Epreuve de TIPE – Partie D

<u>Titre</u> : *Jeux sur les graphes et Théorème de Ramsey*

Temps de préparation : 2h15

Temps de présentation devant le jury : 10 minutes

Entretien avec le jury : 10 minutes

Guide pour le candidat

Le dossier comporte au total 9 pages (excluant celle-ci).

Travail suggéré au candidat : Faire une étude et une présentation structurée du document.

Conseils généraux pour la préparation de l'épreuve :

- Lisez le dossier en entier dans un temps raisonnable.
- Réservez du temps pour préparer l'exposé devant le jury

Jeux sur les graphes et théorème de Ramsey

Introduction : Commençons par une constatation simple : si l'on prend six personnes au hasard, alors de deux choses l'une : soit (au moins) trois d'entre elles se connaissent toutes l'une l'autre, soit on peut en trouver trois parmis elles telles qu'aucune des trois n'en connaisse une autre (des trois).

Soit en effet P_1 la première personne du groupe. De deux choses l'une : sur les cinq autres, soit elle en connaît au plus deux, soit elle en connait au moins trois. Supposons que l'on est dans le second cas, et soient P_2, P_3 et P_4 trois personnes connues de P_1. Si deux d'entres elles se connaissent, mettons P_2 et P_3, alors P_1, P_2 et P_3 se connaissent toutes trois. Sinon, P_2, P_3 et P_4 ne se connaissent pas du tout, et le résultat annoncé est encore juste. Dans l'autre cas de figure (P_1 connaît au plus deux personnes du groupe), le même raisonnement, inversé, fonctionne avec les trois personnes que ne connaît pas P_1.

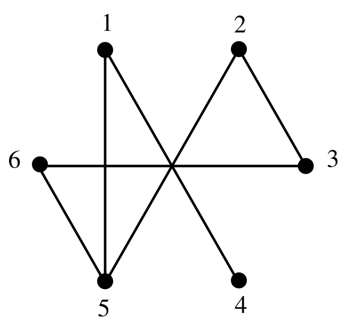
1 Graphes et coloriages

1.1 Traduction en langage des graphes

Une bonne façon d'envisager le problème précédent est de représenter les relations entre ces personnes par un graphe. Chaque sommet de notre graphe correspond à une personne du groupe, et l'on relie deux sommet par une arête si et seulement si les deux personnes se connaissent.

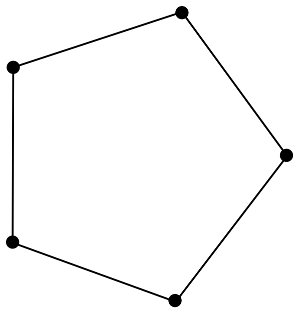
La remarque précédente, reformulée en termes de graphe, consiste à dire la chose suivante : quel que soit le graphe à six sommets, on peut trouver trois sommets du graphe deux à deux reliés par une arête, ou alors trois sommets du graphe sans arêtes reliant deux d'entre elles.

Exemple



Dans cet exemple, le graphe n'a pas de triangle. En revanche, les sommets 3, 4 et 5 vérifient la propriété désirée : aucun n'est relié à l'un des deux autres.

N.B. Remarquons au passage que le résultat est alors forcément vrai lorsque l'on considère strictement plus de six personnes : il suffit de prendre les six premières, les autres n'influençant absolument pas leurs relations. En revanche, le résultat est faux pour cinq personnes, comme l'illustre le graphe suivant, sans triangle (et sans "anti-triangle").

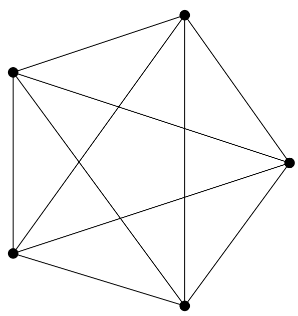


En fait, il est plus simple de symétriser le problème : au lieu de relier ou non deux sommets par une arête selon que les personnes se connaissent ou non, on va les relier de toutes façons, mais par des arêtes de couleurs différentes. Par exemple, rouge si les personne se connaissent et bleue si elles ne se connaissent pas.

