- **E.2.b.** Le calcul de la norme de x a posé problème aux candidats ayant abordé cette question. Rappelons que le carré de la norme d'un vecteur n'est pas toujours égal à la somme des carrés de ses composantes !

4.2 Seconde épreuve écrite

4.2.1 Énoncé

On trouvera l'énoncé de l'épreuve à l'adresse suivante : http://agrint.agreg.org/12-EP2.pdf

4.2.2 Généralités

Le thème

Le problème posé cette année en analyse avait pour but l'étude d'une notion courante en analyse et en topologie (bien que peu abordée dans les sujets antérieurs du concours) : les valeurs d'adhérence d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie. En guise d'introduction, on faisait voir que pour une suite convergente u l'ensemble $\mathcal{V}(u)$ est réduit à un singleton, la réciproque étant vraie pour des suites bornées, puis on considérait quelques exemples de suites divergentes admettant des ensembles de valeurs d'adhérence plus ou moins simples : suites périodiques, suites discrètes, suites à évolution lente pour lesquelles $\mathcal{V}(u)$ est connexe, suites denses. La troisième partie établissait diverses propriétés de la force d'un point par rapport à une suite, notion asymtotique de « fréquence de visite » d'une suite au voisinage d'un point ; ces propriétés servaient dans la quatrième partie où on proposait un algorithme permettant, sous certaines hypothèses, de déterminer le nombre de valeurs d'adhérences d'une suite. Ce résultat est dû à Jean-Paul Delahaye (Algorithmes pour suites non convergentes, Numerische Mathematik 34, 1980).

Les points positifs

L'un des objectifs du concours de l'agrégation interne de mathématiques est d'inciter des professeurs à se réengager dans des études, à y parfaire et élargir leur culture mathématique. De fait, le jury a pu remarquer que le sujet a été traité de façon fort satisfaisante par un bon nombre de candidats, un sixième environ ce qui correspond à la proportion des admissibles potentiels ; qui plus est, le caractère assez peu « classique » des questions étudiées par rapport à la culture mathématique des professeurs a permis d'apprécier la préparation intense et efficiente de nombreux candidats. Le jury se félicite de cet état de fait et encourage les candidats non encore parfaitement au point à persister dans leurs efforts.

Parmi les copies où le problème n'est pas survolé on a pu noter :

- un effort de présentation, de clarté ;
- qu'en général, lorsque le candidat ne sait pas répondre à une question, il admet le résultat (sauf pour la question A-1) : peu de « triche » intellectuelle ; peu de « zapping » également !
- et une assez bonne surprise par rapport à la nouveauté, les algorithmes : de nombreux candidats ont à peu près correctement traité l'un des deux algorithmes, certains algorithmes manquant toutefois de clarté ou d'explications dans leur mise en œuvre :
  - ▷ variables non énoncées à l'entrée ;
  - ▷ boucles et tests mal calés ;
  - ▷ peu d'attention portée à ce qui sort de l'algorithme.

Les points négatifs

- **Côté présentation :** Il y a encore trop de candidats qui oublient de marquer le numéro de certaines questions ou qui écrivent de manière peu lisible.
- **Côté rédaction :**
  - Une difficulté peut-être liée au sujet : une grande partie des candidats ont une idée intuitive des démonstrations, font des schémas assez représentatifs de la situation mais la démonstration ne reste que paraphrase de l'énoncé.
  - Certains candidats donnent des démonstrations très schématiques (par exemple, une succession de mots sans phrase construite) ou abusant d'abréviations.
  - Lorsqu'une question ne semble pas très difficile (par exemple la question 16), il ne faut pas pour autant abuser des expressions comme « c'est clair » ou « il est évident que » ou « on peut montrer facilement que », surtout si on ne parvient pas à résoudre les questions plus délicates.
  - Une mauvaise gestion du temps en fin de l'épreuve a poussé quelques bons candidats à survoler plusieurs questions (écrivant même parfois « je n'ai pas le temps ») sans contribuer de manière notable, alors qu'une rédaction attentive pouvait leur apporter nombre de points.
- **Côté raisonnement :**
  - Pour les questions où il s'agit de montrer une équivalence, on lit trop souvent des tentatives de raisonnements directs (par équivalence) qui s'avèrent peu clairs voire « boiteux » ; il est très souvent préférable de procéder par double implication, et en précisant clairement de quelle implication il s'agit dans tel ou tel passage.
  - Pour les questions nécessitant un raisonnement par récurrence, on voit souvent une simple évocation des premiers termes. On pourrait au moins préciser qu'un raisonnement par récurrence est nécessaire s'il reste peu de temps pour le mettre en place. Dans un nombre non négligeable de copies, le correcteur est averti seulement à la fin de la démonstration que celle-ci est une démonstration par récurrence.
- **Côté mathématique :** il y a eu de fréquentes confusions entre valeur d'adhérence d'une suite (limite d'une suite extraite de cette suite) et valeur d'adhérence d'un ensemble (limite d'une suite d'éléments de cet ensemble) ; et l'aspect extraction par une fonction strictement croissante n'a en général pas été établi.

