DS4 de MP2
03.11.15

Devoir surveillé

Durée : 4 heures

Sujet parcourant des chapitres importants (algèbre linéaire, suites et séries, EVN), sans question très difficile : la précision de la rédaction sera déterminante.

Partie I – Généralités

Question bonus Montrer que $\mathcal{B}$ est un espace vectoriel complexe, et que l'application $\|\cdot\|_\infty : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ est une norme.

I.1

a Il y a une période plus pertinente que les autres, c'est la plus petite d'entre elles. On peut alors établir que $\mathcal{I}(U) = p_0\mathbb{N}^* = \{p_0 k, k \in \mathbb{N}^*\}$.

b Il faut expliquer pourquoi une suite périodique est bornée, puis faire les vérifications standard.

c Question ouverte qui demande un peu d'initiative. Cet espace n'est pas de dimension finie : pour le prouver, on pourra raisonner par l'absurde, et montrer que toutes les suites périodiques admettraient alors une même période, puis trouver une contradiction.

I.2

a Il s'agit de vérifier qu'une quantité, ici $L(U)$ est bien définie, en montrant qu'elle ne dépend pas des choix de p et n. On pourra montrer séparément le fait que $A(U, p, n)$ ne dépende pas de n, puis de p (pour ce dernier point, on pourra utiliser I.1.a)

b Je ne vous donne pas les réponses attendues, mais vous pouvez les retrouver facilement par le calcul.

Pour éviter des erreurs et avoir des idées, il peut être intéressant d'observer que $L(U)$ est d'une certaine façon la valeur moyenne de U.

c Question accessible. En fait, cela provient d'un résultat plus général :

Question bonus Soit φ une forme linéaire non nulle sur un espace vectoriel E, soit $H \overset{def}{=} \ker(\varphi)$, et soit $u \in E \setminus H$. Montrer qu'alors :

$$E = H \oplus \mathbb{K}\, u$$

I.3 On peut interpréter U' comme la dérivée (discrète) de U, même s'il ne faut pas le dire ainsi.

a La détermination du noyau est simple. Pour l'image, montrer qu'en réalité $\mathrm{Im}(D) = \mathcal{P}_0$.

b La stabilité est évidente si on sait que $\mathrm{Im}(D) = \mathcal{P}_0$.

Pour la suite, c'est un cas particulier du lemme préparatoire au théorème du rang.

c Cette question est peu utile pour la suite, et emploie des termes que vous ne maitrisez peut-être pas encore, n'hésitez pas à la sauter.

Pour ceux qui souhaitent malgré tout la traiter : on dit qu'un scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$ est une *valeur propre* de D_0 si $D_0 - \lambda \mathrm{Id}_{\mathcal{P}_0}$ n'est pas injectif, *i.e.* $\ker(D_0 - \lambda \mathrm{Id}_{\mathcal{P}_0})$ n'est pas réduit au vecteur nul. Dans un tel cas, on appelle vecteur propre associé à la valeur propre λ de D_0 tout vecteur non nul de ce noyau.

I.4

a Question facile. Ne pas oublier cependant de vérifier que U^* appartient bien à $\mathcal{P}$ lorsque U appartient à $\mathcal{P}_0$.

b Pas de difficulté pour le noyau.

Déterminer l'image est délicat, c'est une question qu'il vaut peut-être mieux sauter.

Partie II – Une forme linéaire sur $\mathcal{P}_0$

II.1 La première question consiste à déterminer les suites périodiques (u_n) telles que $\sum u_n$ converge. La considération de la divergence grossière suffit à répondre à la question.

Pour la seconde question, on pourra utiliser I.1.b

II.2

a Commencer par écrire

$$\frac{1}{kj+p} = \frac{1}{kj}\,\frac{1}{1+\frac{p}{kj}}$$

b À la façon dont la question est posée, on peut s'attendre à ce qu'il y ait convergence dans le cas où $U \in \mathcal{P}_0$, et divergence dans le cas contraire. Une étude soignée, liée à la question précédente, confirme cette intuition.

c La question précédente permet facilement de montrer la divergence de $\sum v_n$ lorsque U n'appartient pas à $\mathcal{P}_0$, un peu comme on avait montré la divergence de la série harmonique en observant que $H_{2n} - H_n \geqslant \frac{1}{2}$.

Elle permet aussi de montrer la convergence de $\sum v_n$ lorsque $U \in \mathcal{P}_0$, mais la justification est assez technique.

II.3

a On pourra observer que

$$S(C) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{2p+1},$$

en calculant $\mathrm{Re}(i^{n+1})$ selon la congruence de n modulo 2.

Ensuite, on pourra utiliser (par exemple) l'indication de l'énoncé.

b

Question bonus Montrer que le résultat rappelé :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \mathrm{o}(1)$$

Pour la question proprement dite, on pourra observer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{j=1}^{np} \frac{t_j}{j} = \sum_{j=1}^{np} \frac{1}{j} - p \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{pj}$$

Partie III – Continuité d'applications linéaires

Question bonus vérifier que l'ensemble des applications lipschitziennes de E dans F est un espace vectoriel, et que la formule donnée par l'énoncé pour $\|T\|$ définit une norme sur cet espace.

Au fait, il y a une petite coquille dans l'énoncé : il faut prendre $x \in E \setminus \{0_E\}$ dans la définition de $\|T\|$, afin d'éviter une division par 0.

III.1 Montrer que L est 1-lipschitzienne, puis trouver $U \in \mathcal{P} \setminus \{0\}$ telle que $|L(U)| = \|U\|_\infty$ (*i.e.* telle que sa valeur moyenne soit égale, en module, au plus grand module de ses valeurs).

Pour la dernière question, on observera que $\mathcal{P}_0 = \ker(L) = L^{-1}(\{0\})$.

III.2 Montrer que D est 2-lipschitzienne, et que sa norme vaut effectivement 2 en exhibant un exemple précis.

III.3 Comme souvent, la lecture de la suite de l'énoncé peut vous donner des idées (ici, de suites à considérer pour prouver la non continuité de θ).

III.4

a Étudier la définition de l'intégrale I_q, c'est établir sa convergence (pour q fixé).

Pour montrer que la suite (I_q) diverge vers $+\infty$, on pourra utiliser la minoration

$$\forall\, t \in [0,1], \quad \frac{1}{1+t^q} \geqslant \frac{1}{2}$$

b Question technique laissée au lecteur. On montre que (V_N) converge vers I_q.

c Question de synthèse (on a le droit d'admettre le résultat précédent pour y répondre).