CONCOURS COMMUN SUP 2002
DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

Épreuve spécifique de Mathématiques
(filière MPSI)
Mercredi 22 mai 2002 de 08h00 à 12h00

Instructions générales :

Les candidats :

- doivent vérifier que le sujet comprend 4 pages numérotées 1/4, 2/4, 3/4 et 4/4,
- sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées,
- colleront sur leur première feuille de composition l'étiquette à code à barres correspondante.

PROBLEME I : Exemples de matrices semblables à leur inverse

Dans tout le problème, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de **dimension 3**.

Pour u endomorphisme de E et n entier naturel non nul, on note $u^n = u \circ u \circ \ldots \circ u$ (n fois).

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3, $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et I_3 la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On notera par 0 l'endomorphisme nul, la matrice nulle et le vecteur nul.

Pour deux matrices A et B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on dira que la matrice A est **semblable** à la matrice B s'il existe une matrice P de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que : $A = P^{-1}B\,P$.

On rappelle que si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, si P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, si u est un endomorphisme de E de matrice A dans la base $\mathcal{B}'$ et de matrice B dans la base $\mathcal{B}$ alors $A = P^{-1}B\,P$ (c'est à dire, la matrice A est semblable à la matrice B).

Partie A

1. On notera $A \sim B$ pour dire que la matrice A est semblable à la matrice B.
Démontrer que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On pourra désormais dire que les matrices A et B **sont** semblables.

2. Démontrer que deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de déterminants différents ne sont pas semblables.

3. Soit u un endomorphisme de E et soit i et j deux entiers naturels.
On considère l'application w de $\mathrm{Ker}\,u^{i+j}$ vers E définie par : $w(x) = u^j(x)$.

a. Montrer que $\mathrm{Im}\,w \subset \mathrm{Ker}\,u^i$.

b. En déduire que $\dim(\mathrm{Ker}\,u^{i+j}) \leq \dim(\mathrm{Ker}\,u^i) + \dim(\mathrm{Ker}\,u^j)$.

4. Soit u un endomorphisme de E vérifiant : $u^3 = 0$ et rang $u = 2$.

a. Montrer que $\dim(\mathrm{Ker}\,u^2) = 2$. (On pourra utiliser deux fois la question **3b**.).

b. Montrer que l'on peut trouver un vecteur a non nul de E tel que $u^2(a) \neq 0$, et en déduire que la famille $(u^2(a), u(a), a)$ est une base de E.

c. Écrire alors la matrice U de u et la matrice V de $u^2 - u$ dans cette base.

5. Soit u un endomorphisme de E vérifiant : $u^2 = 0$ et rang $u = 1$.

a. Montrer que l'on peut trouver un vecteur b non nul de E tel que $u(b) \neq 0$.

b. Justifier l'existence d'un vecteur c de $\operatorname{Ker} u$ tel que la famille $(u(b), c)$ soit libre, puis montrer que la famille $(b, u(b), c)$ est une base de E.

c. Écrire alors la matrice U' de u et la matrice V' de $u^2 - u$ dans cette base.

Partie B

Soit désormais une matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ semblable à une matrice du type $T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On se propose de montrer que la matrice A est semblable à son inverse A^{-1}.

On pose alors $N = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et soit une matrice P de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1} A P = T = I_3 + N$.

6. Expliquer pourquoi la matrice A est bien inversible.

7. Calculer N^3 et montrer que $P^{-1} A^{-1} P = I_3 - N + N^2$.

8. On suppose dans cette question que $N = 0$, montrer alors que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

9. On suppose dans cette question que $\operatorname{rang}(N) = 2$. On pose $M = N^2 - N$.

a. Montrer que la matrice N est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et en déduire, en utilisant la question **4.**, une matrice semblable à la matrice M.

b. Calculer M^3 et déterminer $\operatorname{rang}(M)$.

c. Montrer que les matrices M et N sont semblables.

d. Montrer alors que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

10. On suppose dans cette question que $\operatorname{rang}(N) = 1$. On pose $M = N^2 - N$.

Montrer que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

11. Exemple : soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

On note (a, b, c) une base de E et u l'endomorphisme de E de matrice A dans cette base.

a. Montrer que $\operatorname{Ker}(u - id_E)$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2 dont on donnera une base (e_1, e_2).

b. Justifier que la famille (e_1, e_2, c) est une base de E, et écrire la matrice de u dans cette base.

c. Montrer que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

12. Réciproquement, toute matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ semblable à son inverse est-elle nécessairement semblable à une matrice du type $T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

PROBLEME II : Calcul et irrationalité de $\zeta(2) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{n^2}\right)$

Dans ce problème, pour une fonction f et un entier naturel k, $f^{(k)}$ désigne la dérivée k-ème de la fonction f avec : $f^{(0)} = f$.
Remarque : sauf s'il est précisé entier naturel, un entier peut être positif ou négatif.