Définition (Graphe complet) Un graphe à n sommet est dit *complet* si tout couple de sommet est relié par une arête. Il est traditionnellement noté K_n.

C'est-à-dire que le graphe complet à n sommets est le graphe "maximal", obtenu en reliant tous les sommets à tous les autres. Il possède exactement $\dfrac{n(n-1)}{2}$ arêtes.

Exemple : Voici une représentation du graphe K_5.



Notre résultat sur les six personnes se reformule ici de la façon suivante :

Propriété 1.1 *Si l'on colorie les arêtes de* K_6 *en deux couleurs, alors il existe un sous-graphe de type* K_3 *dont toutes les arêtes ont la même couleur.*

1.2 Le théorème de Ramsey sur les graphes

Bien sûr, tout ce formalisme présente un intérêt modéré si l'on en reste à ce problème précis. Il est naturel de se poser la même question pour 4 personnes, voire 5 ou plus... Autrement dit, y a-t'il un entier n tels que, si l'on colorie les arêtes de K_n en deux couleurs, alors il existe forcément un sous-graphe de type K_4 dont toutes les arêtes ont la même couleur. Même chose pour K_5, K_6, etc.

La réponse est positive, mais le résultat devient un peu plus compliqué à démontrer. C'est l'objet d'une première version du théorème de Ramsey.

Théorème 1.2 (Ramsey) *Soit r un entier naturel. Alors il existe un entier naturel n tel que pour tout coloriage des arêtes de K_n en deux couleurs, il existe un sous-graphe de type K_r dont toutes les arêtes ont la même couleur.*

N.B. La même remarque que pour le cas $r = 3$ s'applique encore ici : si l'entier n convient, il en est de même pour l'entier $n+1$: K_{n+1} contient K_n, qui contient un sous-graphe K_r monochrome.

Démonstration Nous allons démontrer un résultat en apparence légèrement plus fort : soient deux entiers r_1 et r_2. Alors il existe un entier n tels que pour tout coloriage des arêtes de K_n en deux couleurs C_1 et C_2, il existe un sous-graphe de type K_{r_1} et de couleur C_1, ou bien un sous-graphe de type K_{r_2} et de couleur C_2. En réalité, ce résultat est bien sûr strictement équivalent au précédent : il suffit de considérer $r = \max(r_1, r_2)$ pour déduire ceci de notre version énoncée du théorème de Ramsey.

Notation : On notera $n \to (r_1, r_2)$ pour exprimer le fait que l'entier n convient au couple (r_1, r_2), c'est-à-dire que tout coloriage de K_n en deux couleurs contient un K_{r_1} de la première couleur ou un K_{r_2} de la seconde.

Nous allons montrer par récurrence double sur r_1 et r_2 que pour tout couple (r_1, r_2), il existe un entier n tel que $n \to (r_1, r_2)$.

Le résultat est immédiat pour $r_1 = 2$ ou $r_2 = 2$: on a $l \to (l, 2)$ et $l \to (2, l)$ pour tout entier l. En effet, de deux choses l'une : soit K_l contient une arête de la seconde couleur, auquel cas le graphe contient K_2 colorié par la seconde couleur ; soit K_l est entièrement colorié de la première couleur.

Supposons donc le résultat établi pour les couples (s_1, s_2), avec $s_1 + s_2 < r$. Soit (r_1, r_2) tel que $r_1 + r_2 = r$. Nous avons vu que si $r_1 = 2$ ou $r_2 = 2$, le résultat est trivial. On se place donc dans le cas $r_1 \geq 3$ et $r_2 \geq 3$.

