Devoir non surveillé

Idéaux de $\mathcal{L}(E)$

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. E désigne ici un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n, et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base fixée de E.

Une partie $\mathcal{I}$ de $\mathcal{L}(E)$ est appelée *idéal à gauche* (resp. *à droite*) de $\mathcal{L}(E)$ si

– $(\mathcal{I}, +)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{L}(E), +)$.

– Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, tout $u \in \mathcal{I}$, $\quad f \circ u \in \mathcal{I} \quad$ (resp. $u \circ f \in \mathcal{I}$).

Si $\mathcal{I}$ est un idéal à droite et à gauche de $\mathcal{L}(E)$, on dit que $\mathcal{I}$ est un *idéal bilatère*.

Rappel (symbole de Kronecker) : étant donnés deux entiers i et j, $\delta_{i,j}$ vaut 1 si $i = j$, et 0 sinon.

Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on note $\varphi_{i,j}$ l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ envoyant e_k sur 0_E si $k \in [\![1, n]\!] \backslash \{j\}$, et e_j sur e_i. Autrement dit, pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, $\quad \varphi_{i,j}(e_k) = \delta_{j,k} e_i$.

Rappel : $(\varphi_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n}$ est une base de $\mathcal{L}(E)$.

Partie A – Généralités et préliminaires

A.1 Soit f et g deux endomorphismes de E.

a Montrer que $\mathrm{Im}(f + g) \subset \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$. Donner un exemple où cette inclusion est stricte.

b Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Ker}(f + g)$. Donner un exemple où cette inclusion est stricte.

A.2 On donne quelques propriétés sur les idéaux à gauche de $\mathcal{L}(E)$. Soit $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ deux idéaux à gauche de $\mathcal{L}(E)$.

a Montrer que $\mathcal{I}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

b Montrer que si $f \circ g \in \mathcal{I}$ et $f \in \mathrm{GL}(E)$, alors $g \in \mathcal{I}$.

c Montrer que si $\mathrm{GL}(E) \cap \mathcal{I} \neq \emptyset$, alors $\mathcal{I} = \mathcal{L}(E)$.

d Montrer que $\mathcal{I} + \mathcal{J}$ est un idéal à gauche de $\mathcal{L}(E)$.

e Montrer que $\mathcal{I} \cap \mathcal{J}$ est un idéal à gauche de $\mathcal{L}(E)$.

Bien entendu, on a des propriétés analogues (admises) pour les idéaux à droite, et les idéaux bilatères.

A.3 Soit $i, j, k, l \in [\![1, n]\!]$. Montrer que : $\quad \varphi_{i,j} \circ \varphi_{k,l} = \delta_{j,k} \varphi_{i,l}$.

A.4 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, et F un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$ dans E. Montrer l'existence d'un automorphisme v de E tel que $v_{|F} = f_{|F}$. Montrer que $v(\mathrm{Ker}(f)) \oplus \mathrm{Im}(f) = E$. En déduire que f peut s'écrire sous la forme $f = p \circ u$, où p est un projecteur de E, et u un automorphisme de E.

Partie B – Idéaux bilatères de $\mathcal{L}(E)$

B.1 Donner deux idéaux bilatères de $\mathcal{L}(E)$.

Soit $\mathcal{I}$ un idéal bilatère de $\mathcal{L}(E)$.

B.2 Montrer que si $\mathcal{I}$ comprend φ_{i_0,j_0} pour certains entiers $i_0, j_0 \in [\![1, n]\!]$, alors il contient

$$\{\varphi_{i,j}, 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n\}.$$

B.3 On suppose ici $\mathcal{I}$ distinct de $\{0_{\mathcal{L}(E)}\}$. Montrer que pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $\varphi_{i,j} \in \mathcal{I}$. En déduire que $\mathcal{I} = \mathcal{L}(E)$.

Indication : on pourra décomposer un élément non nul de $\mathcal{I}$ dans la base $(\varphi_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n}$, utiliser A.3 et la question précédente.

B.4 Donner l'ensemble des idéaux bilatères de $\mathcal{L}(E)$.

Partie C – Idéaux à droite de $\mathcal{L}(E)$

C.1 Soit F un sous-espace vectoriel de E. On pose

$$\mathcal{D}_F = \{f \in \mathcal{L}(E), \quad \mathrm{Im}(f) \subset F\}$$

a Montrer que $\mathcal{D}_F$ est un idéal à droite de $\mathcal{L}(E)$.
b Montrer que la dimension de $\mathcal{D}_F$ est $n\dim(F)$.

