Corrigé du DS1

Exercice 1 : Supplémentaire

H est le noyau de la forme linéaire non nulle

$$\varphi\ : (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto x_1 + \cdots + x_n$$

Pour tout $u \in \mathbb{R}^n \setminus \ker(\varphi)$, $\mathbb{R}\, u$ est un supplémentaire de H. On peut par exemple prendre $\mathbb{R}\,(1, 1, \ldots, 1)$.

Exercice 2 : Un classique d'algèbre linéaire

1 Les inclusions $\operatorname{Im}(f^2) \subset \operatorname{Im}(f)$ et $\ker(f) + \operatorname{Im}(f) \subset E$ sont toujours vérifiées.

Supposons $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(f^2)$. L'information intéressante est $\operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Im}(f^2)$. Soit $x \in E$. On a $f(x) \in \operatorname{Im}(f)$, et il existe donc $y \in E$ tel que $f(x) = f^2(y)$. On a donc $f(x - f(y)) = 0$, donc

$$x = (x - f(y)) + f(y) \in \ker(f) + \operatorname{Im}(f)$$

d'où l'inclusion souhaitée.

Réciproquement, supposons $E = \ker(f) + \operatorname{Im}(f)$. Soit $y \in \operatorname{Im}(f)$: il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Écrivons

$$x = h + z,$$

où $h \in \ker(f)$ et $z \in \operatorname{Im}(f)$. On a donc

$$y = f(x) = f(z) \in \operatorname{Im}(f^2)$$

d'où l'inclusion souhaitée.

2 L'inclusion $\ker(f) \subset \ker(f^2)$ est toujours vérifiée (ainsi que $\{0\} \subset \ker(f) \cap \operatorname{Im}(f)$).

Supposons $\ker(f) = \ker(f^2)$. L'information pertinente est $\ker(f^2) \subset \ker(f)$. Soit $x \in \ker(f) \cap \operatorname{Im}(f)$. En particulier, il existe $x_0 \in E$ tel que $x = f(x_0)$. Comme $f(x) = 0$, on en déduit $f^2(x_0) = 0$, puis, par hypothèse, $f(x_0) = 0$, soit $x = 0$.

Réciproquement, supposons que $\ker(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0\}$. Soit $y \in \ker(f^2)$, *i.e.* $f^2(y) = 0$. On a $f(y) \in \ker(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0\}$, donc $y \in \ker(f)$, ce qui établit l'inclusion cherchée.

Exercice 3 : Supplémentarité

Soit $y \in \ker(v) \cap \operatorname{Im}(u)$. On a $v(y) = 0$ et il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$. On a donc $v(u(x)) = 0$, et donc $x = 0$, puis $y = 0$:

$$\ker(v) \cap \operatorname{Im}(u) = \{0\}$$

Soit $x \in F$. On a $v(u(v(x))) = v(x)$, donc

$$x = (x - u(v(x))) + u(v(x)) \in \ker(v) + \operatorname{Im}(u)$$

d'où la supplémentarité voulue.

Remarque : $u \circ v$ est un projecteur et on peut montrer que $\ker v = \ker u \circ v$, et que $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} u \circ v$, ce qui permet d'établir à nouveau le résultat voulu.

Exercice 4 : L'identité est-elle un crochet de Lie ?

Non car $\mathrm{tr}(AB - BA) = 0$.

Exercice 5 : Dimension d'un sous-espace d'endomorphismes

On vérife aisément que F est une partie de $\mathcal{L}(E)$ possédant $0_{\mathcal{L}(E)}$, et stable par combinaison linéaire : c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

Notons N sa dimension.

Si $x = 0_E$, $F = \mathcal{L}(E)$, et donc $N = n^2$.