Soit enfin n_1 tel que $n_1 \to (r_1 - 1, r_2)$ et n_2 tel que $n_2 \to (r_1, r_2 - 1)$. Ces entiers existent par hypothèse de récurrence. Nous allons montrer que leur somme $n = n_1 + n_2$ vérifie $n \to (r_1, r_2)$.

On considère un sommet S_0 désormais fixé du graphe K_n, et l'on définit deux sous-ensembles A_1 et A_2 des autres sommets du graphe par :

Pour tout $\mathrm{S} \neq \mathrm{S}_0$, $\mathrm{S} \in \mathrm{A}_i$ si et seulement si l'arête $(\mathrm{S}_0, \mathrm{S})$ est de la couleur i $(i = 1, 2)$.

Les ensembles A_1 et A_2 forment une partition de l'ensemble des $n - 1$ sommets restants, donc on a $\mathrm{Card}(\mathrm{A}_1) \geq n_1$ ou $\mathrm{Card}(\mathrm{A}_2) \geq \mathrm{A}_2$ (sinon, par sommation on trouve $\mathrm{Card}(\mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2) \leq n - 2$). Ces deux situations sont strictement équivalentes, nous allons étudier le cas $\mathrm{Card}(\mathrm{A}_1) \geq n_1$.

On a $n_1 \to (r_1 - 1, r_2)$ par hypothèse. Donc le sous-graphe obtenu à partir des seuls sommets de A_1 contient lui-même un sous-graphe de type $\mathrm{K}_{r_1 - 1}$ et de la première couleur, ou un sous-graphe de type K_{r_2} de la seconde. Dans ce dernier cas, on a donc dans K_n un sous-graphe de type K_{r_2} et de la seconde couleur. Dans le premier, il suffit d'ajouter notre premier sommet, qui est relié à tous ceux de A_1 par une arête de la première couleur, et en particulier aux sommets du sous-graphe K_{r_1-1} colorié de la première couleur. On obtient bien un graphe complet à $r_1 - 1 + 1 = r_1$ sommets, dont toutes les arêtes sont de la première couleur.

Le cas $\text{Card}(A_2) \geq n_2$ est symétrique et se traite de la même façon. On conclue donc par récurrence que pour tout couple d'entiers (r_1, r_2), il existe n tel que $n \to (r_1, r_2)$, et le théorème est donc démontré.

□

1.3 Jeux sur les graphes

Les graphes sont l'objet de nombreux jeux, d'origines multiples. Nous allons nous intéresser ici à quelques-uns d'entre eux, particulièrement simples à décrire. Deux joueurs, Alice et Bernard, sont en possession d'un crayon chacun, de couleurs différentes. Ils conviennent d'un graphe G donné (par exemple un triangle, un pentagone, etc).

On trace alors sur une feuille de papier n points quelconques, et les deux joueurs tour à tour relient deux de ces sommets encore non reliés par une arête de leur couleur. Le gagnant est alors le joueur qui a obtenu le graphe désiré dans sa propre couleur.

La partie peut-elle être nulle ? La réponse est non, si n est suffisament grand. Ceci est une conséquence directe du théorème de Ramsey. Soit k le nombre de sommets du graphe G. G est alors un sous-graphe de K_k. Mais alors, le théorème de Ramsey nous assure que pour n suffisamment grand, tout coloriage de K_n en deux couleurs contient un graphe de type K_k monochrome, et donc *a fortiori* un graphe isomorphe à G.

Par exemple, si $n = 6$, l'un des deux joueurs parviendra à tracer un triangle. En pratique, c'est le premier à jouer, c'est-à-dire Alice : un petit dessin permet de se convaincre que, sauf stratégie absurde, le second joueur n'a que des coups forcés à partir du deuxième tour de jeux, et a perdu après le quatrième coup du premier joueur.

