Corrigé de devoir non surveillé

Encore des suites

Exercice 1 : Séries absolument convergentes

1

a Supposons $a \leqslant b$ et v convergente : on a évidemment $u \leqslant v$ (par récurrence). De plus, v est convergente, donc majorée : u est majorée, et, comme elle est croissante (par une récurrence immédiate, grâce à $0 \leqslant a$), elle converge.

b Supposons $a_n = \mathrm{O}(b_n)$ et v convergente : soit $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $a_n \leqslant M b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En appliquant le résultat précédent à a et Mb (et non b), on obtient immédiatement que u converge.

2 On suppose $a_n = \mathrm{O}(b_n)$ et v convergente. D'après la question précédente, les suites de termes généraux $\sum_{k=0}^{n} |a_k|$ et $\sum_{k=0}^{n}(|a_k| - a_k)$ convergent (les suites $(|a_n|)$ et $(|a_n| - a_n)$ sont à termes positifs, dominés par b_n), donc leur différence converge également.

3

a Supposons que $\sum a_n$ converge, *i.e.* que u converge. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n - u_{n-1} = a_n$, donc (a_n) converge vers 0. L'exemple de la série harmonique $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)$ montre que la réciproque est fausse.

b On montre que la série $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ est convergente, grâce au critère spécial des séries alternées. Comme la série harmonique diverge, cette série est bien semi-convergente.

c Supposons $\sum a_n$ absolument convergente. Comme $(a_n - |a_n|) = \mathrm{O}(|a_n|)$, et comme $\sum |a_n|$ converge, la série $\sum(a_n - |a_n|)$ converge également, donc leur somme $\sum a_n$ itou.

Toute série absolument convergente est convergente.

Exercice 2 : $(\tan(n))$

Cette suite est bien définie, car $\mathbb{Z} \cap \frac{\pi}{2}\mathbb{Z} = \{0\}$, par irrationnalité de π.

Supposons cette suite convergente, de limite l. Pour tout entier naturel n :

$$(*) \quad \tan(1+n) = \frac{\tan(1) + \tan(n)}{1 - \tan(1)\tan(n)},$$

d'où, en faisant tendre n vers l'infini :

$$l = \frac{\tan(1) + l}{1 - \tan(1) l}.$$

Ceci conduit à

$$\tan(1)(1 + l^2) = 0,$$

puis à l'absurdité $\tan(1) = 0$: cette suite diverge.

Si elle divergeait vers $\pm\infty$, alors la relation $(*)$ conduirait à l'absurdité $\pm\infty = -\frac{1}{\tan(1)}$ en faisant tendre n vesr $+\infty$.

Cette suite est bien divergente de seconde espèce.

Exercice 3 : Sur la densité

1 D est une partie de $\mathbb{R}_+^*$, dont l'image par la fonction logarithme est $G = \{a\ln(2) + b\ln(5), (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$. On vérifie aisément que G est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ (il en est une partie non vide stable par différence). G est donc soit discret, soit dense. Or G ne peut pas être discret, car $\ln(5)/\ln(2)$ serait alors rationnel, et il existerait des entiers p et q, avec q non nul, tels que $5^q = 2^p$, ce qui est absurde : G est dense dans $\mathbb{R}$.

Soit maintenant $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, où $x < y$. On a donc $\ln(x) < \ln(y)$: soit $g \in G \cap [\ln(x), \ln(y)]$ (un tel g existe par densité de G dans $\mathbb{R}$). On a $\exp(g) \in D \cap [x, y]$. Entre deux réels strictement positifs se trouve un élément de D : cela montre immédiatement que D est dense dans $\mathbb{R}_+$.

2

a $\mathbb{Z} + \pi\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$: il ne peut pas être discret, car π est irrationnel, et il est donc dense dans $\mathbb{R}$.

Il existe donc deux suites d'entiers relatifs (a_n) et (b_n) telles que $(a_n + b_n\pi)$ tende vers $\pi/2$, donc telles que $(|sin(a_n)|)$ tende vers 1. La suite $(\sin(|a_n|))$, si elle ne diverge pas, tend vers 1 ou -1. De même, on montre l'existence d'une suite d'entiers naturels (a'_n) tels que $(\sin(a'_n))$ tende vers $1/2$. Ces deux suites ayant des images infinies (car il n'existe pas d'entier en lequel sin prend la valeur 1 ou $1/2$), il existe des suites extraites de $(\sin(n))$ divergentes, ou de limites distinctes : $(\sin(n))$ diverge.

b Supposons que cette suite converge vers $l \in [-1, 1]$. En écrivant, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\sin(n+1) = \sin(1)\cos(n) + \sin(n)\cos(1)$, il apparaît que $(\cos(n))$ converge vers un certain réel l'. La suite (e^{in}) converge donc vers $l' + il$ (de module 1), et de même pour $(e^{i(n+1)})$ (qui en est extraite), ce qui conduit à l'absurdité $e^i = 1$.

Exercice 4 : Développements asymptotiques

1 Pour montrer que (u_n) est bien définie et à termes strictement positifs, on peut procéder par récurrence sur n, mais on peut aussi introduire l'itératrice :

$$\Delta \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+^* \\ (n, x) & \mapsto & (n+1, \ln(n+x)) \end{array}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $u_n = \ln(u_{n-1} + n - 1) \geqslant \ln(n-1)$ par croissance du logarithme, et le fait que $u_{n-1} \geqslant 0$.

La suite u diverge donc vers $+\infty$.

On montre aisément par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant n$. On a donc pour tout $n \geqslant 2$: $u_n =\leqslant \ln(2n)$, puis

$$u_n = \ln(n) + \mathrm{O}(1) = \ln(n) + \mathrm{o}(\ln(n)).$$

On a donc

$$u_n - \ln(n) = \ln\left(\frac{n - 1 + \ln(n) + \mathrm{o}(\ln(n))}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{\ln(n)}{n} + \mathrm{o}(\ln(n)/n)\right) \sim \frac{\ln(n)}{n},$$

d'où

$$u_n = \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{ln(n)}{n}\right).$$

2 La fonction $x \mapsto x + \ln(x)$ est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, de limites respectives $-\infty$ et $+\infty$ en 0^+ et $+\infty$: pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x + \ln(x) = n$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$ possède donc une unique solution u_n.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$/ On a $u_n + \ln(u_n) = n$, donc $2u_n \geqslant n$ car $\ln(x) \leqslant x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. La suite (u_n) tend donc vers $+\infty$.

En particulier, $\ln(u_n) = \mathrm{o}(u_n)$, de sorte que $n = u_n + \ln(u_n) \sim u_n$.

En réinjectant dans la relation définissant u_n, il vient

$$u_n - n = \ln(u_n) = \ln(n + \mathrm{o}(n)) = \ln(n) + \ln(1 + \mathrm{o}(1)) = \ln(n) + \mathrm{o}(1) = \ln(n) + \mathrm{o}(\ln(n)),$$

d'où

$$u_n = n - \ln(n) + \mathrm{o}\left(\ln(n)\right).$$