Si $x \neq 0_E$, soit H un supplémentaire de $\mathbb{K}\,x$ dans E. On sait que l'application

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathcal{L}(E) & \to & \mathcal{L}(\mathbb{K}\,x, E) \times \mathcal{L}(H, E) \\ & f & \mapsto & (f_{|\mathbb{K}\,x}, f_{|H}) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Or $f \in F$ si et seulement si $\varphi(f) = (0, f_{|H})$, donc F est de dimension $n(n-1)$.

Remarque : on pouvait aussi faire un raisonnement matriciel.

Exercice 6 : Produit nul d'endomorphismes nilpotents

1 On procède par récurrence sur k. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$\mathcal{H}_k \ : \mathrm{rg}(f \circ g^k) = \mathrm{rg}(f)$$

L'amorçage au rang 0 est évident.

Fixons $k \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{H}_k$. D'après cette hypothèse, et puisque $\mathrm{Im}(f \circ g^k) \subset \mathrm{Im}(f)$, on a en fait

$$\mathrm{Im}(f \circ g^k) = \mathrm{Im}(f)$$

On a donc

$$g\left(\mathrm{Im}(f \circ g^k)\right) = g\left(\mathrm{Im}(f)\right)$$

soit

$$\mathrm{Im}(g \circ f \circ g^k) = \mathrm{Im}(g \circ f)$$

soit, puisque g et f commutent et que $\mathrm{Im}(f \circ g) = \mathrm{Im}(f)$

$$\mathrm{Im}(f \circ g^{k+1}) = \mathrm{Im}(f)$$

d'où $\mathcal{H}_{k+1}$ en passant aux dimensions.

2 En appliquant le résultat de la question précédente à $u_1 \dots u_k$ et u_{k+1}, on constate [1] que si $\mathrm{rg}(u_1 \dots u_{k+1}) = \mathrm{rg}(u_1 \dots u_k)$, alors ces rangs sont nuls, et donc $u_1 \dots u_k = 0$, puis $u_1 \dots u_n = 0$.

Si, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a $\mathrm{rg}(u_1 \dots u_{k+1}) < \mathrm{rg}(u_1 \dots u_k)$, alors $\mathrm{rg}(u_1 \dots u_n) \leqslant \mathrm{rg}(u_1) - (n-1) \leqslant 0$, car u_1 n'est pas inversible (u_1 est nilpotente), et donc $u_1 \dots u_n = 0$.

Exercice 7 : Calculs de dérivées

1 f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1 - \sqrt[3]{2}\}$, et pour tout x de ce domaine

$$f'(x) = \frac{1}{2 + (1-x)^3} + \frac{3x(1-x)^2}{(2 + (1-x)^3)^2}$$

2 f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x :

$$f'(x) = \cos(x)\, e^{\sin(x)}$$

1. Par nilpotence de u_{k+1} et le fait qu'il commute avec $u_1 \dots u_k$.

3 Pour tout réel x, $e^{2x}-e^x+1>0$ car le trinôme X^2-X+1 n'a pas de racine réelle. f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et, pour tout réel x :

$$f'(x)=\frac{2e^{2x}-e^x}{e^{2x}-e^x+1}$$

4 Notons $g\ : t\in\mathbb{R}\mapsto\frac{e^{\sin(t)}}{1+t^2}\mathrm{d}t$, et soit G une primitive de g sur $\mathbb{R}$ (existe par continuité de g).

On a, pour tout réel x :

$$f(x)=G(\sin(x))-G(-x^2)$$

donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et, pour tout réel x :

$$f'(x)=\cos(x)\,g(\sin(x))+2xg(-x^2)=\frac{\cos(x)e^{\sin(\sin(x))}}{1+\sin(x)^2}+\frac{2xe^{-\sin(x^2)}}{1+x^4}$$

