v - \frac{n}{T_E}\right) = \frac{1}{T_E} \delta_{\frac{1}{T_E}}(v)$; un peigne de Dirac temporel a donc pour transformée de Fourier un peigne de Dirac fréquentiel.

360

$$\delta_{T_E}(t) \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{TF}} \\ \xleftarrow{\text{TF}^{-1}} \end{array} \frac{1}{T_E} \delta_{\frac{1}{T_E}}(v)$$

* Evidemment, l'impulsion de Dirac ne vérifie pas les conditions de Dirichlet... Toutefois, si l'on décomposait en série de Fourier une version périodisée de la suite de signaux du §1.b qui converge faiblement vers l'impulsion de Dirac, et si l'on faisait tendre n vers l'infini on arriverait exactement au même résultat.