# Devoir non surveillé

## Inversion et points rationnels sur un cercle

Le plan $\mathbb{R}^2$ est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, et identifié à $\mathbb{C}$. On appellera *plan épointé* le plan $\mathbb{R}^2$ privé de son origine $O = (0, 0)$.

Soit $M$ un point du plan, différent de $O$. On appelle *inverse* de $M$ le point $I(M)$ défini par

$$\overrightarrow{OI(M)} = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM^2}$$

Cela définit une application $I$ du plan épointé dans lui-même, appelée *inversion*.

### Partie A – Généralités sur l'inversion

**A.1** En termes complexes, $I$ correspond à une application $f$ de $\mathbb{C}^*$ dans lui-même. Montrer, pour tout nombre complexe non nul $z$, la formule :

$$f(z) = \frac{1}{\bar{z}}$$

**A.2** Montrer que l'inversion est une involution du plan épointé (*i.e.* $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^*}$). On en déduit notamment (inutile de le prouver) que l'inversion est une bijection et que si $A$ est une partie de $\mathbb{C}^*$ et $z \in \mathbb{C}^*$, alors les assertions $z \in A$ et $f(z) \in f(A)$ sont équivalentes (grâce à l'injectivité de $f$).

**A.3** Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul, $a, b \in \mathbb{R}$. Donner la forme algébrique de $f(z)$.

**A.4** Soit $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application et $\mathcal{E}$ la partie du plan complexe, définie par :

$$\mathcal{E} = \{z \in \mathbb{C}^*, \quad h(z) = 0\}.$$

Montrer : $\quad f(\mathcal{E}) = \{z \in \mathbb{C}^*,\ h(f(z)) = 0\}$.
**Indication :** on pourra utiliser le fait que l'inversion est une involution.

### Partie B – Image d'un cercle, d'une droite

**B.1**

**a** On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre d'affixe $\omega$, de rayon $r > 0$, vu comme partie du plan complexe. On peut donc écrire : $\quad \mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C}^*, \quad (z - \omega)(\bar{z} - \bar{\omega}) - r^2 = 0\}$.

Montrer que $z$ appartient à l'image $f(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$ par l'inversion si et seulement si

$$(r^2 - |\omega|^2)|z|^2 + \bar{z}\omega + z\bar{\omega} = 1$$

**b** En déduire que si $O \notin \mathcal{C}$, $f(\mathcal{C})$ est un cercle de centre d'affixe $-\frac{\omega}{r^2 - |\omega|^2}$ et de rayon $\frac{r}{|r^2 - |\omega|^2|}$.
Montrer que si $O \in \mathcal{C}$, $f(\mathcal{C} \backslash \{O\})$ est une droite.

**c** Montrer que l'image par $f$ d'une droite ne passant pas par l'origine est un cercle privé de $O$.

**B.2** Déterminer les cercles $\mathcal{C}$ (de rayon $r > 0$) qui sont laissés globalement invariants par l'inversion, c'est-à-dire tels que $f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.

## Partie C – Points rationnels sur une droite, sur un cercle

On dit qu'un point du plan est *rationnel* si son abscisse et son ordonnée sont des nombres rationnels. Par exemple, $(\frac{1}{9}, \frac{3}{7})$ est rationnel, mais pas $(\sqrt{2}, 3)$ (car son abscisse n'est pas rationnelle).

**C.1**

**a** Donner un exemple de droite n'ayant aucun point rationnel, d'une droite admettant un unique point rationnel et enfin d'une droite admettant une infinité de points rationnels.

**b** Montrer que si une droite comporte au moins deux points rationnels, elle en admet une infinité.

**C.2** Montrer qu'un point $M$ du plan est à coordonnées rationnelles si et seulement si $I(M)$ est à coordonnées rationnelles.

**C.3**

**a** Montrer que le cercle de centre $O$ de rayon $2^{\frac{1}{4}}$ n'admet pas de point rationnel.

**Indication :** on pourra remarquer que le carré de son rayon n'est pas rationnel.

**b** Montrer l'existence d'un cercle dont l'unique point rationnel est l'origine. Montrer l'existence d'un cercle admettant exactement deux points rationnels, dont l'origine.

**c** On suppose que $\mathcal{C}$ est un cercle passant par l'origine, et admettant au moins deux autres points rationnels que l'origine. Montrer que $\mathcal{C}$ admet une infinité de points rationnels.

**d** En déduire qu'un cercle ayant au moins trois points rationnels en a une infinité.