Exercice 8 : Équivalents de fonctions

1 On effectue un développement limité à l'ordre 3 :

$$\begin{aligned}2e^x-\sqrt{1+4x}-\sqrt{1+6x^2} &= 2(1+x+x^2/2+x^3/6+\mathrm{o}(x^3))-(1+2x-2x^2+4x^3+\mathrm{o}(x^3))-(1+3x^2+\mathrm{o}(x^3))\\ &= -\frac{11}{3}x^3+\mathrm{o}(x^3)\end{aligned}$$

donc si on appelle f la fonction étudiée,

$$f(x)\sim_{x\to 0}-\frac{11}{3}x^3$$

2 Comme on préfère avoir des produits que des différences pour les équivalents, on écrit

$$g(x)\overset{def}{=}(\cos x)^{\sin x}-(\cos x)^{\tan x}=\cos(x)^{\tan(x)}\left(\cos(x)^{\sin(x)-\tan(x)}-1\right)$$

Or $\cos(x)^{\tan(x)}\sim_{x\to 0}1$, et

$$\cos(x)^{\sin(x)-\tan(x)}=\exp((\sin(x)-\tan(x))\ln(\cos(x)))$$

De plus, $\sin(x)=x-\frac{x^3}{6}+\mathrm{o}(x^3)$ et $\tan(x)=x+\frac{x^3}{3}+\mathrm{o}(x^3)$, donc

$$\sin(x)-\tan(x)\sim_{x\to 0}-\frac{1}{2}x^3$$

et $\ln(\cos(x))\sim_{x\to 0}-\frac{x^2}{2}$, donc

$$\cos(x)^{\sin(x)-\tan(x)}-1=\exp(x^5/4+\mathrm{o}(x^5))-1\sim_{x\to 0}x^5/4$$

Ainsi,

$$g(x)\sim_{x\to 0}\frac{x^5}{4}$$

3 Pour tout $x>0$

$$\sqrt{x^2+1}=x\sqrt{1+1/x^2}=x\left(1+\frac{1}{2x^2}+\mathrm{o}_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)=x+\frac{1}{2x}+\mathrm{o}_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$$

De même,

$$\sqrt[3]{x^3+x}=x+\frac{1}{3x}+\mathrm{o}_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$$

et

$$\sqrt[4]{x^4+x^2}=x+\frac{1}{4x}+\mathrm{o}_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$$

et donc

$$\sqrt{x^2+1}-2\sqrt[3]{x^3+x}+\sqrt[4]{x^4+x^2}\sim_{x\to+\infty}\frac{1}{12x}$$

Exercice 9 : Calcul de limites

1 $\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}(x^3)$ et $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3)$, donc

$$\arctan(x) - \sin(x) \sim_{x \to 0} -\frac{x^3}{6}$$

$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}(x^3)$ et $\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3)$, donc

$$\tan(x) - \arcsin(x) \sim_{x \to 0} \frac{x^3}{6}$$

La limite cherchée vaut donc -1.

2 $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}(x^3)$ et $\mathrm{sh}(2x) = x + \frac{8x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3)$, donc

$$2\tan(x) - \mathrm{sh}(2x) \sim_{x \to 0} -\frac{2}{3}x^3$$

De plus, $\arctan(x) \sim_{x \to 0} x$, et $(1 - \cos(3x)) \sim_{x \to 0} \frac{9x^2}{2}$, de sorte que la limite cherchée est $-4/27$.

3 On étudie d'abord $(1 + 1/x)^x$ en $+\infty$ à la précision $1/x^2$:

$$(1+1/x)^x = \exp(x\ln(1+1/x)) = \exp(x(1/x - 1/(2x^2) + 1/(3x^3) + \mathrm{o}_{x \to +\infty}(1/x^3))) = \exp(1 - 1/(2x) + 1/(3x^2) + \mathrm{o}_{x \to +\infty}(1/x^2))$$

donc

$$\begin{aligned} (1 + 1/x)^x &= e\,\exp(-1/(2x))\exp(1/(3x^2))\left(1 + \mathrm{o}_{x \to +\infty}(1/x^2)\right) \\ &= e\,\left((1 - 1/(2x) + 1/(8x^2))(1 + 1/(3x^2)) + \mathrm{o}_{x \to +\infty}(1/x^2)\right) \\ &= e\left(1 - \frac{1}{2x} + \frac{11}{24x^2} + \mathrm{o}_{x \to +\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \end{aligned}$$