On peut définir une fonction r des graphes dans les entiers, $r(G)$ étant le plus petit entier n tel que tout coloriage de K_n en deux couleurs contienne un sous-graphe monochrome isomorphe à G. Pour $n \geq r(G)$, la partie ne peut être nulle, alors qu'il se peut qu'elle le soit si $n < r(G)$. La question suivante qui se pose est de savoir lequel des deux joueurs remporte la partie. La réponse est bien sûr Alice, si elle joue convenablement. En effet, Bernard ne peut avoir de stratégie gagnante face à Alice : s'il en avait une, c'est-à-dire une suite de coups qui le mène forcément à la victoire quoi que joue Alice, alors il suffirait à Alice d'appliquer cette stratégie, en faisant comme si Benard avait joué un premier coup au début de la partie.

De façon plus constructive, on peut construire une stratégie gagnante pour Alice en représentant l'ensemble des situations de jeux possibles par un arbre, et en remontant vers la racine à partir des positions gagnantes...

Notons enfin qu'il se peut qu'Alice ait une stratégie gagnante pour certains entiers n strictement inférieurs à $r(G)$. En effet, la définition de $r(G)$ prends en compte tous les coloriages possibles en deux couleurs du graphe K_n, alors que dans notre jeux, tous ne sont pas possibles : sur les $\frac{n(n-1)}{2}$ arêtes de K_n, Alice en colorie, selon la valeur de n, $\frac{n(n-1)}{4}$ ou $\frac{n(n-1)+1}{4}$.

Un autre jeux consiste à cette fois éviter de faire le graphe G, le perdant étant le joueur qui y est forcé le premier. Dans cette variante, c'est bien sûr Bernard qui gagne forcément, lorsque n est suffisamment grand. On peut également définir des jeux non symétriques : Alice doit obtient un graphe G donné et Bernard un graphe H différent de G. Tous ces jeux sont déterminés pour n suffisament grand, c'est-à-dire que l'un des joueurs possède une stratégie gagnante. En revanche, déterminer lequel, et à partir de quelle valeur de n est souvent un problème d'une extrême complexité, le plus simple étant encore de tester informatiquement les parties possibles… On trouvera une étude plus complète de ces jeux dans un article de Pierre Tougne ([2]), issu du magazine Pour la science.

2 Théorie de Ramsey

2.1 Plus de couleurs

Une question naturelle est ensuite de savoir ce qui se passe lorsque l'on colorie les arêtes de notre graphes en plus de deux couleurs. Bien sûr, le résultat est similaire.

Notation : Par extension, on notera $n \to (k_1, k_2, \dots, k_r)$ si l'entier n est tel que tout coloriage de K_n entraîne l'existence d'un sous-graphe de type K_{k_i} de la i-ième couleur (pour un entier $i \leq r$). Lorsque $k_1 = k_2 = \cdots = k_r$, on notera $n \to (k)_r$.

Théorème 2.1 *Soient k et r deux entiers naturels. Alors il existe un entier n tel que, pour tout coloriage des arêtes de K_n en r couleurs $(\mathrm{C}_i)_{i\leq r}$, le graphe K_n contient un sous-graphe de type K_k (à k sommets), monochrome.*

Démonstration Ce résultat est immédiat par récurrence sur le nombre de couleurs. Supposons donc le résultat établi pour r couleurs, et pour tout entier k. Soit n un entier tel que $n \to (k)_r$ et m un entier tel que $m \to (n)_2$. Alors l'entier m vérifie $m \to (k)_{r+1}$.

En effet, à tout coloriage de K_m, on associe un coloriage de K_m en deux couleurs : une arête donnée sera de la première couleur si et seulement si elle était de l'une des r premières couleurs pour le coloriage précédent (et donc, elle est de la seconde si elle était de la $r+1$-ième couleur). Le théorème étant établi pour deux couleurs, K_m contient un sous-graphe de type K_n monochrome. Si celui-ci est de la seconde couleur, c'est que le coloriage de départ contenait un sous-graphe de type K_n monochrome (de la dernière couleur), et donc également un sous-graphe de type K_k, puisque $n \geq k$. Dans le cas contraire, le coloriage de départ induit un coloriage de K_n en r couleurs. Et comme $n \to (k)_r$, on a un sous-graphe de type K_k monochrome.

