Devoir non surveillé

Problème – Conjugué harmonique et axe radical

Comme dans tout problème de géométrie, on n'hésitera pas à appuyer ses raisonnements par de jolis dessins.

Partie A – Conjugué harmonique

On se place dans le plan euclidien usuel $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormal direct, que l'on assimilera à $\mathbb{C}$.

Soit $\mathcal{C}$ un cercle, P un point à l'extérieur (de l'enveloppe convexe) de ce cercle, $\mathcal{D}$ une droite passant par P, et coupant $\mathcal{C}$ en E et F distincts. L'unique point I du segment $[EF]$ qui vérifie la relation $\frac{IE}{IF} = \frac{PE}{PF}$ est appelé *conjugué harmonique du point P par rapport à $\mathcal{D}$.*

A.1 Montrer que P est le barycentre de la famille $((E, PF), (F, -PE))$ et que son conjugué harmonique I est le barycentre de la famille $((E, PF), (F, PE))$.

Dans la suite, on suppose que $\mathcal{C}$ est le cercle de centre O et de rayon 1 et que P a pour affixe p, où $p \in]1, +\infty[$. On suppose E d'affixe $e^{i\alpha}$ et F d'affixe $e^{i\beta}$, avec $0 < \alpha < \beta < \pi$. On rappelle que P, E et F sont alignés sur une droite $\mathcal{D}$. On appelle A le point d'affixe 1 et B le point d'affixe -1.

A.2 Déterminer les coordonnées du conjugué harmonique de P par rapport à la droite (AB).

A.3

a Montrer que $\frac{PE}{PF} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)}$.

b Montrer que si z_I est l'affixe de I, conjugué harmonique de P par rapport à $\mathcal{D}$, alors $\mathrm{Re}(z_I) = \frac{\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$.

c Écrire $\sin(\beta) - \sin(\alpha)$ sous forme d'un produit de cosinus et de sinus.

d À l'aide du complexe $Z = \frac{e^{i\beta} - e^{i\alpha}}{e^{i\alpha} - p}$, montrer que $\sin(\beta - \alpha) - 2p\sin\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 0$.

e Montrer que $\mathrm{Re}(z_I) = 1/p$.

Le lieu des conjugués harmoniques du point P (pour le cercle $\mathcal{C}$) est donc une partie de la droite $\mathcal{D}'$ d'équation $x = 1/p$. Cette droite $\mathcal{D}'$ est appelée *polaire* de P, et P est appelé pôle de $\mathcal{D}'$ par rapport à $\mathcal{C}$.

A.4 Montrer que si M_1 et M_2 sont les deux points d'intersection de $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{C}$, alors (PM_1) et (PM_2) sont tangentes au cercle $\mathcal{C}$.

Indication : on pourra montrer que le triangle POM_1 est rectangle en M_1.

Partie B – Axe radical

On se donne deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de centres respectifs (distincts) O_1 et O_2, de rayons respectifs R_1 et R_2. Soit I le milieu du segment $[O_1O_2]$.

Soit $\mathcal{R}$ l'ensemble $\{M \in \mathcal{P}, MO_1^2 - R_1^2 = MO_2^2 - R_2^2\}$.

B.1 Montrer que $MO_1^2 - MO_2^2 = \lambda \overrightarrow{O_1O_2} \cdot \overrightarrow{IM}$, où λ est un réel à déterminer.

B.2 Montrer que $\mathcal{R}$ est une droite qui passe par le point H défini par $\overrightarrow{IH} = \mu \overrightarrow{O_1O_2}$ (où μ est un réel à déterminer) dont on donnera un vecteur normal non nul.

$\mathcal{R}$ est appelé *axe radical* de $\mathcal{C}_1$ et de $\mathcal{C}_2$.

B.3 Déterminer l'axe radical de deux cercles se coupant en deux points distincts A_1 et A_2.

B.4 Montrer que si $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont tangents, le point de contact appartient à l'axe radical des deux cercles, puis que cet axe est la tangente commune.

Partie C – Centre radical

On considère trois cercles $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$, de centres respectifs O_1, O_2, O_3 non alignés, de rayons respectifs R_1, R_2, R_3.

Pour $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$, on note $\mathcal{R}_{i,j}$ l'axe radical des cercles $\mathcal{C}_i$ et $\mathcal{C}_j$.

C.1 Montrer que $\mathcal{R}_{1,2}$, $\mathcal{R}_{2,3}$ et $\mathcal{R}_{1,3}$ sont concourants en un point A que l'on appellera *centre radical* de $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$.

On suppose que A_1 et A_2 sont deux points de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ tels que les tangentes en ces deux points se coupent sur l'axe radical $\mathcal{R}_{1,2}$ en un point L. On suppose également que $\mathcal{C}_3$ est tangent à $\mathcal{C}_1$ en A_1 et passe par A_2.

C.2 Montrer que L est le centre radical des trois cercles.

C.3 Montrer que $\mathcal{C}_3$ est également tangent à $\mathcal{C}_2$ en A_2.

C.4 Déterminer le pôle de la droite (A_1A_2) par rapport au cercle $\mathcal{C}_3$.

C.5 Faire cette construction en prenant deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ qui se coupent en deux points distincts.