En substituant $2x$ à x puis $3x$ à x, on obtient

$$\left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{2x} = e\left(1 - \frac{1}{4x} + \frac{11}{4 \times 24x^2} + \mathrm{o}_{x \to +\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

et

$$\left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{3x} = e\left(1 - \frac{1}{6x} + \frac{11}{9 \times 24x^2} + \mathrm{o}_{x \to +\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

et donc

$$x^2\left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - 4\left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{2x} + 3\left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{3x}\right) \sim_{x \to +\infty} \frac{11\,e}{72}$$

la limite cherchée est $\frac{11\,e}{72}$.

Exercice 10 : Calcul d'intégrale

Par intégration par parties,

$$\int_0^1 \arctan(t)\mathrm{d}t = [t\arctan(t)]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\mathrm{d}t = \arctan(1) - \frac{1}{2}\ln(2) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2)$$

Exercice 11 : Encadrement de Gauss de la factorielle

1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}
\prod_{\substack{i+j=n+1,\\ i\geqslant 1, j\geqslant 1}} \sqrt{ij} &= \left(\prod_{\substack{i+j=n+1,\\ i\geqslant 1, j\geqslant 1}} \sqrt{i}\right)\left(\prod_{\substack{i+j=n+1,\\ i\geqslant 1, j\geqslant 1}} \sqrt{j}\right)\\
&= \prod_{\substack{i+j=n+1,\\ i\geqslant 1, j\geqslant 1}} i \quad \text{(l'indice j est muet)}\\
&= \prod_{i=1}^{n} i \quad \text{(j est déterminé par la valeur de i)}\\
&= n!
\end{aligned}$$

2 Soit $i, j \in \mathbb{N}^*$. On a d'une part

$$ij - (i+j-1) = ij - i - j + 1 = (i-1)(j-1) \geqslant 0,$$

et, d'autre part

$$\left(\frac{i+j}{2}\right)^2 - ij = \frac{1}{4}(i^2 + 2ij + j^2 - 4ij) = \left(\frac{i-j}{2}\right)^2 \geqslant 0,$$

d'où le résultat demandé.

3 En combinant les deux premières questions, il vient

$$\prod_{\substack{i+j=n+1,\\ i\geqslant 1, j\geqslant 1}} \sqrt{i+j-1} \leqslant n! \leqslant \prod_{\substack{i+j=n+1,\\ i\geqslant 1, j\geqslant 1}} \sqrt{\left(\frac{i+j}{2}\right)^2},$$

soit

$$\prod_{\substack{i+j=n+1,\\ i\geqslant 1, j\geqslant 1}} \sqrt{n} \leqslant n! \leqslant \prod_{\substack{i+j=n+1,\\ i\geqslant 1, j\geqslant 1}} \left(\frac{n+1}{2}\right),$$

soit enfin, puisque chaque produit comporte n termes, l'encadrement demandé :

$$n^{n/2} \leqslant n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

Exercice 12 : Un encadrement de $\binom{2n}{n}$

1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Tout d'abord,

$$\begin{aligned}
\prod_{\substack{1\leqslant k\leqslant 2n,\\ k \text{ pair}}} k &= \prod_{i=1}^{n}(2i)\\
&= \left(\prod_{i=1}^{n} 2\right)\left(\prod_{i=1}^{n} i\right)\\
&= 2^n\, n!
\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\left(\prod_{\substack{1\leqslant k\leqslant 2n,\\ k \text{ impair}}} k\right)\left(\prod_{\substack{1\leqslant k\leqslant 2n,\\ k \text{ pair}}} k\right) = \prod_{k=1}^{2n} k = (2n)!,$$

d'où

$$\frac{\displaystyle\prod_{\substack{1\leqslant k\leqslant 2n,\\ k \text{ impair}}} k}{\displaystyle\prod_{\substack{1\leqslant k\leqslant 2n,\\ k \text{ pair}}} k} = \frac{(2n)!}{(2^n\, n!)^2} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.$$