Le résultat est donc établi par récurrence.

$\square$

2.2 Dimension supérieure

Un autre point de vue consiste à dire la chose suivante : notre représentation par des graphes correspond aux coloriages des paires non ordonnées de l'ensemble $[\![1\,;\,n]\!]$. Mais existe-t'il des résultats similaires pour les sous-ensembles à 3 éléments, 4 éléments, etc ? Encore une fois, la réponse est oui, et l'on arrive à la version la plus générale du théorème de Ramsey en dimension finie.

Notation : Pour tout ensemble fini H, on note H^l l'ensemble des parties de H à l éléments. Pour un entier n, on note $[n]^l$ l'ensemble des parties de $\{1,\dots,n\}$ à l éléments.

Théorème 2.2 (Ramsey) *Quel que soit l'entier l (dimension), le nombre de couleurs r et l'entier k, il existe un entier n tel que, pour tout coloriage de $[n]^l$ en r couleurs, il existe un sous-ensemble* H *de $\{1,\dots,n\}$ à k éléments tels que le coloriage est constant (monochrome) sur H^l.*

Notation : On notera alors $n \rightarrow (k)^l_r$.

Démonstration (Directe, sans utiliser les résultats précédents)
Par récurrence sur l'entier l. Pour $l = 1$, c'est tout simplement le principe des tiroirs : si l'on colorie les entiers de 1 à $(k-1)r+1$, il y a une couleur pour laquelle on peut trouver k éléments de cette couleur.

Supposons donc le résultat établi jusqu'à l'entier $l-1$, et pour tous r et k. Soient k et r désormais fixés, et t un entier tel que $t \rightarrow (k)^{l-1}_r$ (Hypothèse de récurrence).

Soit n un entier suffisamment grand (cette notion sera précisé par la suite), et χ un coloriage de $[n]^{l+1}$ en r couleurs, c'est-à-dire une fonction de $[n]^{l+1}$ dans $[\![1\,;\,r]\!]$.

Nous allons construire une suite $(a_i)_{i\leq t}$ d'entiers de l'ensemble $[\![1\,;\,n]\!]$, et parallèlement une suite décroissante (pour l'inclusion) $(\mathrm{S}_i)_{k-2\leq i\leq t-1}$ de sous-ensembles de $[\![1\,;\,n]\!]$, de la façon suivante :

- $a_1,\dots,a_{k-2}$ sont choisis de manière arbitraire.
- $\mathrm{S}_{k-2} = [\![1\,;\,n]\!] \setminus \{a_1,\dots,a_{k-2}\}$.
- Pour tout $k-2 \leq i \leq t$, on choisit a_{i+1} dans S_i de façon arbitraire (par exemple, son plus petit élément).
- Puis, sur $\mathrm{S}_i \setminus \{a_{i+1}\}$, on définit la relation d'équivalence R_i :

  $$x\mathrm{R}_i y \quad\Leftrightarrow\quad \forall \mathrm{T} \subset \{a_1,\dots,a_{i+1}\}\,, |\mathrm{T}| = l-1, \chi(\mathrm{T}\cup\{x\}) = \chi(\mathrm{T}\cup\{y\})$$

  c'est-à-dire que l'on découpe $\mathrm{S}_i \setminus \{a_{i+1}\}$ en sous-ensembles tels que la couleur ne dépend pas du dernier élément.
  On prend comme ensemble S_{i+1} la plus grosse classe d'équivalence pour la relation R_i.
- Enfin, on choisit a_{t+1} dans S_t.

Nous allons d'abord montrer que ce procédé nous permet de conclure, puis déterminer une condition sur l'entier n pour qu'il soit possible d'appliquer ce procédé.

