VI.6.a Pour tout réel $x \in]-1,1[$, démontrer la relation

$$\mathrm{Li}(x) + \mathrm{Li}(-x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Li}(x^2).$$

VI.6.b Retrouver la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

VI.7.a Pour tout réel $x \in]0,1[$, démontrer la relation

$$\mathrm{Li}(x) - \mathrm{Li}(-x) + \mathrm{Li}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - \mathrm{Li}\left(\frac{x-1}{1+x}\right) = \frac{\pi^2}{4} + \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\ln(x).$$

VI.7.b En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{2}-1)^{2n+1}}{(2n+1)^2}$

FIN

2.2 Analyse de la première épreuve

Contenu de l'épreuve

Le sujet de cette année proposait de calculer de différentes manières la somme de la série de terme général $(1/n^2)$ et d'utiliser cette somme pour déduire un certain nombre de résultats au sujet d'autres séries numériques. L'ensemble du problème utilisait des notions simples d'analyse vues dans les deux premières années du cycle universitaire.

Commentaires généraux

Rappelons que résoudre un énoncé mathématique consiste non seulement à trouver des résultats corrects, mais aussi à justifier précisément les démarches et raisonnements permettant d'y parvenir. Plus encore, il s'agit avant toutes choses de vérifier l'existence des objets sur lesquels on travaille : trop de candidats semblent penser que toute suite admet une limite et que le seul problème est de l'identifier ou pensent que la somme d'une série (dont on ne peut parler sans en avoir prouvé l'existence) a effectivement les propriétés d'une somme finie. La préparation d'une épreuve de Mathématiques doit donc nécessairement commencer par un apprentissage précis des définitions et des théorèmes en les replaçant dans les contextes de structures où elles ont effectivement un sens. Par ailleurs, lorsqu'il s'agit de notions délicates d'analyse (et la no- tion de limite en est une), il est important de ne pas se contenter d'idées approximatives ou simplistes (par exemple en pensant uniquement en termes de suites monotones, voire même en ne faisant référence qu'aux suites usuelles), il serait bon d'avoir à l'esprit quelques exemples ou contre-exemples simples ce qui éviterait sans doute de grosses erreurs.

Comme chaque année, on constate que les candidats obtenant des notes satisfaisantes sont ceux qui ont traité en profondeur un nombre raisonnable de questions. Il n'est pas indispensable d'aborder toutes les parties du problème : on risque alors de se disperser à la recherche de petits résultats intermédiaires, ce qui nuit à la compréhension de la démarche inhérente à l'énoncé. Cette stratégie ne permet pas la plupart du temps d'engranger un nombre de points significatif.

Il faut naturellement se réjouir de la présence à ce concours d'excellents candidats !

Remarques détaillées sur quelques questions

Partie 1 : cette partie a été en général bien traitée sauf la dernière question relative à la rédaction d'un exercice de Terminale. Cette question a été abordée par moins d'un candidat sur deux et a été correctement traitée par un étudiant sur 10. On rencontre un théorème surprenant qui dit que toute suite à termes positifs majorée, converge.

Partie 2 : c'est une partie sur laquelle les candidats prennent des points. Il s'agit de techniques de calcul. En 3.a) le degré du polynôme n'est pas souvent évoqué et le fait que les racines soient distinctes n'est pas établi.

Partie 3 : cette partie est généralement bien réussi. L'encadrement de $J(n)$ en 4.b) est rarement justifié. On rencontre encore des raisonnements par récurrence mal rédigés.

Partie 4 : Les candidats traitent généralement les questions 2.a) et 2. b), prennent des points avec le 5.a) et 5.b) mais les questions 1) et 3) pourtant classiques ne sont que très rarement traitées. Il y a confusion entre une fonction et son prolongement par continuité. La limite, quand λ tend vers 0 de l'intégrale en 4) est rarement bien traitée. On rencontre naturellement le "fameux résultat" qui consiste à dire que "la limite de l'intégrale est égale à l'intégrale de la limite"

Partie 5 : Cette partie a été souvent survolée. Les candidats qui l'abordent se limitent à 1.a) et 1.b), admettent 1.c) et traitent 1.d). C'est la partie du problème la moins aboutie par une bonne majorité de candidats.

Partie 6 : Ceux qui sont allés un peu loin se sont contenté de traiter les questions du point de vue de calcul formel, sans prendre soin de justifier les calculs. En 1) le fait que la fonction à intégrer admet un prolongement par continuité en 0 est rarement expliqué. Beaucoup de candidats ont chuté sur la dérivée d'une fonction composée en 4.a).

2.3 Enoncé de la deuxième épreuve

Introduction

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel :

$$\forall\ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \forall\ y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

et l'on définit la norme d'un vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ par

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Soit a un vecteur de $\mathbb{R}^n$ non nul, on note s_a la symétrie orthogonale de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par

$$\forall\ x \in \mathbb{R}^n, \quad s_a(x) = x - 2\frac{\langle a, x\rangle}{\langle a, a\rangle} a.$$

On dit qu'une partie R de $\mathbb{R}^n$ est un **système de racines** dans $\mathbb{R}^n$ si elle vérifie les conditions suivantes :

– la partie R est finie, ne contient pas 0 et engendre le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^n$;