Comme $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$, on a bien également

$$\frac{(2n)!}{(2^n\, n!)^2} = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}.$$

2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Observons que

$$\prod_{\substack{1\leqslant k\leqslant 2n,\\ k \text{ impair}}} k = \prod_{\substack{3\leqslant k\leqslant 2n,\\ k \text{ impair}}} k,$$

et que ce dernier produit comporte $(n-1)$ termes.

Par ailleurs, le produit $\displaystyle\prod_{\substack{1\leqslant k\leqslant 2n,\\ k \text{ pair}}} k$ comporte n termes. L'idée est d'observer l'entrelacement des termes de ces deux produits : on a

$$\frac{\displaystyle\prod_{\substack{3\leqslant k\leqslant 2n,\\ k \text{ impair}}} k}{\displaystyle\prod_{\substack{1\leqslant k\leqslant 2n,\\ k \text{ pair}}} k} = \frac{1}{2}\,\frac{\displaystyle\prod_{\substack{3\leqslant k\leqslant 2n,\\ k \text{ impair}}} k}{\displaystyle\prod_{\substack{4\leqslant k\leqslant 2n,\\ k \text{ pair}}} k} = \frac{1}{2}\prod_{i=1}^{n-1}\frac{2i+1}{2i+2} \leqslant \frac{1}{2},$$

et, de même,

$$\frac{\displaystyle\prod_{\substack{3\leqslant k\leqslant 2n,\\ k \text{ impair}}} k}{\displaystyle\prod_{\substack{1\leqslant k\leqslant 2n,\\ k \text{ pair}}} k} = \frac{1}{2n}\,\frac{\displaystyle\prod_{\substack{3\leqslant k\leqslant 2n,\\ k \text{ impair}}} k}{\displaystyle\prod_{\substack{2\leqslant k\leqslant 2(n-1),\\ k \text{ pair}}} k} = \frac{1}{2n}\prod_{i=1}^{n-1}\frac{2i+1}{2i} \geqslant \frac{1}{2n},$$

d'où, grâce à la première question,

$$\frac{1}{2n} \leqslant \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \leqslant \frac{1}{2},$$

puis l'encadrement voulu.

Endomorphismes nilpotents de rang maximal

Partie A – Quelques propriétés de J

A.1 J étant échelonnée et comportant $n-1$ lignes non nulles, elle est de rang $n-1$.

A.2

a Si $k \leqslant n-1$, J^k est la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux en position $(i, i+k)$ qui valent 1. Si $k \geqslant n$, J^k est nulle. On peut montrer ce résultat par récurrence, ou plus simplement en considérant l'endomorphisme u de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à J : $u(e_1) = 0$, et $u(e_{i+1}) = e_i$ pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$.

b $J^n = 0_n$ donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $(J^k)^n = (J^n)^k = 0_n^k = 0_n$ (car $k \neq 0$).

Toutes les puissances de J – sauf celle d'exposant 0 – sont nilpotentes.

A.3 $\exp(J)$ est la matrice triangulaire supérieure dont le coefficient en position (i,j) vaut $1/(j-i)!$ si $j \geqslant i$.

Partie B – Quelques résultats sur les noyaux itérés d'un endomorphisme

B.1 Si $x \in \mathrm{Ker}(u^i)$, alors $u^i(x) = 0$ et donc, puisque $u^j(0) = 0$: $u^{i+j}(x) = 0$.
$\mathrm{Ker}(u^i) \subset \mathrm{Ker}(u^{i+j})$.

B.2 L'ensemble $\{m \in \mathbb{N}, t_m = t_{m+1}\}$ est une partie de $\mathbb{N}$, non vide (car $(t_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'entiers naturels majorée par n), et admet donc un plus petit élément. En particulier, r existe bien.