Considérons la suite $(a_i)_{i\leq t+1}$ construite. Le coloriage χ induit un coloriage des sous-ensembles à l éléments de l'ensemble $\{a_1,\dots,a_{t+1}\}$. De plus, quels que soient les indices $i_1 < i_2 < \cdots < i_{l-1} < i_l$, la couleur $\chi(\{a_{i_1},\dots,a_{i_l}\})$ ne dépend pas de l'indice i_l, mais seulement des autres indices. En effet, l'élément a_{i_l} est par construction dans l'ensemble $\mathrm{S}_{i_{l-1}}$, tout comme tous les éléments de la suite de la forme a_j, avec $j > i_{l-1}$. Et l'ensemble $\mathrm{S}_{i_{l-1}}$ a été défini pour que, en autres, $\chi(\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_{l-1}}, x\}) = \chi(\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_{l-1}}, y\})$ quels que soient x et y dans $\mathrm{S}_{i_{l-1}}$.

χ induit donc un coloriage χ^* des sous-ensembles à $l-1$ éléments de l'ensemble $\{a_1, \ldots, a_t\}$ (ou de $[\![1\,;\,t]\!]$, ce qui revient au même). Mais alors, comme par hypothèse $t \to (k)_r^{l-1}$, on a un sous-ensemble à k éléments monochorome pour χ^*. Notons-le $\{a_{j_1}, \ldots, a_{j_k}\}$. L'ensemble $\{a_{j_1}, \ldots, a_{j_k}, a_{t+1}\}$ est alors monochrome pour le coloriage χ de départ.

Reste à montrer que, pour n suffisamment grand, on peut effectuer notre construction. Or, pour la relation R_i, il y a au plus $r^{\mathrm{C}_{i+1}^{k-1}}$ classes d'équivalence : C_{i+1}^{k-1} façons de choisir le sous-ensemble T à $k-1$ éléments dans $\{a_1, \ldots, a_{i+1}\}$, et à chaque fois r couleurs possibles pour $\chi(\mathrm{T} \cup \{x\})$.

Comme S_{i+1} est la plus grosse classe d'équivalence, on a :

$$|\mathrm{S}_{i+1}| \geq \frac{|\mathrm{S}_i| - 1}{r^{\mathrm{C}_{i+1}^{k-1}}}$$

Pour que l'on puisse appliquer ce procédé pour i variant de $k-2$ à t, il faut juste que S_t soit de cardinal au moins 2, et en remontant il suffit d'avoir au départ $n \geq 2r^{\sum_{i=k-1}^{t-1} \mathrm{C}_{i+1}^{k-1}}$. C'est certes une borne inférieure gigantesque, mais on a terminé la preuve : on peut conclure par récurrence que, pour tous k, l, r, il existe un entier n tel que $n \to (k)_r^l$.

□

N.B. Le théorème de Ramsey peut donc être vu comme une extension du principe des tiroirs, en dimension supérieure.

N.B. Cette démonstration s'applique telle quelle pour des ensembles infinis (c'est même plus facile, à chaque étape on partitionne un ensemble infini en un nombre fini de parties, l'une au moins est alors infinie !) : on obtient alors le résultat suivant :

Théorème 2.3 *Soient r et l deux entiers. Si l'on colorie les sous-ensembles de $\mathbb{N}$ à l éléments en r couleurs, alors il existe un sous-ensemble infini de $\mathbb{N}$ dont tous les sous-ensembles à l éléments sont de la même couleur.*

2.3 Conclusion

Toute cette théorie a pris le nom de son inventeur, Frank Plumpton Ramsey (1902/1930), né à Cambridge, et qui fût également un esprit brillant en économie (relations avec Keynes), en philosophie et en logique mathématique, domaine à partir duquel il présenta sa première version du théorème, qui est la version infinie (coloriages de $\mathbb{N}$) que nous venons d'énoncer. Le passage à la version finie s'est d'abord fait par un argument de compacité, cher aux logiciens.

