

Devoir non surveillé

Étude d'un polynôme

Soit a un entier naturel. On introduit le polynôme $P_a = X^3 - (a^2 + 2a)X + 2$.

1 On suppose que a est tel que P_a possède trois racines t_1, t_2, t_3 dans \mathbb{Z} (comptées avec leurs multiplicités), où $t_1 \leq t_2 \leq t_3$.

a Que valent $t_1 + t_2 + t_3$ et $t_1 t_2 t_3$?

b Calculer $P_a(0)$ et en déduire que $t_1 < 0$.

c Déduire de ce qui précède que $t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq -t_1$, puis les valeurs de t_1, t_2, t_3 .

d Montrer que $P'_a(t_2) = 0$. En déduire la valeur de a .

2 Réciproquement, montrer que la valeur de a ainsi trouvée convient bien.