

Corrigé de devoir non surveillé

Exercice 1 : Dérangements

1 $n!$ (cours).

2 $d_1 = 0$ et $d_2 = 1$.

3 Se donner un élément de X_k , c'est se donner un dérangement de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket \setminus \{k\}$: X_k est donc de cardinal d_{n-2} .

On définit une application ψ de Y_k vers Der_{n-1} , de la façon suivante : à tout élément f de Y_k , on associe le dérangement de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$, coïncidant avec f sur $\llbracket 1, n-1 \rrbracket \setminus \{k\}$, et envoyant k sur $f(n)$.

On définit également une application ϕ de Der_{n-1} vers Y_k envoyant un dérangement g de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$ sur le dérangement de $\llbracket 1, n \rrbracket$ coïncidant avec g sur $\llbracket 1, n-1 \rrbracket \setminus \{k\}$, envoyant k sur n , et n sur $g(k)$. On vérifie aisément que :

$$\phi \circ \psi = \text{Id}_{Y_k} \quad \text{et} \quad \psi \circ \phi = \text{Id}_{Der_{n-1}}$$

Ainsi, Y_k et Der_{n-1} sont en bijection, et ont donc même cardinal d_{n-1} .

4 Comme Der_n est la réunion disjointe des ensembles $X_1, \dots, X_{n-1}, Y_1, \dots, Y_{n-1}$, la question précédente prouve que :

$$d_n = (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2}).$$

5 Pour tout entier naturel supérieur ou égal à 2, on formule l'hypothèse :

$$(\mathcal{H}_n) : \quad d_n = nd_{n-1} + (-1)^n$$

L'amorçage pour $n = 2$ est aisé.

Fixons un entier $n \geq 2$, supposons \mathcal{H}_n , et déduisons-en \mathcal{H}_{n+1} : $n+1 \geq 3$, donc on a $d_{n+1} = n(d_n + d_{n-1})$ d'après la question précédente. D'après l'hypothèse de récurrence, $d_{n-1} = \frac{d_n - (-1)^n}{n}$, ce qui donne en remplaçant dans l'expression précédente :

$$d_{n+1} = (n+1)d_n + (-1)^{n+1}$$

La propriété est donc héréditaire.

En conclusion, la propriété est vérifiée, pour tout entier $n \geq 2$.

6 Pour tout entier naturel non nul n , on formule l'hypothèse de récurrence :

$$(\mathcal{H}_n) : \quad d_n = \sum_{0 \leq k \leq n} (-1)^k \frac{n!}{k!}$$

On vérifie aisément que \mathcal{H}_1 est vraie.

Fixons un entier naturel non nul n , supposons \mathcal{H}_n , et montrons \mathcal{H}_{n+1} :

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= (n+1)d_n + (-1)^{n+1} = (n+1) \left(\sum_{0 \leq k \leq n} (-1)^k \frac{n!}{k!} \right) + (-1)^{n+1} \\ &= \left(\sum_{0 \leq k \leq n} (-1)^k \frac{(n+1)!}{k!} \right) + (-1)^{n+1} \frac{(n+1)!}{(n+1)!} = \sum_{0 \leq k \leq n+1} (-1)^k \frac{(n+1)!}{k!} \end{aligned}$$

La propriété est donc héréditaire.

En conclusion, la formule est bien vérifiée pour tout entier naturel non nul n .