Ces résultats sont loin d'être isolés : ce ne sont que les premiers de ce qui est devenu une théorie à part entière et fourmille de résultats combinatoires. L'on n'a considéré ici que des coloriages d'ensembles, sans structure aucune. On peut aussi s'intéresser à des coloriages dans des espaces plus complexes : espaces affines, arbres, ordinaux... Pour une introduction assez complète à ces résultat, on pourra voir le livre de Graham, Rotschild et Spencer ([1]).

Par exemple, sur les espaces affines finis (de dimension finie et sur des corps finis, donc), on a le résultat suivant :

Théorème (Graham, Leeb, Rotschild) *Soit* A *un corps fini,* r, l *et* k *deux entiers naturels. Alors il existe un entier* n *tel que, si l'on colorie les sous espaces affines de dimension* l *de* A^n *par* r *couleurs, alors* A^n *possède un sous espace affine de dimension* k *dont tous les sous espaces affines de dimension* l *sont de la même couleur.*

Terminons par un résultat de type Ramsey, sur les progressions arithmétiques :

Théorème (Van Der Waerden) *Soit* r *et* l *deux entiers. Alors il existe un entier* n *tel que, si l'on colorie les entiers de* 1 *à* n *en* r *couleurs, alors on peut trouver une progression arithmétique de longueur* l *monochrome.*

(une progression arithmétique de longueur k étant une suite de nombre de la forme $a, a+p, a+2p\ldots, a+(l-1)p$.) Démonstration en annexe.

Annexe : Théorème de Van Der Waerden

Nous allons démontrer, par récurrence, un résultat plus fort.

Définition Soit m un entier. Sur l'ensemble $[\![0\,;\, l]\!]^m$, on définit des l-classes $\mathrm{T}(i,l)$, pour i un entier de 0 à m, par : $(x_1,\ldots,x_m)\in \mathrm{T}(i,l)$ si et seulement si $x_j = l$ pour tout $j\leq i$, et $x_j\neq l$ pour tout $j>i$.

Les ensembles $\mathrm{T}(i,l)$ sont deux à deux disjoints.

Définition Pour l et m deux entiers, on notera $\mathrm{S}(l,m)$ la propriété : pour tout r, il existe un entier $n(l,m,r)$ tel que pour tout coloriage χ de l'ensemble $[\![1\,;\, n(l,m,r)]\!]$ en r couleurs, il existe des entiers $a, d_1,\ldots,d_m$ tel que :

$$\begin{cases} a+\sum\limits_{i=1}^{m} l d_i \leq n(l,m,r) \\ \forall i\leq m, \chi\left(a+\sum\limits_{i=1}^{m} x_i d_i\right) \text{ est constant pour } (x_i)_{i\leq m}\in \mathrm{T}(i,l) \end{cases}$$

Nous allons montrer la propriété $\mathrm{S}(l,m)$ par récurrence double sur l et m. Ceci nous permettra de conclure, car $\mathrm{S}(l,1)$ implique le théorème de Van Der Waerden pour l : la classe $\mathrm{T}(0,l)$ correspond à une progression arithmétique de longueur exactement l.

Propriété : $\mathrm{S}(l,m)\Rightarrow \mathrm{S}(l,m+1)$

Démonstration Soit r un entier, soit $\mathrm{M}=n(l,m,r)$ et $\mathrm{M}'=n(l,1,r^{\mathrm{M}})$. soit χ un coloriage de l'ensemble $[\![1\,;\, \mathrm{MM}']\!]$.

Soit g une bijection de l'ensemble des suites de longueur M d'entiers de l'intervalle $[\![1\,;\, r]\!]$ sur r^{M}.