C.2 On fixe un endomorphisme α de E. On pose

$$D_\alpha = \{\alpha \circ g, \quad g \in \mathcal{L}(E)\}$$

a Montrer que D_α est un idéal à droite de $\mathcal{L}(E)$.
b Montrer que $D_\alpha \subset \mathcal{D}_{\mathrm{Im}(\alpha)}$.
On considère l'application linéaire $\Delta : g \mapsto \alpha \circ g$ de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{D}_{\mathrm{Im}(\alpha)}$.
c Calculer la dimension du noyau de Δ.
d En déduire que Δ est un morphisme surjectif d'espaces vectoriels, et que $D_\alpha = \mathcal{D}_{\mathrm{Im}(\alpha)}$.

C.3 Soit $\mathcal{I}$ un idéal à droite de $\mathcal{L}(E)$.
a Montrer l'existence de $\alpha \in \mathcal{I}$ tel que pour tout $f \in \mathcal{I}$, $\mathrm{rg}(f) \leqslant \mathrm{rg}(\alpha)$. On fixe un tel α. Montrer l'existence d'un projecteur $p \in \mathcal{I}$ tel que $D_\alpha = D_p$.
On a l'inclusion évidente $D_p \subset \mathcal{I}$. On veut prouver par l'absurde que $D_p = \mathcal{I}$, en supposant l'existence de $g \in \mathcal{I}\backslash D_p$.
b Montrer l'existence de $y \in \mathrm{Im}(g)$ n'appartenant pas à $\mathrm{Im}(p)$.
Soit H un supplémentaire de $\mathrm{Im}(p) + \mathbb{R}y$ dans E.
c Montrer que $H + \mathrm{Im}(p)$ est un supplémentaire de $\mathbb{R}y$ dans E.
d Montrer que la projection q sur $\mathbb{R}y$ parallèlement à $H + \mathrm{Im}(p)$ est un élément de $\mathcal{I}$.
e Montrer que $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p) + \mathbb{R}y$.
f Conclure.

C.4 Montrer qu'aucun hyperplan de $\mathcal{L}(E)$ n'est idéal à droite de $\mathcal{L}(E)$.

Partie D – Idéaux à gauche de $\mathcal{L}(E)$

D.1 Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que

$$\mathcal{G}_F = \{f \in \mathcal{L}(E), \quad F \subset \mathrm{Ker}(f)\}$$

est un idéal à gauche de $\mathcal{L}(E)$.

D.2 Soit $\beta \in \mathcal{L}(E)$.
a Montrer que l'ensemble

$$G_\beta = \{g \circ \beta, \quad g \in \mathcal{L}(E)\}$$

est un idéal à gauche de $\mathcal{L}(E)$, inclus dans $\mathcal{G}_{\mathrm{Ker}(\beta)}$.
b Montrer que $G_\beta = \mathcal{G}_{\mathrm{Ker}(\beta)}$.
On admet que tout idéal à gauche de $\mathcal{L}(E)$ est de ce type.

Partie E – Quelques conséquences

E.1 Montrer que si F, G sont deux sous-espaces vectoriels de E, avec $F \subset G$, alors $\mathcal{D}_F \subset \mathcal{D}_G$, et $\mathcal{G}_G \subset \mathcal{G}_F$.

E.2 Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$.
a Montrer que $D_f + D_g = \mathcal{D}_{\mathrm{Im}(f)+\mathrm{Im}(g)}$ et $D_f \cap D_g = \mathcal{D}_{\mathrm{Im}(f)\cap\mathrm{Im}(g)}$.
b Montrer que $G_f + G_g = \mathcal{G}_{\mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Ker}(g)}$ et $G_f \cap G_g = \mathcal{G}_{\mathrm{Ker}(f)+\mathrm{Ker}(g)}$.

E.3 Soit $f, g, h \in \mathcal{L}(E)$.
a On suppose $\mathrm{Im}(h) \subset \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$. Montrer l'existence d'endomorphismes u, v de E tels que

$$h = f \circ u + g \circ v.$$

b On suppose $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Ker}(h)$. Montrer l'existence d'endomorphismes w, x de E tels que

$$h = w \circ f + x \circ g.$$