B.3 Remarquons que pour tout entier naturel m, $\mathrm{Ker}(u^m)$ est inclus dans $\mathrm{Ker}(u^{m+1})$.

a Par définition de r, on a, pour tout entier $m < r$, $t_m \neq t_{m+1}$: $\mathrm{Ker}(u^m)$ est donc strictement inclus dans $\mathrm{Ker}(u^{m+1})$.

b $\mathrm{Ker}(u^r) = \mathrm{Ker}(u^{r+1})$, car $\mathrm{Ker}(u^r)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Ker}(u^{r+1})$, de même dimension (finie).

c Montrons par récurrence que pour tout entier $m \geqslant r$, $\mathrm{Ker}(u^m) = \mathrm{Ker}(u^{m+1})$. L'amorçage au rang r a déjà été effectué, et si on suppose la formule vraie à un rang $m \geqslant r$ fixé, alors, pour tout $x \in \mathrm{Ker}(u^{m+2})$, on a $u(x) \in \mathrm{Ker}(u^{m+1}) = \mathrm{Ker}(u^m)$, donc $x \in \mathrm{Ker}(u^{m+1})$, puis $\mathrm{Ker}(u^{m+2}) \subset \mathrm{Ker}(u^{m+1})$. Comme l'inclusion réciproque est bien connue, l'hérédité est prouvée.

Partie C – Recherche des endomorphismes nilpotents de rang $n-1$

C.1

a $\mathrm{Im}(w) = v^q(\mathrm{Im}(v^p)) = \mathrm{Im}(v^{p+q})$.

b $\mathrm{Ker}(w) = \mathrm{Im}(v^p) \cap \mathrm{Ker}(v^q) \subset \mathrm{Ker}(v^q)$.

c Le théorème du rang appliqué à w donne

$$\mathrm{rg}(v^p) = \mathrm{rg}(w) + \dim(\mathrm{Ker}(w)),$$

puis, compte tenu des questions précédentes

$$\mathrm{rg}(v^p) \leqslant \mathrm{rg}(v^{p+q}) + \dim(\mathrm{Ker}(v^q)),$$

soit, en appliquant le théorème du rang à v^p et v^{p+q} :

$$\dim(\mathrm{Ker}(v^{p+q})) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(v^p)) + \dim(\mathrm{Ker}(v^q)).$$

d D'après le théorème du rang appliqué à v, $\dim(\mathrm{Ker}(v)) = 1$ (v est de rang $n-1$), d'où, en prenant $q = 1$ dans la formule précédente :

$$\dim(\mathrm{Ker}(v^{p+1})) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(v^p)) + 1,$$

pour tout entier naturel p. Une récurrence immédiate sur i permet alors de montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\dim(\mathrm{Ker}(v^i)) \leqslant i$.

e Comme $\dim(\mathrm{Ker}(v^{n-1})) \leqslant n-1 < n = \dim(\mathrm{Ker}(v^n))$ ($v^n = 0$), la suite finie d'entiers $(\dim(\mathrm{Ker}(v^i)))_{i\in[\![1,n]\!]}$ est strictement croissante (cf. B.3.a), de premier terme 1 et de dernier terme n, ce qui force $\dim(\mathrm{Ker}(v^i)) = i$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

C.2 $\dim(\mathrm{Ker}(v^{n-1})) = n-1 \neq n$, donc $v^{n-1} \neq 0$.

C.3 Il existe un vecteur e de E tel que $v^{n-1}(e) \neq 0$. On vérifie alors classiquement que $\mathcal{B}_1 = (v^{n-1}(e), \ldots, v(e), e)$ est une base de E.

C.4 La matrice de v dans cette base n'est autre que J.

C.5 u et v admettent dans des bases adaptées J pour représentation matricielle : $M_{\mathcal{B}}(u)$ et $M_{\mathcal{C}}(v)$ sont par conséquent semblables à J, et sont donc semblables.