Corrigé de devoir non surveillé

Théorème de Darboux

1 On obtient successivement $\boxed{0 \notin \tau(f),}$ $\boxed{\tau(f) \subset \mathbb{R}_+,}$ $\boxed{(\tau(f) \subset \mathbb{R}_+^*) \vee (\tau(f) \subset \mathbb{R}_-^*)}$ et $\boxed{\tau(f) \text{ est borné.}}$

2

a $t(y'-x')$ et $(1-t)(y-x)$ sont deux réels positifs, l'un au moins n'étant pas nul (t et $1-t$ ne sont pas simultanément nuls). Leur somme est donc strictement positive : $\boxed{t(y'-x')+(1-t)(y-x) \neq 0.}$

b θ est bien définie d'après la question précédente, et est continue car f l'est. De plus, l'image de θ est clairement incluse dans $\tau(f)$. Comme l'image continue d'un segment est un segment, $\theta([0,1])$ est un segment. Comme cet intervalle –autrement dit, ce convexe– comprend $\theta(0) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ et $\theta(1) = \frac{f(y')-f(x')}{y'-x'}$, $\boxed{\tau(f) \text{ contient le segment d'extrémités } \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \text{ et } \frac{f(y')-f(x')}{y'-x'}.}$

c D'après la question précédente, $\tau(f)$ contient le segment joignant deux quelconques de ses points, et est donc un convexe de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire un intervalle : $\boxed{\tau(f) \text{ est un intervalle.}}$

d Supposons f continue et injective : d'une part, $\tau(f) \subset \mathbb{R}^*$ (par injectivité de f) et d'autre part, $\tau(f)$ est un intervalle (question précédente). Il vient donc $\tau(f) \subset \mathbb{R}_+^*$ ou $\tau(f) \subset \mathbb{R}_-^*$:

$\boxed{f \text{ est strictement monotone.}}$

e On suppose que $\lim_a f = -\infty$. Soit M un réel, $c \in]a,b[$. Il existe $d \in]a,c[$ tel que $f(d) < f(c) + M(a-c)$ (f n'est pas minorée sur $]a,c[$), donc $\frac{f(d)-f(c)}{d-c} > M\frac{c-a}{c-d} > M$ (car $a-c < d-c < 0$). Ceci étant valable pour tout réel M, $\boxed{\tau(f) \text{ n'est pas majoré.}}$

3

a Soit x, y deux points quelconques de I (où $x < y$). f est continue (car dérivable) sur $[x,y]$, à valeurs réelles, dérivable sur l'ouvert $]x,y[$: l'égalité des accroissements finis montre alors que $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \in \tau(f)$. Ainsi, $\boxed{\tau(f) \subset f'(I).}$

Tout point de $f'(I)$ étant limite de points de $\tau(f)$ (par définition du nombre dérivée d'une fonction en un point), $\boxed{f'(I) \text{ possède au plus deux autres points que } \tau(f) \text{, les extrémités (finies) de } f'(I).}$

b Bien entendu, f est dérivable sur I, et pour tout point x de I, $f'(x) = 3x^2$.

Une étude élémentaire montre que $f'([0,1]) = [0,3]$, $f'(]0,1[) =]0,3[$, et que $f'([-1,2]) = [0,12]$.

La question précédente permet alors de limiter les possibilités pour $\tau(f)$.

Cas où $I = [0,1]$ *:* si 0 ou 3 était un élément de $\tau(f)$, alors f' prendrait la valeur 0 ou 3 sur *l'ouvert* $]0,1[$ (d'après l'égalité des accroissements finis), ce qui n'est pas. Ainsi, $\boxed{\text{lorsque } I = [0,1],\ \tau(f) =]0,3[\text{ et } f'(I) = [0,3].}$

$\boxed{\textit{Lorsque } I =]0,1[, \text{ on a } \tau(f) = f'(I) =]0,3[.}$

Lorsque $I = [-1,2]$, f est injective, donc $0 \notin \tau(f)$. Comme dans l'exemple précédent, $12 \notin \tau(f)$. Ainsi, $\boxed{\tau(f) =]0,12[\text{ et } f'(I) = [0,12] \text{ si } I = [-1,2].}$

c f est continue car dérivable, donc $\tau(f)$ est un intervalle. D'après la question 3.a, $\boxed{f'(I) \text{ est}}$ donc également $\boxed{\text{un intervalle.}}$