

Devoir non surveillé

Un Produit Infini

1**a** Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\prod_{k=1}^n \cos \frac{\theta}{2^k} = \frac{\sin(\theta)}{2^n \sin \frac{\theta}{2^n}}.$$

b Rappeler pourquoi $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.**c** En déduire que pour tout $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \cos \frac{\theta}{2^k} = \frac{\sin(\theta)}{\theta}.$$

d Montrer que cette formule est encore vraie si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$.**2** En utilisant 1.a, ainsi qu'une dérivée logarithmique, montrer, pour tout $x \in]0, \pi/2[$, que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \tan \frac{x}{2^k} = \frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x}.$$