Quelques conseils thématiques :

– **la rigueur** est toujours nécessaire et on recommande de s'abstenir de faire de la paraphrase ou de bluffer quand la solution ne semble pas évidente. Certaines questions du problème se prêtaient particulièrement à de tels comportements (surtout celles qui portaient sur des démonstrations d'existence et d'unicité, ou des passages à la limite, les questions 1 et 2 de la partie I, la partie C de la partie I et la partie III en général) et les correcteurs en ont tenu compte. D'une manière générale, toutes les questions commençant par « justifier » ou « vérifier » appellent des arguments pertinents et rigoureux, puisque la réponse étant donnée dans l'énoncé, ne reste à la charge du candidat que l'argumentation de la démonstration.

– **le raisonnement par l'absurde** (ou par contraposition), doit être indiqué clairement et on doit en tous cas éviter d'aboutir à une contradiction alors qu'on ne fait pas un raisonnement par l'absurde (cela s'est souvent présenté dans la question 6 de la partie I).

– **le souci pédagogique** est naturellement attendu compte tenu du but de ce concours ; la question 6 (toujours elle) était fort révélatrice de cette attente car peu difficile mais parfois épouvantablement mal rédigée.

– **les quantificateurs** sont largement en usage, notamment pour traduire la définition d'une valeur d'adhérence d'une suite ou celle de la limite d'une suite, ce qui est correct. Les quantificateurs ne sont pas interchangeables ; ainsi, l'explicitation du fait qu'une suites est non stationnaire (encore la question 6 !), mal faite, conduit-elle à considérer (à tort !) des suites dont tous les éléments sont deux à deux distincts à partir d'un certain rang. L'usage des quantificateurs ne doit pas être abusif ; ainsi, lorsque dans une démonstration il s'agit d'appliquer une propriété vraie pour tout ε à une valeur particulière ε, ce point n'est pas toujours bien explicité et on continue à voir des quantificateurs de ci de là dans la rédaction. Autre aspect (voisin), les quantités figurant dans des assertions énoncées à l'aide de quantificateurs (par exemple un $\varepsilon > 0$, un entier n_0), devraient alors être considérées comme des « variables muettes » ; trop souvent elles sont utilisées ensuite au cours d'une démonstration, sans y avoir été explicitement introduites, ce qui peut rendre incompréhensible le cheminement logique de la démonstration.

– **les égalités d'ensemble** posent un problème voisin des équivalences logiques. Il est souvent préférable de procéder par double inclusion. Pour montrer l'égalité de deux ensembles A et B par double inclusion, certains candidats montrent d'abord que $A = \emptyset$ équivaut à $B = \emptyset$, ce qui n'est bien sûr pas nécessaire.
– **le raisonnement par récurrence** impose d'indiquer dès le début quelle est la propriété $\mathcal{P}_n$ visée et quel est l'ensemble auquel appartient l'entier n sur lequel porte la récurrence.
– **les bornes inférieures et les minimums** doivent être distingués, faute de quoi certaines démonstrations (pourtant nécessaires) disparaissent (ainsi en question 12).

4.2.3 Analyse des réponses, question par question

Partie I – Valeurs d'adhérence d'une suite
Cette partie, longue,permettait à un candidat ayant répondu correctement à l'intégralité de trois des quatre sous-parties d'obtenir une bonne note.

