

Devoir non surveillé

Exercice 1 : Groupe dont tout élément est son propre symétrique

Soit G un groupe (dont la loi est notée multiplicativement). On suppose que pour tout $g \in G$, $g^2 = 1$ (1 est l'élément neutre de G).

1 Montrer que G est abélien.

2 Soit H un sous-groupe propre de G (*i.e.* un sous-groupe de G distinct de G), et $a \in G \setminus H$. Montrer que $H \cap aH = \emptyset$ et que $H \cup aH$ est un sous-groupe de G .

3 On suppose G fini. Montrer que son cardinal est une puissance de 2.

Réciproquement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exhiber un groupe G de cardinal 2^n tel que $g^2 = 1$ pour tout $g \in G$.

Exercice 2 : Sous-anneau dense de \mathbb{R}

1 Montrer qu'un sous-groupe G de $(\mathbb{R}, +)$ tel que $\inf(G \cap \mathbb{R}_+) = 0$ est dense dans \mathbb{R} .

2 Soit A un sous-anneau de \mathbb{R} . Montrer que A est dense dans \mathbb{R} si et seulement si $A \cap]0, 1[\neq \emptyset$.