Devoir non surveillé

Problème – Sur les fonctions continues périodiques, ou presque

Rappel : soit G un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$. On rappelle l'alternative suivante, qu'il est inutile de redémontrer : soit G est de la forme $a\mathbb{Z}$ pour un certain réel positif ou nul a, soit G est dense dans $\mathbb{R}$.

Notations et terminologie :

– Dans ce qui suit, f désigne une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et T est un réel.
– On note $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel (et anneau) des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
– On note $\mathcal{B}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel (et anneau) des fonctions continues et bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
– On dit que T est **une** *période* de f (et que f est T-*périodique*) si, pour tout réel x, on a : $f(x+T) = f(x)$.
– On note $\mathcal{C}_T$ l'ensemble des fonctions **continues** T-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
– On dira que f est *périodique* si elle admet une période non nulle.
– On note $\mathcal{C}_{per}$ l'ensemble des fonctions **continues** périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, *i.e.* : $\mathcal{C}_{per} = \bigcup\limits_{T\in\mathbb{R}^*} \mathcal{C}_T$.
– On note Ω_f l'ensemble des périodes de f.
– Si $\Omega_f \cap \mathbb{R}_+^*$ admet un plus petit élément T_0, on dit que T_0 est **la** période de f.

Partie A – Préliminaires sur la partie fractionnaire d'un réel

La *partie fractionnaire* $F(x)$ d'un réel x est le nombre $x - \lfloor x \rfloor$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x. On a donc $F(x) \in [0, 1[$.

A.1 Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$F(x+y) = \begin{cases} F(x) + F(y) \text{ si } F(x) + F(y) < 1, \\ F(x) + F(y) - 1 \text{ si } F(x) + F(y) \geqslant 1. \end{cases}$$

A.2 Soit x_0 un réel non entier (on a donc $F(x_0) > 0$). Soit m un entier tel que $mF(x_0) \geqslant 1$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que l'un (au moins) des termes de la famille $(x + kx_0)_{k\in[\![0,m]\!]}$ est de partie fractionnaire inférieure ou égale à $F(x_0)$.
Indication : on pourra d'abord traiter le cas où il existe $k \in [\![0, m-1]\!]$ tel que $F(x + (k+1)x_0) = F(x + kx_0) + F(x_0) - 1$, et considérer $F(x + mx_0) - F(x)$ dans le cas contraire.

A.3 Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $\delta \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer l'existence d'un entier relatif u tel que $0 < F(u\alpha) \leqslant \delta$.

Partie B – Généralités sur les fonctions périodiques

B.1 Montrer que toute fonction continue périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est uniformément continue.

B.2

a Montrer que Ω_f est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$.

b On suppose f continue, périodique et non constante sur $\mathbb{R}$. Montrer que f admet une plus petite période strictement positive.

c Donner un exemple de fonction f périodique non constante n'admettant pas de plus petite période strictement positive.

B.3 Montrer que $\mathcal{C}_T$ est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.

B.4 Montrer que $\mathcal{C}_{per} \subset \mathcal{B}$.

B.5

a On considère deux réels strictement positifs T_g et T_h, et on les suppose *incommensurables*, *i.e.* $T_g/T_h \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

On considère deux fonctions g et h continues, périodiques et non constantes de $\mathcal{C}_{per}$, dont **les** périodes respectives sont T_g et T_h.

Montrer que $g + h$ n'est pas périodique.
Indication : on pourra, étant donné une période T de $f = g+h$, observer que pour tout réel x : $g(x+T) - g(x) = h(x) - h(x+T)$, et étudier $s\ : x \mapsto g(x+T) - g(x)$.

b Montrer que $\mathcal{C}_{per}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Partie C – Fonctions quasi-périodiques

Soit E une partie de $\mathbb{R}$. On dit que E est *bien réparti* s'il existe un réel strictement positif l pour lequel tout segment de longueur l comprend un élément de E.

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$: on dit que T est une *ε-quasi période* de f si, pour tout réel x :

$$|f(x+T) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

On note $E(f, \varepsilon)$ l'ensemble des ε-quasi périodes de f.

On dit que f est *quasi-périodique* si, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $E_{f,\varepsilon}$ est bien réparti.

On note $\mathfrak{Q}$ l'ensemble des applications quasi-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

C.1 Montrer que $\mathcal{C}_{per} \subset \mathfrak{Q}$.

C.2 ♡ Montrer que $\mathfrak{Q} \subset \mathcal{B}$.

Indication : on pourra, étant donné $f \in \mathfrak{Q}$, fixer $\varepsilon = 1$, choisir $l > 0$ tel que $E_{f,1}$ rencontre tout segment de longueur l, et pour tout réel x, considérer $T \in E_{f,1} \cap [x, x+T]$.

Partie D – La somme de deux fonctions continues périodiques est quasi-périodique

Soit g et h deux éléments de $\mathcal{C}_{per}$. On souhaite montrer que $g + h \in \mathfrak{Q}$.

D.1 Traiter le cas où g et h admettent des périodes strictement positives dont le rapport est rationnel.

On se place désormais dans le cas où g et h admettent des plus petites périodes strictement positives T_g et T_h respectivement, incommensurables, *i.e.* $T_g/T_h \notin \mathbb{Q}$.

On fixe un réel strictement positif ε.

D.2 On suppose que T est une période strictement positive de g pour laquelle il existe un entier v tel que $T - vT_h$ soit une ε-quasi période de h.

Montrer que T est une ε-quasi période de $g + h$.

D.3 On considère un module d'uniforme continuité η pour ε et h.

D'après A.3, il existe un entier relatif u pour lequel : $0 < F(uT_g/T_h) \leqslant \eta/T_h$.

On pose $T = uT_g$.

a Montrer que T est une ε-quasi période de $g + h$.

b ♡ Montrer que $E_{g+h,\varepsilon} \cap T\mathbb{Z}$ est bien réparti.

c Conclure.

Remarque : en fait $\mathfrak{Q}$ est bien un sous-espace vectoriel et même un sous-anneau de $\mathcal{B}$, mais c'est compliqué à prouver.