1. Les questions 1 et 2, assez délicates mais presque toujours abordées, ont engendré un certain nombre d'erreurs, souvent par confusion entre « il existe une suite de points de l'ensemble des termes (c'est-à-dire $\{y \mid \exists n, y = u_n\}$) qui tend vers x » et « il existe une suite extraite de la suite u_n qui tend vers x », ou encore basées sur le faux argument « $\overline{T_N(u)}$ est inclus dans $\mathcal{V}(u)$ ». De même, la limite d'une suite convergente composée d'éléments de $T_N(u)$ n'avait aucune raison d'appartenir à $\mathcal{V}(u)$. On attendait sur ces premières questions un raisonnement très soigné et les candidats qui l'avaient compris s'en sont bien sortis.
2. Cette question également souvent traitée a permis de départager les candidats, tant il est vrai qu'elle fut traitée de manières très différentes en fonction des rédacteurs. Notons tout de même que l'argument qui consiste à dire que l'intersection des ensembles d'indices supérieurs à N est vide est faux.
3. **(a)** Cette question a, en général, été bien traitée. Il suffit de noter qu'une intersection de fermés est fermée (au fait, il n'est pas du tout nécessaire que ce soit une intersection dénombrable).

   (b) Très souvent abordée, cette question est aussi l'une des questions discriminantes du problème. Bien sur, le caractère borné de $V(u)$ devait être démontré et non pas énoncé de façon péremptoire, mais aussi fallait-il dire que l'espace vectoriel est de dimension finie pour pouvoir conclure qu'un fermé, borné est un compact. Enfin le théorème de Bolzano-Weierstrass (également basé sur la dimension finie !) permet de conclure que $V(u)$ n'est pas vide. Ces deux théorèmes sont parfois énoncés pour un espace métrique complet, ce qui est faux (dans L^1, la suite $u = (\mathbf{1}_{[n,n+1]})_{n\in\mathbf{N}}$ est contenue dans la boule unité, mais toute suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ vérifie $\|u_{\varphi(n)} - u_{\varphi(m)}\| = 2$ donc diverge).
   On voit parfois démontré le fait que $V(u)$ n'est pas vide en disant que « dans un espace métrique complet, l'intersection d'une suite décroissante (F_n) de fermés non vides est non vide », propriété fausse (dans $\mathbf{R}$, considérer les ensembles $[n, +\infty[$. Cela deviendrait vrai

(origine probable de l'erreur) en supposant de plus que $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{diam}(F_n) = 0$ (hypothèse d'ailleurs non vérifiée pour $F_n = \overline{T_n(u)}$ dès que $V(u)$ a plus d'un élément).

4. **(a)** Le plus simple était d'effectuer une démonstration par l'absurde.

   (b) Cette question a souvent été bien traitée. Cependant une erreur a parfois été commise dans l'implication directe : la propriété contraire de « $\mathcal{V}(u)$ est un singleton », n'est pas « $\mathcal{V}(u)$ est un ensemble fini d'au moins 2 éléments ». Curieusement, l'unicité de la limite ℓ d'une suite convergente u est parfois invoquée (à tort) pour en déduire que toute suite extraite de u converge vers ℓ (cela découle plutôt de ce qu'une application $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strictement croissante vérifie $\varphi(n) \geq n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$).

5. De nombreux candidats ont trouvé une suite $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ répondant à la question. Beaucoup moins ont pensé à démontrer effectivement que $\mathcal{V}(u) \cup \mathcal{V}(v) \subset \mathcal{V}(w)$ et très peu ont démontré l'inclusion inverse.

6. C'est peut être ici une des questions les plus discriminantes du problème. Elle est classique et pourtant trop de candidats la rédigent si mal que malgré la présence de tous les arguments leur conclusion est fausse. Il y a beaucoup d'erreurs sur la négation de la propriété « stationnaire ». Certains candidats croient raisonner par l'absurde alors qu'ils font un raisonnement direct. Heureusement de bonnes copies présentent une rédaction parfaite de cette question. On pouvait par exemple écrire

$$\exists N \in \mathbf{N}, \quad \forall n \geq N, \quad |u_n - l| \leq \frac{r}{4}$$

ce qui donne

$$\exists N \in \mathbf{N}, \quad \forall n \geq N, \quad |u_n - u_N| \leq |u_n - l| + |l - u_N| \leq \frac{r}{2} < r$$

et on conclut que la suite est stationnaire à partir du rang N.

