Corrigé de devoir non surveillé

Un Produit Infini

1

a Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sin(\theta/2^n) \neq 0$, donc la formule à montrer a bien un sens. Montrons-la par récurrence (sur n) : elle est claire pour $n = 1$, puisque $\sin(\theta) = 2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)$. Supposons-la vérifiée à un rang $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, et montrons qu'elle demeure au rang suivant :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n+1} \cos\frac{\theta}{2^k} &= \cos\frac{\theta}{2^{n+1}} \prod_{k=1}^{n} \cos\frac{\theta}{2^k} \\
&= \cos\frac{\theta}{2^{n+1}} \cdot \frac{\sin(\theta)}{2^n \sin\frac{\theta}{2^n}} \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\
&= \cos\frac{\theta}{2^{n+1}} \cdot \frac{\sin(\theta)}{2^{n+1} \sin\frac{\theta}{2^{n+1}} \cos\frac{\theta}{2^{n+1}}} \\
&= \frac{\sin(\theta)}{2^{n+1}\sin\frac{\theta}{2^{n+1}}}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{La formule est donc bien vérifiée pour tout } n \in \mathbb{N}^*.}$

b La dérivabilité (et la nullité) de la fonction sinus en 0, et le fait que $\sin'(0) = \cos(0) = 1$, fournissent immédiatement : $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.}$

c Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$: $\theta/2^n$ tendant vers 0 lorsque n tend vers l'infini, on a, en écrivant

$$\frac{\sin(\theta)}{2^n \sin\frac{\theta}{2^n}} = \frac{\sin(\theta)/\theta}{\sin\frac{\theta}{2^n}/(\theta/2^n)},$$

et d'après les questions précédentes :

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} \prod_{k=1}^{n} \cos\frac{\theta}{2^k} = \frac{\sin(\theta)}{\theta}.}$$

d Soit $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, non nul : on a $\theta = 2k\pi$, pour un certain entier relatif non nul k. On peut écrire k sous la forme $2^m p$, où $m \in \mathbb{N}$, et où p est un entier impair. On observe que

$$\cos\frac{\theta}{2^{m+1}} = 0,$$

puisque $2k/2^{m+1} = p$ est impair.

La suite de terme général $\left(\prod_{k=1}^{n} \cos\frac{\theta}{2^k}\right)$ est donc nulle à partir d'un certain rang, elle converge bien vers $0 (= (\sin(\theta)/\theta))$.

$\boxed{\text{La formule reste valable si } \theta \in 2\pi\mathbb{Z} \setminus \{0\}.}$

Dans le cas où $\theta = 0$, cette même suite est constante de valeur 1. Elle ne converge pas à proprement parler vers $\sin(\theta)/\theta$, qui n'est pas défini, mais vers $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

2 Soit $x \in]0, \pi/2[$: on a donc $\sin(x) > 0$ et $\tan(x) > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x/2^n \in]0, \pi/2[$, donc $\cos(x/2^n) > 0$, $\sin(x/2^n) > 0$, et $\tan(x/2^n) > 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En prenant le logarithme dans 1.a, pour $\theta = x$, il vient :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\cos\frac{x}{2^k}\right) = \ln(\sin(x)) - \ln(2^n) - \ln(\sin(x/2^n)).$$

En dérivant cette relation (valable pour tout $x \in]0, \pi/2[$) par rapport à la variable x, il vient :

$$-\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \tan\frac{x}{2^k} = \frac{1}{\tan(x)} - \frac{1}{2^n \tan(x/2^n)}.$$

Or $\lim\limits_{y\to 0}\frac{\tan(y)}{y}=1$, d'où, en faisant tendre n vers l'infini (et en écrivant $\frac{1}{2^n\tan(x/2^n)}=\frac{1/x}{\tan(x/2^n)/(x/2^n)}$) :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\frac{x}{2^k}=\frac{1}{x}-\frac{1}{\tan x}.}$$