Devoir non surveillé

Sur les fonctions lipschitziennes

Notons $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et $\mathcal{L}$ sa partie constituée des fonctions lipschitziennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On rappelle que $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite *lipschitzienne* s'il existe un réel positif K_φ pour lequel

$$|\varphi(y) - \varphi(x)| \leqslant K_\varphi |y - x|,$$

pour tous réels x et y.

Pour alléger la rédaction des copies, on conviendra que pour tout élément φ de $\mathcal{L}$, K_φ désignera un réel tel que φ soit K_φ-lipschitzienne.

On rappelle que pour tous réels x et y, on a la formule de trigonométrie suivante :

$$\sin(y) - \sin(x) = 2\sin\left(\frac{y-x}{2}\right)\cos\left(\frac{y+x}{2}\right).$$

On rappelle également que pour tout réel x, on a $|\sin(x)| \leqslant |x|$.

Partie A – Généralités sur les fonctions lipschitziennes

A.1 Montrer que $\mathcal{L}$ n'est pas vide, et est stable par combinaison linéaire, *i.e.* :

$$\forall f, g \in \mathcal{L}, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \lambda f + \mu g \in \mathcal{L}$$

A.2 Montrer que la composée de deux éléments de $\mathcal{L}$ est un élément de $\mathcal{L}$.

A.3 f et g étant deux fonctions bornées de $\mathcal{L}$, montrer que leur produit fg est aussi une fonction de $\mathcal{L}$. En est-il de même si f et g ne sont pas toutes les deux bornées ?

A.4 Soit $f \in \mathcal{L}$. Montrer l'existence de deux réels positifs A et B tels que pour tout réel x, on ait :

$$|f(x)| \leqslant A|x| + B.$$

A.5 Soit $f \in \mathcal{F}$. On suppose qu'il existe un réel positif M tel que pour tous réels x et y vérifiant $|y - x| \leqslant 1$, on ait $|f(y) - f(x)| \leqslant M|y - x|$. Montrer que f appartient à $\mathcal{L}$.

A.6 Soit f un élément de $\mathcal{L}$, et α un réel. Montrer que l'application $x \mapsto f(x + \alpha)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, est un élément de $\mathcal{L}$.

A.7 Montrer que la fonction sinus est lipschitzienne. En déduire que la fonction cosinus est lipschitzienne.

A.8 Montrer que toute application lipschitzienne est uniformément continue. Donner, en justifiant sa réponse, un exemple d'application uniformément continue sur $\mathbb{R}$, non lipschitzienne.

Partie B – Une équation fonctionnelle dans $\mathcal{L}$

On a pour but, dans cette partie, de rechercher les solutions lipschitziennes de l'équation

$$F(x) - \lambda F(x + a) = f(x) \qquad (\mathcal{E}),$$

où f est une fonction de $\mathcal{L}$ donnée et où a et λ sont deux réels non nuls donnés (on ne traitera que quelques cas particuliers).

B.1 Soit $F \in \mathcal{F}$ vérifiant $\mathcal{E}$. Montrer que pour tout réel x, et tout entier naturel non nul n, on a :

$$F(x) = \lambda^n F(x + na) + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k f(x + ka).$$

B.2 On suppose ici $|\lambda| < 1$.

a Montrer que l'équation $\mathcal{E}$ admet au plus une solution dans $\mathcal{L}$.

Indication : on pourra utiliser la question précédente et A.4.

b Trouver l'ensemble des solutions de $\mathcal{E}$ appartenant à $\mathcal{L}$, lorsque f est constante de valeur 1.

c On se place dans le cas où f est la fonction cosinus. Montrer que la fonction $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par

$$G(x) = \frac{\cos(x) - \lambda\cos(x-a)}{1 - 2\lambda\cos(a) + \lambda^2},$$

pour tout réel x, est un élément de $\mathcal{L}$, solution de $\mathcal{E}$. En déduire l'ensemble des solutions de $\mathcal{E}$ appartenant à $\mathcal{L}$ dans ce cas.

d Déduire de la question précédente l'ensemble des solutions de $\mathcal{E}$ dans le cas où f est la fonction sinus.

B.3 On suppose ici $\lambda = 1$.

a Montrer que, pour qu'il existe une fonction $F \in \mathcal{L}$ vérifiant $\mathcal{E}$, il faut que f soit bornée.

b Montrer, en en explicitant une, qu'il existe des fonctions $F \in \mathcal{L}$ non nulles vérifiant $F(x) - F(x+a) = 0$, pour tout réel x.

c En déduire que si $\mathcal{E}$ admet une solution dans $\mathcal{L}$, elle en admet une infinité.

On se place pour finir dans le cas où f est la fonction cosinus.

d Montrer que si $\cos(a) \neq 1$, $\mathcal{E}$ admet (au moins) une solution dans $\mathcal{L}$.

e Montrer que si $\cos(a) = 1$, alors $\mathcal{E}$ n'admet pas de solution dans $\mathcal{L}$.