7. Pour cette question, il fallait utiliser le fait qu'une suite extraite d'une suite discrète est discrète.

8. On pouvait sur cette question montrer sa culture mathématique. Plusieurs arguments étaient admis, comme, par exemple, l'unicité de la décomposition d'un entier naturel en base 2. Si l'existence de la décomposition est très souvent démontrée, il n'en va pas de même pour l'unicité. La plupart des candidats font une démonstration par récurrence pour l'existence, ce qui est juste mais pas forcément le plus naturel et qui ne donne pas l'unicité. Dans d'autres copies, l'aspect existence est démontré en choisissant pour p le max de l'ensemble des entiers q tels que $2^q \leqslant n$ (avec des raisonnements parfois imprécis, mais relevant de cette idée). On prouve ensuite que $n - 2^p$ est le k cherché. L'aspect unicité est en général passé sous silence, le candidat considérant que le choix de p s'impose par évidence. Pourtant, l'unicité aurait pu découler d'une étude de condition nécessaire (si p et k existent, alors nécessairement p est le max des entiers q tels que $2^q \leqslant n$ et $k = n - 2p$, donc s'ils existent ils sont uniques). L'existence relève alors de la condition suffisante : les p et k dégagés par la condition nécessaire conviennent. Le parallèle entre condition nécessaire/suffisante et unicité/existence n'est presque jamais apparu.

9. Cette question sur la construction d'un algorithme a été souvent bien traitée. Quelques erreurs d'incrémentation/décrémentation (parfois à la fin de l'algorithme) amènent à des algorithmes faux. De nombreux candidats ont voulu, dans cette question, se servir de l'algorithme d'Euclide, ce qui n'était pas forcément le plus efficace.

10. (b) Le résultat, souvent indiqué, est même quelquefois prouvé !

11. **(a)** Cette question, lorsqu'elle a été abordée, a été souvent résolue avec succès (notamment par dichotomie). Il est à noter que la densité de $\mathbf{Q}$ ne permettait pas de conclure.

(b) Cette question permettait de tester le souci de cohérence dans les réponses : la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ étant bornée, $\mathcal{V}(v)$ était compact (question 3-b) ; donc $[0,1[$, souvent évoqué, ne pouvait pas être la bonne réponse. D'autre part, il était inutile de montrer que 1 appartenait à $\mathcal{V}(v)$ car $\overline{[0,1[} = [0,1]$!

12. Une partie de $\mathbf{R}$ admet une borne inférieure si elle est minorée et <u>non vide</u>. L'existence de $\inf T_N(u)$ est rarement bien établie. La propriété « A est une partie non vide minorée de R, donc A admet une borne inférieure » n'apparait pas toujours clairement (les candidats se contentent souvent de vérifier que A est minorée).

13. Les réponses à cette question sont souvent correctes.

14. Cette question est peu ou mal traitée. La suite (m) n'est pas, *a priori*, une sous suite de (u).

15. De nombreux candidats ne remarquent pas l'égalité des trois termes à comparer et ne donnent que des réponses partielles. On a parfois eu un argument (faux) selon lequel pour tout entier naturel n, $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n \leq u_n$.

16. Comme en question 13.b. le raisonnement devait être très clair pour que la question soit comptée entièrement juste. Trop de candidats ont écrit des propositions fausses comme $u_n < \inf T_n(v)$. Il s'agissait de d'abord montrer que, si $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, alors, étant donné $N \in \mathbf{N}$, on a $\inf\limits_{n\geq N} u_n \leq \inf\limits_{n\geq N} v_n$; on a parfois obtenu à la place « $\inf\limits_{n\geq N} u_n \leq \max\limits_{n\geq N} u_n \leq \inf\limits_{n\geq N} v_n$ » (la deuxième inégalité est fausse) ; en fait on attendait plutôt ceci : pour tout $n \geq N$, $\inf\limits_{k\geq N} u_k \leq u_n \leq v_n$ (la borne inférieure de $T_N(u)$ étant un minorant de $T_N(u)$), donc $\inf\limits_{k\geq N} u_k \leq \inf\limits_{n\geq N} v_n$ (la borne inférieure de $T_N(v)$ est plus grande que tout minorant de $T_N(v)$).

Par ailleurs, lorsqu'on veut utiliser une propriété de la borne inférieure, il importe de bien la dégager ; par exemple : pour tout ensemble borné $A \subset \mathbf{R}$, on a $\inf A = \inf \bar{A}$ ou encore $\inf A \in \bar{A}$.

17. De nombreux candidats ont trouvé un exemple de deux suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifiant

$$\liminf_{n\to+\infty} u_n + \liminf_{n\to+\infty} v_n < \liminf_{n\to+\infty} (u_n + v_n)\,.$$

Peu ont fait la démonstration de l'inégalité large qui nécessite une manipulation rigoureuse de la borne inférieure d'un ensemble.

