

1. Présentation du sujet

Ce sujet se compose d'un problème unique comportant quatre parties indépendantes consacrées essentiellement aux projecteurs :

- calcul d'exponentielle de matrice à l'aide des projecteurs spectraux dans les cas diagonalisable et non diagonalisable,
- calcul de distances à des hyperplans à l'aide du théorème de la projection orthogonale.

Les thèmes mis en jeu étaient assez divers et classiques : projecteurs, exponentielle de matrice, continuité d'un endomorphisme en dimension finie, polynômes interpolateurs de Lagrange, théorème de décomposition des noyaux, polynôme minimal, théorème de la projection orthogonale.

2. Observations générales

Le texte de l'épreuve était clair, aucune question ne présentait de grosses difficultés.

Ce type de sujet doit récompenser les candidats qui auront travaillé leur cours et refait des exercices dits « classiques ».

L'avantage d'un tel sujet, pour lequel la moyenne brute est au dessus de 10/20, est de pouvoir mieux tenir compte de la rigueur et, pour certaines questions, n'attribuer les points que si la réponse est parfaite.

C'est un sujet qui a permis de bien trier les candidats, l'écart-type est important, on rencontre tous types de notes.

La tenue des copies est en général correcte. Cette année les correcteurs étaient invités à porter une attention toute particulière au soin et à la présentation. Par exemple, une copie dont les résultats sont soulignés ou encadrés est plus agréable. Malheureusement, il existe quelques copies peu lisibles qui sont corrigées aux risques et périls du candidat. On ne peut qu'insister une nouvelle fois sur le soin que le futur ingénieur doit apporter à son travail.

L'attention des candidats est attirée par le fait que désormais les textes des sujets de mathématiques nécessitent une connaissance très précise des points fondamentaux du cours.

Sont ainsi valorisés :

- l'apprentissage du cours et en particulier les démonstrations des points importants, les exercices et exemples de base,
- les qualités de rigueur et de clarté d'exposition que l'on peut attendre d'un futur ingénieur,
- l'aptitude à savoir manipuler sa calculatrice,
- le soin apporté à la présentation de son travail.

Ainsi un candidat de niveau moyen et qui a travaillé doit pouvoir obtenir au moins la moyenne.

3. Remarques détaillées par question

1. Questions préliminaires

1. Les fonctions matricielles ch et sh ne sont pas à connaître, aussi ne pouvait-on pas se contenter de répondre $\exp(A+B) = ch(A+B) + sh(A+B)$.
2. La question était ouverte. Même si la condition suffisante attendue était « A et B commutent », la réponse $A=0$ et $B=0$ a été acceptée. Les réponses commençant par « il faut que » n'ont pas été prises en compte.

2. Un calcul d'exponentielle de matrice à l'aide des projecteurs spectraux, cas diagonalisable

3. En général bien traitée. Même si l'on peut rencontrer parfois « injectif implique bijectif » sans avoir dit que les dimensions des espaces de départ et d'arrivée étaient identiques.
4. En général bien traitée.
5. (a) En général bien traitée.
(b) Peu de bonnes réponses. De très nombreuses copies n'évoquent nullement la continuité d'un endomorphisme qui a pourtant fait l'objet de la question précédente. Seuls ceux qui commencent par une somme finie, puis passent à la limite en justifiant que l'interversion somme/limite se fait grâce à la continuité fournissent des réponses convaincantes.
6. Question assez peu réussie et souvent non traitée.
7. En général bien traitée.
8. (a) Tout le monde ne pense pas à utiliser la question précédente, les candidats utilisent alors l'expression factorisée de l_i et en arrive à des expressions incorrectes du type

$$\prod_{k \neq i} \frac{v(x) - \lambda_k x}{\lambda_i - \lambda_k}.$$

- (b) La conclusion se fait en général sans problème.

3. Un calcul d'exponentielle de matrice à l'aide des projecteurs spectraux, cas non diagonalisable

9. La bonne réponse est souvent donnée même si l'on a l'impression que l'expression « scindé à racines simples » même si elle est écrite, n'est pas vraiment bien comprise. Certains confondent aussi polynôme minimal et caractéristique.
10. Une bonne réponse est en général donnée. Donnons quelques exemples de réponses fausses :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

11. La bonne réponse n'a pas toujours été donnée. Il fallait invoquer le théorème de décomposition des noyaux en n'oubliant pas que les polynômes étaient premiers entre eux puis, rappeler que le polynôme minimal est un polynôme annulateur.
12. En général bien traitée, même si certaines réponses sont longues.

13. En général bien traitée. Signalons toutefois que certains ne reconnaissent pas que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha^k}{k!}$ vaut e^α , ce qui est d'autant plus surprenant qu'ils ont déjà manipulé des exponentielles (de matrice) sous forme de série.
14. Calculs similaires à ceux de la question précédente où l'on doit utiliser le fait que, comme id et $u - \text{id}$ commutent $\exp(u - \text{id} + \text{id}) = \exp(u - \text{id}) \circ \exp(\text{id})$.
15. Cette question demandait une synthèse de cette partie. Elle a, en général, été réussie par les candidats ayant traité les questions précédentes.

4. Calcul de distances à l'aide de projecteurs orthogonaux

16. La réponse correcte est souvent donnée même si l'on rencontre les erreurs $d(x, F) = x - p_F(x)$ ou $d(x, F) = \|x\| - \|p_F(x)\|$, par exemple.
17. Très souvent la réponse donnée était incorrecte avec un oubli de la valeur absolue. Parfois la norme de n figurait au numérateur.
18. La justification de l'hyperplan est en général bien faite. Mais, dans de nombreuses copies, la norme euclidienne de I_n est fautive.
19. Cette dernière question a souvent été mal traitée. La valeur de la distance si elle est trouvée est rarement bien justifiée.