Devoir non surveillé

Une suite récurrente

Étant donné $x_0 \in \mathbb{R}$, on définit par récurrence la suite (x_n) d'itératrice $T \ : x \mapsto x^2 + x$.

1 On considère deux suites $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(b_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$. On suppose que $\lim_n B_n = +\infty$.

a Montrer que si $a_n = \mathrm{o}(b_n)$, alors $A_n = \mathrm{o}(B_n)$.

Indication : fixer $\varepsilon > 0$, considérer un rang N_0 à partir duquel $|a_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} b_n$ puis, en séparant la somme A_n en deux, montrer que $\left|\frac{A_n}{B_n}\right| \leqslant \varepsilon$ à partir d'un certain rang.

b En déduire que si $a_n \sim b_n$, alors, $A_n \sim B_n$.

2 On suppose ici que $x_0 \in]-1, 0[$.

a Montrer que (x_n) tend vers 0, et que les suites (x_n) et (x_{n+1}) sont équivalentes.

b Trouver une suite constante (b_n) équivalente à la suite définie par $a_n = \frac{-1}{x_{n+1}} + \frac{1}{x_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c En appliquant la question 1.b aux suites de la question précédente, trouver une suite numérique classique équivalente à la suite (x_n).

3 On suppose ici $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$.

a Montrer que (x_n) est à termes strictement positifs et tend vers $+\infty$.

b On considère la suite de terme général $y_n = 2^{-n} \ln x_n$.

Montrer que pour tout entier naturel n

$$0 < y_{n+1} - y_n \leqslant \frac{2^{-(n+1)}}{x_n}.$$

c En déduire que pour tous $n, m \in \mathbb{N}$:

$$0 < y_{n+m+1} - y_n \leqslant \frac{2^{-n}}{x_n}$$

d En déduire que (y_n) converge vers un réel strictement positif λ, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 < \lambda - 2^{-n} \ln x_n \leqslant \frac{2^{-n}}{x_n}.$$

e Montrer que $x_n \sim e^{\lambda(2^n)}$.

4 Si $x_0 \notin]-1, 0[\cup \mathbb{R}_+^*$, déterminer si la suite (x_n) admet une limite (et la donner, le cas échéant).