18. Presque aucun candidat ne répond correctement à cette question, il est vrai un peu délicate. Cependant il est curieux de voir dans de très nombreuses copies des exemples tout à fait aberrants : $(-1)^n$, $\frac{1}{n}$, $\ln n$ (l'une des trois propriétés : à croissance lente, divergente, bornée étant oubliée). La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie pour tout entier naturel n par

$$u_n = \cos\left(\pi\sqrt{n}\right)$$

était l'un des exemples les plus simples à traiter. Deux copies donnent une bonne solution en utilisant la suite (v_n) de la question 11 et en la ré-ordonnant (les termes d'indices $n \in [\![2^{p+1}, 2^{p+2}[\![$ sont énumérés dans l'ordre inverse de ceux d'indices dans $[\![2^p, 2^{p+1}[\![$).

19. Cette question a été assez bien faite lorsqu'elle a été (rarement) abordée. Pour exprimer que l'ensemble $V(u)$ n'est pas connexe, les candidats disent en général qu'il est réunion de deux fermés non vides disjoints, sans préciser qu'il s'agit de fermés *relatifs* de $V(u)$ i.e. des intersections avec $V(u)$ de deux fermés de E ; et, seulement parce que $V(u)$ est fermé dans E, on peut conclure que ce sont bien deux fermés de E.

20. Dans cette question, il est important de parler de la continuité de la fonction distance puis d'utiliser la compacité (essentielle) de K_1, K_2 ou celle du produit $K_1 \times K_2$. D'excellentes rédactions ont été proposées dans cette question.

21. Il ne suffit pas dire que Ω_1 et Ω_2 sont des ouverts, il faut le prouver en utilisant, à nouveau, la continuité de la fonction distance.

22. La dernière question de la partie I était délicate. Elle a été abordée avec bonheur et avantage par quelques rares candidats.

Partie II – Valeurs d'adhérence des suites itératives

23. Cette question est largement abordée par les candidats mais assez mal traitée par une majorité d'entre eux. Notamment il n'est pas vrai qu'une valeur d'adhérence a définie pour une suite itérative vérifie nécessairement $f(a) = a$, propriété qu'on trouve hélas assez souvent « démontrée »...

    De nombreux candidats citent le théorème du point fixe mais oublient qu'il s'agissait de démontrer une double inclusion. L'inclusion délicate $V(u) \subset f(V(u))$ n'a d'ailleurs été traitée que par un tout petit nombre de candidats.

24. Cette question simple est bien traitée.

25. Pour la question 25(a) (et 26a), la remarque concernant la récurrence dans les commentaires généraux est à nouveau valable. Dans la question 25(b), le principe des tiroirs est assez souvent appliqué de façon erronée. Il permet d'affirmer que, comme on a $h_n \in [\![0, b]\!]$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ (donc pour une infinité de valeurs de n), il existe deux entiers distincts n_1 et n_2 tels que $h_{n_1} = h_{n_2}$. En revanche il est faux de dire qu'il existe $n \in [\![0, b]\!]$ tel que $h_{b+2} = h_n$, ou de dire que, pour tout entier naturel N, il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que $h_{N+p} = h_N$.

26. La rédaction de 26 (b) a trop souvent été négligée : division par un réel sans s'assurer qu'il est non nul.

27. Cette question simple a rarement été traitée correctement.

Partie III – Force d'un point

28. Pour montrer que cette suite est bornée, il ne suffit pas de montrer qu'elle est majorée.

29. Trop peu ont indiqué que la fonction H était croissante et bornée, ce qui permettait de conclure (la multiplication des variables a manifestement dérouté les candidats).

30. Le passage de $0 \leqslant H_m(x, u, \epsilon) \leqslant 1$ à $0 \leqslant H(x, u, \epsilon) \leqslant 1$ est considéré comme un passage à la limite, alors qu'une limite inférieure n'est pas une limite.

33. Les questions 33, 34 et 35 sont délicates et rarement résolues correctement.

34. Pour obtenir une suite u et un réel x tels que $F(x, u) = 1$ il suffit de prendre $x = 0$ et de trouver une suite u vérifiant par exemple

    $$\lim_{m\to+\infty} m^{-1}\mathrm{card}\{n \in [\![0, m-1]\!] \ / \ u_n = 0\} = 1.$$

    Citons deux réponses (une seule ayant été bien justifiée) : $u_n = 1$ si n est le carré d'un entier (resp. n est une puissance de 2) et $u_n = 0$ sinon.

36. Beaucoup ont oublié le singleton $\{20\}$.

Les dernières questions du problème n'ont pratiquement pas été abordées.