On définit un coloriage χ' de $[\![1\,;\, \mathrm{M}']\!]$ par $\chi'(k)=g\left((\chi k\mathrm{M}-j)_{0\leq j<\mathrm{M}}\right)$. χ' est un coloriage de $[\![1\,;\, \mathrm{M}']\!]$ en r^{M} couleurs, donc par hypothèse de récurrence, il existe a' et d' tels que $\chi'(a'+xd')$ est constant pour $0\leq x\leq l-1$.

En revenant au coloriage χ, cela signifie que l'on a trouvé a' et d' tels que pour tout $0 \leq j < \mathrm{M}$, $\chi(a'\mathrm{M} - j + xd'\mathrm{M})$ ne dépend pas de x pour $0 \leq x \leq l-1$. Autrement dit, pour tout entier j de l'intervalle $[\![(a'-1)\mathrm{M}+1\,;\, a'\mathrm{M}]\!]$ et tout x de $[\![0\,;\, l-1]\!]$, on a

$$\chi\,(j + xd'\mathrm{M}) = \chi\,(j)$$

Sur l'ensemble à M éléments $[\![(a'-1)\mathrm{M}+1\,;\, a'\mathrm{M}]\!]$, on peut encore appliquer $\mathrm{S}(l,m)$, qui nous donne des entiers $a, d_1, \ldots, d_m$ tels que $\chi\left(a + \sum_{i=1}^{m} x_i d_i\right)$ soit constant sur les $\mathrm{T}(i,l)$. Il suffit ensuite de poser $d_{m+1} = d'\mathrm{M}$ pour obtenir $\mathrm{S}(l, m+1)$.

□

Propriété : $(\forall m, \mathrm{S}(l,m)) \Rightarrow \mathrm{S}(l+1,1)$

Démonstration Soit donc un entier l, et supposons $\mathrm{S}(l,m)$ établi pour tout m. Soit également r désormais fixé, et soit $n(l,r,r)$ donné par $\mathrm{S}(l,r)$.

Soit χ un coloriage de $[\![1\,;\, n(l,r,r)]\!]$ en r couleurs ; et soient $a, d_1, \ldots, d_r$ tels que la fonction $(x_i)_{i \leq r} \mapsto \chi\left(a + \sum_{i=1}^{r} x_i d_i\right)$ soit constante sur les $\mathrm{T}(i,l)$. Par le principe des tiroirs, il existe deux entiers $0 \leq u < v \leq r$ tels que :

$$\chi\left(a + \sum_{i=1}^{u} l d_i\right) = \chi\left(a + \sum_{i=1}^{v} l d_i\right)$$

Mais alors, pour $0 \leq x \leq l-1$, le r-uplet $(l, \ldots, l, x \ldots, x, 0, \ldots)$ dont les u premières coordonnées sont égales à l et les $v-u$ suivantes égales à x (avec des 0 ensuite), est dans la l-classe $\mathrm{T}(u,l)$, sur laquelle χ est constant. On a montré :

$$\forall 0 \leq x \leq l, \quad \chi\left(a + \sum_{i=1}^{u} l d_i + \sum_{i=u+1}^{v} x d_i\right) = \chi\left(a + \sum_{i=1}^{u} l d_i\right)$$

Ceci établit $\mathrm{S}(l+1,1)$, en prenant pour nouvelles valeurs de a et d_1 respectivement $a + \sum_{i=1}^{u} l d_i$ et $\sum_{i=u+1}^{v} d_i$.

□

Ces deux propriétés, ainsi que $\mathrm{S}(2,1)$ pour initier la récurrence ($\mathrm{S}(2,1)$ n'est rien d'autre qu'une application du principe des tiroirs), nous permettent détablire que $\mathrm{S}(l,m)$ est vraie pour tous entiers l et m, et qu'en particulier le théorème de Van Der Waerden est juste.

Références

[1] R.L. Graham, B.L Rotschild et J.H Spencer *Ramsey Theory*, John Wiley & sons, 1980.

[2] P. Tougne *Jeux sur les graphes* in *La mathématique des jeux*, Bibliothèque Pour la science, Belin, 1990.