

Programme de colles MP2

Semaine 19 (6-10 mars 2017)

Espaces préhilbertiens réels (I)

Plan de cours

Produit scalaire : définition, exemples. Inégalité de Cauchy-Schwarz. Norme associée à un produit scalaire.

Identité du parallélogramme. Identités de polarisation.

Orthogonalité de deux vecteurs. Famille orthogonale. Famille orthonormée (ou orthonormale).

Expression du produit scalaire en base orthonormée.

Toute famille orthogonale de vecteurs tous non nuls est libre. Relation de Pythagore.

Existence d'une base orthonormée pour un espace euclidien (éventuellement non réduit à 0_E). Pas de démonstration.

Décomposition d'un vecteur dans une base orthonormée.

Orthogonal d'une partie : définition, propriétés.

Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E , alors F et F^\perp sont supplémentaires.

Expression du projeté orthogonal d'un vecteur sur un sous-espace vectoriel de dimension finie en base orthonormée.

Distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel de dimension finie : le projeté orthogonal est l'unique vecteur réalisant la distance.

Suite totale dans un espace préhilbertien réel de dimension infinie.

Approximation par des projetés orthogonaux (une suite totale orthonormée étant donnée). Pas de démonstration.

Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Pas de démonstration.

Exercices

Plan de cours ci-dessus (pas d'endomorphismes orthogonaux ni d'endomorphismes symétriques).