Partie A : Convergence de la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}\right)_{n \geq 1}$

Dans cette partie, p et n sont deux entiers naturels non nuls et on pose $S_n(p) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}$.

1. Montrer que pour tout entier $k \geq 1$, $\frac{1}{(k+1)^p} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x^p} \mathrm{d}x \leq \frac{1}{k^p}$.

2. Montrer que pour $n \geq 2$, $S_n(p) - 1 \leq \int_1^n \frac{1}{x^p} \mathrm{d}x \leq S_{n-1}(p)$.

3. Démontrer, par un calcul d'intégrales, que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^p}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $p \geq 2$.

4. Montrer que la suite $(S_n(p))_{n \geq 1}$ converge si et seulement si $p \geq 2$.
On note alors $\zeta(p) = \lim\limits_{n \to +\infty} S_n(p)$.

Partie B : Calcul de $\zeta(2)$

Dans cette partie on pose, pour t réel : $h(t) = \frac{t^2}{2\pi} - t$, et on définit la fonction φ sur $[0, \pi]$ par :

$$\varphi(0) = -1 \quad \text{et} \quad \varphi(t) = \frac{h(t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \quad \text{pour } t \in]0, \pi].$$

5. Montrer que la fonction φ est de classe C^1 sur l'intervalle $[0, \pi]$.

6. Calculer, pour tout k entier naturel non nul, $\int_0^\pi h(t) \cos(kt) \mathrm{d}t$.

7. Calculer, pour $t \in]0, \pi]$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \cos(kt)$, puis déterminer une constante λ telle que,

$$\forall t \in]0, \pi], \quad \sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin\left((n + \frac{1}{2})t\right)}{2 \sin \frac{t}{2}} - \lambda.$$

8. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour toute fonction ψ de classe C^1 sur l'intervalle $[0,\pi]$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^\pi \psi(t)\sin\left((n+\frac{1}{2})\,t\right)\mathrm{d}t = 0$.

9. Montrer que $\boxed{\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}}$.

Partie C : $\zeta(2)$ est irrationnel

Dans cette partie, pour n entier naturel non nul et x réel, on pose $f_n(x)=\dfrac{x^n\,(1-x)^n}{n\,!}$.

10. Dans cette question, n est un entier naturel non nul.

a. Montrer qu'il existe $n+1$ entiers $e_n, e_{n+1}, \ldots, e_{2n}$ tels que $f_n(x)=\dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{i=n}^{2n} e_i\,x^i$.

b. Montrer que pour tout entier naturel k, $f_n^{(k)}(0)$ et $f_n^{(k)}(1)$ sont des entiers.
(On pourra remarquer que $f_n(x)=f_n(1-x)$).

On veut montrer que π^2 est un irrationnel, et on va **raisonner par l'absurde** : on suppose que $\pi^2=\dfrac{a}{b}$ où a et b sont deux entiers naturels non nuls.

11. On pose, pour n entier naturel non nul et x réel :
$$F_n(x)=b^n(\pi^{2n}\ f_n(x)-\pi^{2n-2}\ f_n^{(2)}(x)+\pi^{2n-4}\ f_n^{(4)}(x)-\ldots+(-1)^n f_n^{(2n)}(x)).$$

a. Montrer que $F_n(0)$ et $F_n(1)$ sont des entiers.

b. On pose, pour n entier naturel non nul et x réel : $g_n(x)=F_n\,'(x)\sin(\pi\,x)-\pi\,F_n(x)\cos(\pi\,x)$,

et $A_n=\pi\displaystyle\int_0^1 a^n f_n(x)\sin(\pi\,x)\,\mathrm{d}x$.

Montrer que, pour n entier naturel non nul et x réel : $g_n\,'(x)=\pi^2 a^n f_n(x)\sin(\pi\,x)$, et montrer que A_n est un entier.

12. On pose, toujours pour le même entier a, $u_n=\dfrac{a^n}{n\,!}$.

a. En considérant le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

b. Montrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout entier $n\geq n_0$, $\dfrac{a^n}{n\,!}<\dfrac{1}{2}$.

c. Montrer que pour tout réel $x\in[0,1]$, $0\leq f_n(x)\leq\dfrac{1}{n\,!}$.

d. Montrer alors que, pour tout entier $n\geq n_0$, $A_n\in\,]0,1[$, et conclure que π^2 est irrationnel.

e. Comment peut-on déduire de ce qui vient d'être fait que π est irrationnel ?

Pour information

Il a été prouvé depuis le 18ème siècle, que $\zeta(p)$ est irrationnel pour tout entier pair $p\geq 2$, récemment (1979) il vient d'être découvert que $\zeta(3)$ est irrationnel et le mystère demeure encore quant à l'irrationalité des $\zeta(p)$ pour les entiers impairs $p\geq 3$ ...